УДК 519.2

ПЕРСПЕКТИВНЕ ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Лисенко Наталія

Науковий керівник: канд.ф.-м. наук, професор кафедри ПМСЕ Авраменко О.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті розкрито особливості перспективного планування, обґрунтовано особливості двохетапної задачі стохастичного програмування та побудовано конкретну задачу перспективного планування, як двохетапну модель стохастичного програмування.

Ключові слова: стохастичне програмування, двохетапна модель програмування,перспективне планування.

Perspective planning of manufacturing in understanding conditions

N. Lysenko

Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Professor Avramenko O.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article the features of perspective planning are disclosed, the features of the two-stage task of stochastic programming are substantiated and the specific task of long-term planning is constructed as a two-stage model of stochastic programming.

Key words: stochastic programming, two-stage programming model, perspective planning.

Інформацію, що ми отримуємо при здійсненні перспективного планування, часто не вистачає для ефективного функціонування підприємства. Брак потрібної інформації може призвести до негативних наслідків, зокрема, втрати прибутку. Задача перспективного планування в термінах стохастичного програмування є корисною, так, як при дослідженні виробництва враховуються максимально можлива кількість чинників, що сприяють функціонуванню підприємства.

При побудові математичної моделі іноді і неможливо, мати точні значення деяких параметрів, особливо коли прогнозується розвиток процесів у майбутньому. Фактичні значення можуть суттєво відрізнятися від тих, які були взяті за основу при побудові математичних моделей та визначенні оптимальних планів, що породжує ризик прийнятих рішень. Невизначеність і ризик може бути різного ступеня залежно від того, яку інформацію маємо про досліджуваний процес чи явище. Якщо відомий розподіл відповідних параметрів, то для прийняття рішень використовують методи стохастичного програмування, одним з яких є перспективне планування, суть яких полягає в тому, що відшукуючи оптимальне рішення, тобто значення керованих змінних, необхідно враховувати також вплив ряду випадкових чинників, керувати якими немає можливості. Проаналізувавши книгу Д.Б. Юдіна «Математичні методи управління в умовах неповної інформації» маємо достатню кількість моделей, що стосуються планування виробництва в загальному вигляді. Тому **метою** у подальшому дослідженні було застосувати деякі моделі у конкретних задачах, щоб перевірити ефективність моделей. У статті побудували і дослідили двохетапну задачу стохастичного програмування [2].

Стохастичне програмування - це підхід, що дозволяє враховувати невизначеність в оптимізаційних моделях. У той час як детерміновані задачі оптимізації формулюються з використанням заданих параметрів, реальні прикладні завдання зазвичай містять деякі невідомі параметри. Коли параметри відомі тільки в межах визначених кордонів, один підхід до вирішення таких проблем називається робастної оптимізацією. Цей підхід полягає в тому, щоб знайти рішення, яке є допустимим для всіх таких даних і в деякому сенсі оптимально. Моделі стохастичного програмування мають подібний вигляд, але використовують знання розподілів ймовірностей для даних або їх оцінок. Мета тут полягає в тому, щоб знайти деяке рішення, яке є допустимим для всіх (або майже всіх) можливих значень даних і максимізують математичне сподівання деякої функції рішень і випадкових змінних. Загалом, такі моделі формулюються, вирішуються аналітично або чисельно, їх результати аналізуються, щоб забезпечити корисну інформацію для осіб, що приймають рішення [3].

Найбільш широко застосовуються і добре вивчені двохетапні лінійні моделі стохастичного програмування. Тут особа, яка приймає рішення, робить деякий дію на першому етапі, після якого відбувається випадкова подія, надає вплив на результат рішення першого етапу. На другому етапі може тоді бути прийнято коригуючий рішення, яке компенсує будь-які небажані ефекти в результаті рішення першого етапу. Оптимальним рішенням такої моделі є єдине рішення першого етапу і безліч коригувальних рішень (вирішальних правил), що визначають, яка мета повинна бути зроблено на другому етапі у відповідь на кожен випадковий результат [4].

Перспективне планування передбачає прогноз довгострокового характеру, тобто розвиток підприємства в перспективі. Задача перспективного планування є важливою стохастичною задачею. Поточна інформація про стан виробництва може бути при необхідності ціною великих витрат зібрана і оброблена з практично вичерпною повнотою. Що ж стосується прогнозу попиту і інших характеристик поведінки економічної системи в майбутньому, без яких неможливе перспективне планування, то вони в принципі не обходяться без випадкових похибок і завжди пов'язані з певним ризиком. [1].

Здійснимо перспективне планування роботи підприємства з виробництва цукерок. Знайдемо показник якості плану – величину прибутку за планований період. Будемо під показником якості плану розуміти величину прибутку за планований період. Область завдання цільового функціоналу визначається деякою опуклою замкнутою множиною інтенсивності використання заздалегідь відпрацьованих технологічних способів. Безліч допустимих інтенсивностей обумовлено наявними ресурсами сировини і устаткування і попитом на продукцію.

Наше підприємство випускає 4 види товару. Розіб'ємо горизонт планування на 3 місяці.

Дано вектори цін на одиницю продукції, що випускає підприємство в кожному періоді: $q_{k-1}^{+} = \begin{array}{c} q_1^{+}\ q_2^{+} q_3^{+} \\ \begin{matrix} 12 & 14 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \\ 13 & 15 & 17 \\ 14 & 13 & 15 \end{matrix} \end{array}$, також, дано вектори витрат від зберігання одиниці готової продукції в кожному досліджуваному періоді:

$q_{k-1}^{-} = \begin{array}{c} q_1^{-}\ q_2^{-} q_3^{-} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \end{array}$. Задамо технологічні матриці норм випуску і затрат при використанні технологічних способів у кожному періоді (розмірність 4 Х 3):

$$A_1 = \begin{matrix} 5 & 6 & 5 \\ 6 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{matrix}, A_2 = \begin{matrix} 6 & 6 & 5 \\ 7 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{matrix}, A_3 = \begin{matrix} 6 & 6 & 5 \\ 6 & 9 & 6 \\ 5 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \end{matrix}.$$

Дано детерміновані діагональні матриці D_k, розмірності 4 Х 4, діагональні елементи кожної матриці показують, яка частина продукції що знаходиться на складі до початку k-го періоду, залишиться придатною до кінця k-го періоду:

$$D_1 = \begin{matrix} 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}9 \end{matrix}, D_2 = \begin{matrix} 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}9 \end{matrix}, D_3 = \begin{matrix} 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{matrix}.$$

Відомо, що попит на продукцію підприємства випадковий вектор і кожна координата задається з певною ймовірністю: для b_1 перша координата

120	130	200
0,5	0,4	0,1

, друга

150	125	220
0,4	0,3	0,3

, третя

200	230	250
0,3	0,4	0,3

і четверта

210	230	300
0,5	0,3	0,2

. Для b_2 відповідно

150	170	200
0,6	0,3	0,1

160	200	210
0,4	0,3	0,3

,

220	230	300
0,3	0,5	0,2

,

215	180	230
0,5	0,3	0,2

.

Для b_3 відповідно

200	130	200
0,5	0,4	0,1

,

150	160	220
0,4	0,3	0,3

,

200	250	250
0,3	0,4	0,3

,

135	230	300
0,5	0,3	0,2

.

Витрати від використання технологічних способів з одиничними інтенсивностями в кожному періоді, також, задається з певною ймовірністю.

	1 координата			2 координата			3 координата		
с1	1	2	3	2	4	5	3	3	5
	0,1	0,4	0,5	0,5	0,4	0,1	0,2	0,4	0,4
с2	2	3	5	5	4	3	2	3	4
	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,2	0,7	0,1	0,2
с3	2	4	3	3	2	4	3	4	5
	0,6	0,3	0,1	0,4	0,3	0,3	0,3	0,5	0,2

Позначимо y_1^-відомий вектор запасу готової продукції на складі до початку першого планового періоду: y_1^-(120; 130; 125;135).

Необхідно знайти набір векторів X_k, інтенсивності використання технологічних способів в кожному періоді.

Розв'яжемо задачу перспективного планування, як двохетапну модель стохастичного програмування, де на першому етапі потрібно обчислити набір векторів $x_1, \dots, x_N$ і максимізувати математичне сподівання прибутку за увесь плановий період. На другому етапі потрібно обрахувати вектори $Y^+ = y_2^+, \dots, y_{N+1}^+$ і $Y^- = (y_2^-, \dots, y_{N+1}^-)$, де y_k^+ - це невід'ємний 4-х вимірний вектор перевищення попиту над пропозицією в (k-1)-періоді та y_k^- - це невід'ємний 4-х вимірний вектор перевищення пропозиції над попитом.

Розв'яжемо перший етап двохетапної моделі стохастичного програмування. Знайдемо набір векторів $x_1, \dots, x_3$, що задовольняють умови (1.2) - (1.4) і максимізуємо математичне сподівання прибутку (1.1)

Вираз для математичного сподівання за увесь плановий період має вигляд:

$$M\{\ {}_{k=1}^{N}[q_{k+1}^+ b_k - q_{k+1}^+ y_{k+1}^+ - q_{k+1}^- y_{k+1}^- - c_k y_k]\}, \tag{1.1}$$

де

$$y_{k+1}^+ - y_{k+1}^- + D_k y_k^- = b_k - A_k x_k\ ; \tag{1.2}$$

$$y_{k+1}^{+} y_{k+1}^{-} = 0; \qquad (1.3)$$

$$y_{k+1}^{+} \geq 0, y_{k+1}^{-} \geq 0, x_k \geq 0, \text{k} = 1, \dots \text{N}. \qquad (1.4)$$

Для цього необхідно обрахувати вектори b_kта c_k. Знайдемо вектори b_k,- вектори попиту на продукцію підприємства в кожному досліджуваному періоді, як математичне сподівання:

$b_{11} = 120 * 0{,}5 + 130 * 0{,}4 + 200 * 0{,}1 = 132$, $b_{12} = 150 * 0{,}4 + 125 * 0{,}3 + 220 * 0{,}3 = 163{,}5$, $b_{13} = 200 * 0{,}3 + 230 * 0{,}4 + 250 * 0{,}3 = 227$, $b_{14} = 210 * 0{,}5 + 230 * 0{,}3 + 300 * 0{,}2 = 234$, … $b_{34} = 135 * 0{,}5 + 230 * 0{,}3 + 300 * 0{,}2 = 197$.

Отримаємо

b1	132	163,5	227	234
b2	161	187	241	208
b3	172	174	235	197

.

Знайдемо вектори c_k- вектори витрат від використання технологічних способів з одиничними інтенсивностями, як математичне сподівання:

$\text{c}_{11} = 1 * 0{,}1 + 2 * 0{,}4 + 3 * 0{,}5 = 2{,}4$, $\text{c}_{12} = 2 * 0{,}5 + 4 * 0{,}4 + 5 * 0{,}1 = 3{,}1$, $\text{c}_{13} = 3 * 0{,}2 + 3{,}1 * 0{,}4 + 5 * 0{,}5 = 3{,}8$, $\text{c}_{21} = 2 * 0{,}3 + 3 * 0{,}4 + 5 * 0{,}3 = 3{,}3$, $\text{c}_{22} = 5 * 0{,}5 + 4 * 0{,}3 + 3 * 0{,}2 = 4{,}3$, $\text{c}_{32} = 3 * 0{,}4 + 2\text{c}_{33} = 3 * 0{,}3 + 4 * 0{,}5 + 5 * 0{,}2 = 3{,}9$

Отримаємо

c1	2,4	3,1	3,8
c2	3,3	4,3	2,5
c3	2,7	3	3,9

Перший член $Mq_{k+1}^{+} b_k$ у виразі (1.1) не залежить від шуканих параметрів управління. Тому задача перспективного планування може бути переписана як:

$$M \quad {}_{k=1}^{N}[\, q_{k+1}^{+}\, y_{k+1}^{+} + \; q_{k+1}^{-} y_{k+1}^{-} + \; c_k y_k] \; \rightarrow min, \qquad (1.4)$$

$$y_{k+1}^{+} - y_{k+1}^{-} + D_k y_k^{-} = \; b_k - A_k x_k \,; \qquad (1.5)$$

$$y_{k+1}^{+} y_{k+1}^{-} = 0; \qquad (1.6)$$

$$y_{k+1}^{+} \geq 0, y_{k+1}^{-} \geq 0, x_k \geq 0, \text{k} = 1, \dots \text{N}. \qquad (1.7)$$

Знайдемо цільову функцію першого етапу підставивши у формулу (1.4) задані і відшукані, конкретні значення.

$$q_{k+1}^{+}y_{k+1}^{+} + q_{k+1}^{-}y_{k+1}^{-} + c_k y_k = \begin{matrix} 12\ 1412 \\ 13\ 14\ 16 \\ 13\ 15\ 17 \\ 14\ 13\ 15 \end{matrix} * \begin{matrix} 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 2\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 2 \end{matrix} * \begin{matrix} 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{matrix} +$$

$$\begin{matrix} 2{,}4 & 3{,}1 & 3{,}8 \\ 3{,}3 & 4{,}3 & 2{,}5 \\ 2{,}7 & 3 & 3{,}9 \end{matrix} = \begin{matrix} 99{,}9 & 0 & 99{,}2 & 192{,}1 \\ 0 & 0 & 65{,}3 & 65{,}3 \\ 0 & 180{,}7 & 0 & 180{,}7 \end{matrix}$$

. Знайшовши суму за всі періоди і спрямувавши її до мінімуму, отримали F = 445,15. Знайдемо обмеження на першому етапі. Для цього скористаємося формулою (1.5). Спочатку знайдемо ліву частину обмеження: $\begin{matrix} 0{,}9\ 0{,}7\ 0{,}8\ 0{,}8 \\ 0{,}6\ 0{,}8\ 0{,}7\ 0{,}6 \\ 0{,}8\ 0{,}5\ 0{,}8\ 0{,}5 \\ 0{,}7\ 0{,}8\ 0{,}5\ 0{,}9 \end{matrix} *[120 \quad 130\ 125 \quad 135] =$

$$\begin{matrix} 108 & 91 & 100 & 108 \\ 72 & 104 & 88 & 81 \\ 96 & 65 & 100 & 68 \\ 84 & 104 & 63 & 122 \end{matrix};$$

Знайдемо праву частину обмеження: $132\ \ 163{,}5\ 227\ \ 234 - \begin{matrix} 5\ 6\ 5 \\ 6\ 7\ 6 \\ 4\ 4\ 4 \\ 5\ 3\ 4 \end{matrix} *$

$$\begin{matrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{matrix} = \begin{matrix} 108 & 91 & 100 & 108 \\ 72 & 104 & 88 & 81 \\ 96 & 65 & 100 & 68 \\ 84 & 104 & 63 & 122 \end{matrix}$$

. Решта обмежень знаходиться аналогічно.

Розв’яжемо задачу першого етапу перспективного планування за допомогою Excel. Отримаємо:

y2+	0	0	0	0	за 1 період
y3+	0	0	0	0	за 2 період
y4+	0	0	0	0	за 3 період
y2-	0	0	0	0	за 1 період
y3-	0	0	0	0	за 2 період
y4-	0	0	0	0	за 3 період
Прибуток					
за 1 період	за 2 період	за 3 період	сума		
99,9	0,0	99,2	199,1		
0,0	0,0	65,3	65,3	F	
0,0	180,7	0,0	180,7	445,15	
		x1	x2	x3	
	за 1 період	41,6	0,0	26,1	
	за 2 період	0,0	0,0	26,1	
	за 3 період	0,0	60,2	0,0	

Отримали: x1(41,6; 0;0), x2(0; 0; 60,2), x3(26,1; 26,1; 0)

Вектори $Y^{+} = \ y_2^{+}, \ldots, y_{N+1}^{+}$ і $Y^{-} = (y_2^{-}, \ldots, y_{N+1}^{-})$ інтерпретуються як план другого етапу.

Розглянемо задачу лінійного програмування – задачу другого етапу:

$$\sum_{k=1}^{N}[\, q_{k+1}^{+}\, y_{k+1}^{+} + \ q_{k+1}^{-} y_{k+1}^{-}] \ \to min, \tag{1.8}$$

$$y_{k+1}^{+} - y_{k+1}^{-} + D_k y_k^{-} = \ b_k - A_k x_k \ ; \tag{1.9}$$

$$y_{k+1}^{+} \geq 0, y_{k+1}^{-} \geq 0, \mathrm{k} = 1, \ldots \mathrm{N}. \tag{1.10}$$

Тут b_k, A_k фіксовані. Скористаємося x_k-ми з оптимального плану першого етапу.

q_k^{+} і q_k^{-} задовольняють умови

$$\mathrm{q}_{\mathrm{k+1}}^{+} \mathrm{D}_{\mathrm{k}} - \mathrm{q}_{\mathrm{k}}^{+} < \mathrm{q}_{\mathrm{k}}^{-}, \quad \mathrm{k} = 1, \ldots \mathrm{N} \tag{1.11}$$

$$\mathrm{q}_{\mathrm{N+1}}^{+} + \mathrm{q}_{\mathrm{N+1}}^{-} > 0 \tag{1.12}$$

Тоді задача перспективного планування може бути записана у вигляді:

$$\mathrm{M} \ \sum_{k=1}^{N} c_k x_k + M \{ \ \sum_{k=1}^{N}[\, q_{k+1}^{+}\, y_{k+1}^{+} + \ q_{k+1}^{-} y_{k+1}^{-}]\} \to min, \tag{1.13}$$

$$y_{k+1}^{+} - y_{k+1}^{-} + D_k y_k^{-} = \ b_k - A_k x_k \ ; \tag{1.14}$$

$$y_{k+1}^{+} \geq 0, y_{k+1}^{-} \geq 0, \mathrm{k} = 1, \ldots \mathrm{N}. \tag{1.15}$$

$$x_k \in \mathrm{X}_k. \tag{1.16}$$

Розв’яжемо 2 етап двохетапної моделі стохастичного програмування, як задачу лінійного програмування за допомогою Excel. Використавши (1.14) Отримали такі обмеження:

	праве обмеження			
1обмеження	-76,13	-44,63	18,88	25,88
	-117,75	-86,25	-22,75	-15,75
	-34,50	-3,00	60,50	67,50
	-76,13	-44,63	18,88	25,88
2 обмеження	-140,25	-114,25	-60,25	-93,75
	-140,25	-114,25	-60,25	-93,75
	-80,00	-54,00	0,00	-33,50
	-80,00	-54,00	0,00	-33,50
3 обмеження	-141,33	-139,33	-78,33	-116,83
	-219,67	-217,67	-156,67	-195,17
	-63,00	-61,00	0,00	-38,50
	-63,00	-61,00	0,00	-38,50

	ліве обмеження			
1обмеження	-76,1249	22,9999	18,875	12,375
	-112,125	35,9999	6,375	-14,62
	-88,1249	-3,0001	18,875	-28,12
	-100,125	35,9999	-18,625	25,875
2 обмеження	-140,25	-114,25	-60,25	-93,75
	-200,5	-114,25	-60,25	-93,75
	-80	-114,25	-60,25	-93,75
	-140,25	-114,25	-60,25	-93,75
3 обмеження	15,3333	-240,52	-150,64	-116,8
	-219,667	-217,67	-156,67	-135,6
	-63	-263,37	-168,72	-145
	-141,333	-229,09	-168,72	-154,3

Видно, що не всі обмеження рівні між собою.

Представимо розв’язок другого етапу задачі перспективного планування:

y2+	0	0	0	0	за 1 період
y3+	0	0	0	0	за 2 період
y4+	0	1032	0	479	за 3 період
y2-	0	0	0	0	за 1 період
y3-	80	54	0	34	за 2 період
y4-	119	1120	0	531	за 3 період
Прибуток					
за 1 період	за 2 період	за 3 період	сума		
0,0	0,0	0,0	0,0		
80,0	54,0	0,0	134,0	F	
238,0	16604,2	0,0	16842,2	16976,22	
		x1	x2	x3	
	за 1 період	41,6	0,0	26,1	
	за 2 період	0,0	0,0	26,1	
	за 3 період	0,0	60,2	0,0	

Отримали розв'язок задачі перспективного планування. При заданій інтенсивності використання технологічних способів, що була знайдена на першому етапі двохетапної моделі стохастичного програмування - x1(41,6; 0;0), x2(0; 0; 60,2), x3(26,1; 26,1; 0), отримали невід'ємні вектори перевищення попиту над пропозицією за 3 місяці та невід'ємні вектори перевищення пропозиції над попитом за 3 місяці. Отримали відповідно:

y2+	0	0	0	0	за 1 період
y3+	0	0	0	0	за 2 період
y4+	0	1032	0	479	за 3 період

та

y2-	0	0	0	0	за 1 період
y3-	80	54	0	34	за 2 період
y4-	119	1120	0	531	за 3 період

.

Отже, ми отримали шуканий прибуток задачі перспективного планування. Шуканий прибуток становить F = 16976,2.

Висновки.Побудовано і розв'язано конкретну задачу перспективного планування в термінах стохастичного програмування на основі двохетапної моделі стохастичного програмування. Перспективне планування в термінах стохастичного програмування допомагає розв'язати ряд задач, що зменшить ризики у функціонуванні економічної системи чи підприємства, що враховує максимальну кількість економічних чинників, що впливають на функціонування підприємства. Перспективою у подальшому дослідженні є уведення у модель більшої кількості показників, що впливають на результати планування.

Список літератури

1. Наконечний С. І. Математичне програмування: Навч. посіб / С. І. Наконечний, С. С. Савіна — К.: КНЕУ, 2003. — 391 с.

2. Юдін Д.Б. Математичні методи управління в умовах неповної інформації: Підручник / Д.Б. Юдін — М.: «Сов. Радио»,1974. — 401 с.

3. Задача перспективного планування [Електронний ресурс]: стаття – режим доступу: http://www.ngpedia.ru/id24648p1.html.

4. Бурак О.М. Перспективне планування [Електронний ресурс]: стаття/ О.М. Бурак – режим доступу: http://www.ngpedia.ru/id24648p1.html