УДК 519.2

ЙМОВІРНІСНА СТРУКТУРА ДИСКРЕТНИХ НЕООДНОРІДНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

Лопуленко В.В.

Науковий керівник: канд.ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Робота присвячена дослідженню ймовірнісних характеристик неоднорідного ланцюга Маркова засобами теорії ймовірностей, лінійної алгебри та дискретної математики.

Ключові слова: ланцюг Маркова, матриця переходу, дискретний час.

THE MATRICITY STRUCTURE OF DISCRETE MISCELLANEOUS LABELS MARKOV

Lopulenko VV

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

The paper is devoted to the investigation of the probabilistic characteristics of the inhomogeneous Markov chain by means of probability theory, linear algebra and discrete mathematics.

Keywords: Markov chain, matrix of transition, discrete time.

Властивість, яка характеризує процес як марківський, прийнято називати марківською або властивістю Маркова. Вперше ця властивість була сформульована російським математиком ***А.А.Марковим***, який в 1907 році поклав початок вивченню послідовностей залежних випробувань і пов'язаних з ними сум випадкових величин. Цей напрямок досліджень відомий зараз під назвою теорії ланцюгів Маркова.

Проте вже в роботі ***Л.Башельє*** можна угледіти спробу трактувати броунівський рух як марківський процес, яка отримала обгрунтування після досліджень ***Н.Вінера*** в 1923 році. Основи загальної теорії марківських процесів з неперервним часом були закладені у працях А.Колмогорова.

Останнім часом можна почути про застосування ланцюгів Маркова в самих різних областях: сучасних веб-технологіях, при аналізі літературних текстів або навіть при розробці тактики гри футбольної команди. Ланцюг Маркова це один з найпростіших випадків послідовності випадкових подій. Але, незважаючи на свою простоту, вона часто може бути корисною навіть при описі досить складних явищ. Ланцюгом Маркова називають таку послідовність випадкових подій, в якій ймовірність кожної події залежить тільки від попереднього, але не залежить від більш ранніх подій.

Все вище сказане підкреслює актуальність дослідження ймовірнісних характеристик ланцюгів Маркова, особливий акцент у відповідній роботі ми робимо на використанні не класичних підходів в аналізі ланцюга Маркова та використанні пакету символьних обчислень Maple, для дослідження останніх.

Розглянемо наступний приклад ланцюга маркова в якому послідовність перехідних матриць є періодичною, тобто має вигляд:

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{T-1}, \dots, A_0, A_1, A_2, \dots, A_{T-1}, \dots$$

Для аналізу відповідної ситуації введемо наступне означення.

Означення 1. *квадратну стохастичну матрицю* 2×2 *назвемо рівно рядковою, якщо її відповідні рядки є рівними, тобто вона вигляд:*

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

Потрібно відзначити, що добуток двох рівно рядкових матриць є рівно рядковою матрицею, дійсно:

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 1-b \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-b \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Більш того, видно що домноження зліва на рівно рядкову матрицю не змінює матрицю множник зліва.

Означення 2. *Стохастичну матрицю будемо називати строго стохастичною, якщо всі її елементи строго додатні.*

Потрібно відзначити, що добуток двох строго стохастичних матриць є строго стохастичною матрицею, дійсно:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix},$$

де з умов:

$$a, b, c, d, e, f, g, h > 0$$

випливають умови:

$$ae + bg, af + bh, ce + dg, cf + dh > 0.$$

Зазначимо, що добуток двох стохастичних матриць є стохастичною матрицею.

Теорема 1. *Якщо матриця перехідних ймовірностей однорідного ланцюга Маркова з двома станами переходу містить невід'ємні ймовірності, то відповідна фінальна матриця ймовірностей є строго стохастичною та рівнорядковою.*

Доведення.

Нехай матриця перехідних ймовірностей має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 1 - p_0 \\ p_1 & 1 - p_1 \end{pmatrix}$$

Існування границі

$$\lim_{n \to \infty} P^n$$

гарантується ергодичною теоремою Маркова, адже $p_0, p_1 \in (0; 1)$.

Отже, нехай

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} x & 1 - x \\ y & 1 - y \end{pmatrix} = P^*$$

Оскільки повинна виконуватись рівність:

$$P^* P = P^*$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} x & 1 - x \\ y & 1 - y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 & 1 - p_0 \\ p_1 & 1 - p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 - x \\ y & 1 - y \end{pmatrix},$$

звідки

$$\begin{cases} x p_0 + (1 - x) p_1 = x; \\ y p_0 + (1 - y) p_1 = y. \end{cases}$$

та відповідно

$$x = y = \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1}.$$

Отже, відповідна матриця фінальних ймовірностей має вигляд:

$$P^* = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1}{1-p_0+p_1} & \dfrac{p_1}{1-p_0+p_1} \\ \dfrac{p_1}{1-p_0+p_1} & \dfrac{p_1}{1-p_0+p_1} \end{pmatrix}$$

Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо для неоднорідного ланцюга маркова послідовність перехідних матриць є періодичною та містить тільки строго стохастичні матриці то він не має фінальної матриці ймовірностей.*

Доведення.

Отже нехай послідовность матриць перехідних ймовірностей має вигляд:

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{T-1}, \dots, A_0, A_1, A_2, \dots, A_{T-1}, \dots$$

тобто

$$P_n = A_j$$

де

$$j \in \{0; \dots; T-1\};$$

$$n \equiv j \ (mod\, T)$$

Для зручності позначимо:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_1^{(j)} & 1-a_1^{(j)} \\ a_2^{(j)} & 1-a_2^{(j)} \end{pmatrix}$$

Позначимо:

$$B_n = P_0 P_1 \dots P_n$$

Припустимо, що існує

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B^*$$

У цьому випадку маємо:

$$B^* = \lim_{n\to\infty} B_{(T-1)n} = \lim_{n\to\infty} \tilde{P}^n,$$

де

$$\tilde{P} = A_0 A_1 A_2 \dots A_{T-1}$$

тоді, як відзначалось у відповідній теоремі матриця B^* є строго стохастичною та рівнорядковою:

$$B^* = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} B_{n+1} = B^* = \lim_{n\to\infty} B_n$$

де

$$B_{n+1} = B_n P_{n+1},$$

то

$$B^* = B^* P_{n+1}$$

Аналогічно легко отримати аналогічний результат при множенні матриці зліва:

Отже,

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(j)} & 1-a_1^{(j)} \\ a_2^{(j)} & 1-a_2^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(j)} & 1-a_1^{(j)} \\ a_2^{(j)} & 1-a_2^{(j)} \end{pmatrix}$$

Отже маємо суперечність з умовою для періоду:

$$T > 1.$$

Теорему доведено.

Результат відповідної теореми можливо перефразувати в наступному вигляді:

Наслідок 1. *Ланцюг Маркова з періодичною послідовністю строго стохастичних матриць переходу* 2×2 *має фінальну матрицю ймовірностей тільки тоді, коли він є однорідним.*

Тепер розглянемо випадок, коли послідовність матриць переходу 2×2 не є періодичною, але є асимптотично стійкою.

$$\begin{pmatrix} p_0 & 1-p_0 \\ p_1 & 1-p_1 \end{pmatrix}$$

Теорема 3. *Якщо послідовність перехідних ймовірностей має наступний вигляд:*

$$P_n = \begin{pmatrix} p_0 - \frac{k}{q^n} & 1 - p_0 + \frac{k}{q^n} \\ p_1 - \frac{k}{q^n} & 1 - p_1 + \frac{k}{q^n} \end{pmatrix}$$

де $q > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1} & \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1} \\ \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1} & \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1} \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} p_0 & 1 - p_0 \\ p_1 & 1 - p_1 \end{pmatrix}^n$$

Доведення

Так як добуток стохастичних матриць, це стохастична матриця, то нехай

$$B_n = \begin{pmatrix} a_n & 1 - a_n \\ b_n & 1 - b_n \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 - a_{n+1} \\ b_{n+1} & 1 - b_{n+1} \end{pmatrix} = B_n P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & 1 - a_n \\ b_n & 1 - b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 - \frac{k}{q^n} & 1 - p_0 + \frac{k}{q^n} \\ p_1 - \frac{k}{q^n} & 1 - p_1 + \frac{k}{q^n} \end{pmatrix},$$

Звідки отримуємо наступні рекурентні співвідношення:

$$a_{n+1} = a_n \left(p_0 - \frac{k}{q^n}\right) + (1 - a_n)(p_1 - \frac{k}{q^n})$$

Тобто,

$$a_{n+1} = (p_0 - p_1)a_n + p_1 - \frac{k}{q^n}$$

Знайдемо часткову послідовність, яка задовольняє відповідне рекурентне співвідношення:

$$c_n = C_1 + \frac{C_2}{q^n}$$

Після підстановки отримаємо:

$$C_1 + \frac{C_2}{q^{n+1}} = (p_0 - p_1)\left(C_1 + \frac{C_2}{q^n}\right) + p_1 - \frac{k}{q^n}$$

Звідки отримаємо наступні рівняння:

$$\begin{cases} C_1 = (p_0 - p_1)C_1 + p_1; \\ \dfrac{C_2}{q^1} = (p_0 - p_1)C_2 - k. \end{cases}$$

Звідки:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{p_1}{1 - p_0 + p_1}; \\ C_2 = \dfrac{-k}{1 - q(p_0 - p_1)}. \end{cases}$$

Нехай

$$\tilde{a}_n = a_n - c_n$$

Тоді

$$a_n = c_n + \tilde{a}_n$$

Після підстановки отримуємо:

$$\tilde{a}_{n+1} = (p_0 - p_1)\tilde{a}_n$$

Отже,

$$a_n = c_n + \tilde{a}_n$$

Враховуючи властивість геометричної прогресії, маємо:

$$a_n = \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1} + \frac{C_2}{100^n} + \tilde{a}_0 (p_0 - p_1)^{n-1} \to \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1}$$

Абсолютно аналогічно доводимо, що

$$b_n \to \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1}$$

Отже, збурення здійснені на інтенсивності, що мають порядок малості еквівалентній показниковій функції не змінюють матрицю фінальних ймовірностей.

Список літератури

1. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990. − 376 с.
2. Валтер Я. Стохастические модели в экономике. − М.: Статистика, 1976. − 232 с.
3. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, −1975. − 320 с.

4. Вентцель Е. С. Исследование операций. − М.: Советское радио, 1972. − 552 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк., 1988. – 439 с.
6. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. — Ч. I. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2000. — 304 с.
7. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
8. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.:Наука, 1974. –120 с.
9. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика. К.: Центр навчальної літератури, 2004. - 448стр. - Підручник. - 1-е вид.
10. Чернова Н.И. Теория вероятностей. Учеб. пособие - Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. - 160 с.