УДК 522.39

ЙМОВІРНІСНИЙ АНАЛІЗ АСИМЕТРИЧНОГО ВИПАДКОВОГО БЛУКАННЯ З ТРЬОМА СТАНАМИ ПЕРЕХОДУ

Латій Я.С.

Науковий керівник: канд.ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Робота присвячена дослідженню ймовірнісної структури та моделюванню асиметричного випадкового блукання на прямій з трьома станами переходу. Акцент зроблено на дослідженню аналітичних ймовірнісних характеристик елементів відповідного випадкового процесу.

Ключові слова: броунівське блукання, асиметричний випадковий рух, гранична теорема.

QUESTIONAL ANALYSIS OF ASYMMETRIC CASE WITH THREE STATES OF TRANSITION

Latiy Ya.S.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

The paper is devoted to the investigation of the probabilistic structure and simulation of asymmetric random walk in a straight line with three transition states. The emphasis is placed on the study of the analytical probabilistic characteristics of the elements of the corresponding random process.

Keywords: Brownian wandering, asymmetric random motion, boundary theorem.

Відомий фізик-теоретик, один із засновників сучасної теоретичної фізики, лауреат Нобелівської премії з фізики 1921 року ***Альберт Ейнштейн*** в 1905 році написав роботу ***«Про рух завислих у спокійній рідини частинок, необхідному молекулярно-кінетичної теорії»***, яка присвячена броунівському русі і суттєво вплинула на статистичну фізику. Однак незважаючи на це примітно відзначити, що одним з перших критиків прогнозування фінансових ринків математик ***Луї Башельє*** *(Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier)*, в 1900 році представив докторську дисертацію під назвою ***«Теорія спекуляції»*** *(The Theory of Speculation)*, де запропонував модель ціноутворення акцій на

Паризькій біржі, яка ґрунтувалась на симетричному випадковому блуканні. Робота Башельє, заснована на випадковому блуканні, датована раніше знаменитої роботи Ейнштейна по броунівському русі на п'ять років.

Випадкове блукання є математичною моделлю багатьох процесів в математиці, економіці та фізиці і в класичному формулюванні є дискретним випадковим процесом з дискретним часом або випадковою послідовністю, заданою наступним чином:

$$\tau_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n,$$

де $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – послідовність незалежних (в сукупності) випадкових величин, які набувають значень 1 та -1 з ймовірностями p і $q = 1 - p$ відповідно. Якщо, $p = \frac{1}{2}$, то виникає так зване ***симетричне випадкове (броунівське) блукання***, яке відіграє особливу роль в моделях фінансового характеру.

Випадкове блукання є математичною моделлю багатьох процесів в математиці, економіці та фізиці.

Безумовно, класичне випадкове блукання не може бути всеохоплюючою математичною моделлю фізичних явищ і потребує узагальнення і поглиблення. В роботі розглядається цілком логічний перехід від бінарної до тернарної моделі причому основний акцент робиться на випадку, коли на кожному кроці здійснюється випадковий приріст відповідного випадкового члена на величини $-1,0,1$ з ймовірностями відповідно p_0, p_1, p_2. Тернарний броунівський рух може бути простою математичною моделлю функціонування системи, для якої крім наявності можливості кількісних переходів існує можливість «прийняти нейтральну позицію» іншими словами маємо випадкову систему з наявними моментами спокою.

Все вище сказане підкреслює актуальність дослідження ймовірнісних характеристик тернарного випадкового блукання.

Під асиметричним броунівським рухом розуміють випадкову послідовність (дискретний випадковий процес з дискретним часом)

$$\tau_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n,$$

де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – послідовність незалежних (в сукупності) випадкових величин, які набувають значень $1, 0, -1$ з ймовірностями p_0, p_1, p_2

Послідовність τ_n виникає в зв'язку з наступною задачею. Броунівська частинка знаходиться на координатній прямій в точці 0 і може на кожному кроці здійснити стрибок вправо і вліво на 1, або ж залишитись на місці з однаковими ймовірностями. Тоді $p_n(k) = P(\tau_n = k)$ – є ймовірністю того, що після n кроків броунівська частинка матиме координату k.

Знайдемо явну формулу для $p_n(k)$.

Теорема 1. *Виконуються рівності:*

$$p_n(k) = \begin{cases} 0, \text{при } k \notin \{-n, -(n-1), \dots, n-1, n\} \\ (p_2)^n, \text{при } k = n \\ (p_0)^n, \text{при } k = -n \end{cases}$$

Доведення.

Зрозуміло, що броунівська частинка може опинитись після n стрибків в точці з максимальною координатою лише тоді, коли на кожному кроці вона буде здійснювати стрибок вправо на 1. У цьому випадку максимальна координата дорівнює відповідно n. Причому на кожному кроці уверх ймовірність переходу p_0, тому $p_n(k) = (p_2)^n$, при $k = n$.

Аналогічно мінімальна координата дорівнює $-n$ та $p_n(k) = (p_0)^n$, при $k = -n$.

Теорему доведено.

Виведемо рекурентну формулу для $p_n(k)$.

Теорема 12. *Виконується рівність:*

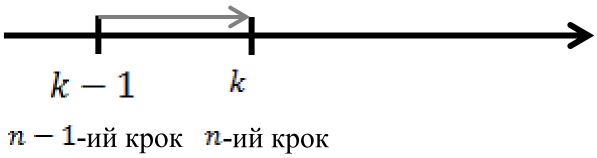
$$p_n(k) = p_0 \cdot p_{n-1}(k-1) + p_1 \cdot p_{n-1}(k) + p_2 \cdot p_n(k+1)$$

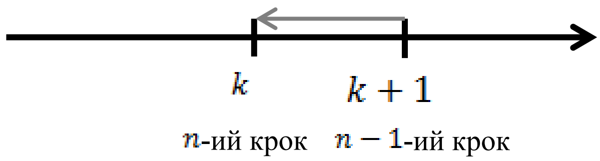
Доведення.

Броунівська частинка після n кроків може опинитись в точці з координатою k лише в 3 випадках:

1. на $n-1$ кроці частинка знаходиться в точці з координатою $k-1$ після чого здійснює стрибок вправо;

2. на $n-1$ кроці частинка знаходиться в точці з координатою $k+1$ після чого здійснює стрибок вліво.





3. залишається на місці.

Звідки випливає потрібне. З точки зору теорії ймовірностей доведення ґрунтується на формулі повної ймовірності та має вигляд:

$$\begin{aligned} p_n(k) = P(\tau_n = k) = P(\tau_{n-1} + \xi_n = k) = \\ = P(\xi_n = 1)\cdot P(\tau_{n-1} = k-1) + P(\xi_n = 0)\cdot P(\tau_{n-1} = k) \\ + P(\xi_n = -1)\cdot P(\tau_{n-1} = k+1) \\ = p_0 \cdot p_{n-1}(k-1) + p_1 \cdot p_{n-1}(k) + p_2 \cdot p_n(k+1). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Вище доведені теореми дозволяє знаходити ймовірнісні характеристики положення броунівської частинки для доволі невеликих n i k.

Зрозуміло, що для великих n i k, вище вказані формули є малоефективні в практичному розумінні. Однак зрозуміло, що за рахунок симетрії, при $p_0 = p_2$ виконується рівність :

$$p_n(k) = p_n(-k),$$

тому в подальшому (при $p_0 = p_2$) для простоти обмежимось випадком $k \in \{0, \dots, n\}$.

Теорема 2. *Виконується рівність*

$$p_n(k) = \sum_{0 \le c \le n-k,\, c \equiv n+k \ (mod\ 2)} C_{n-c}^{\frac{n+k-c}{2}} \cdot (p_2)^{\frac{n+k-c}{2}} \cdot (p_0)^{\frac{n-k-c}{2}};$$

Доведення.

Нехай після n стрибків броунівська частинка опинилась в точці з координатою k, при цьому було здійснено a і b стрибків вправо і вліво відповідно і c стоянок на місці. Маємо:

$$\begin{cases} a - b = k \\ a + b + c = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{n + k - c}{2} \\ b = \dfrac{n - k - c}{2} \end{cases}$$

Для підрахунку кількості всіх можливих марштрутів при заданому c потрібно використати перестановки з повтореннями, тобто при заданому c ми однозначно визначаємо a і b, після чого потрібно зазначити, що кількість все можливих наборів з a одиничок, b мінус одиничок і c нулів дорівнює:

$$\frac{(a + b + c)!}{a!\, b!\, c!}.$$

Безумовно ймовірність здійснення фіксованого набору $(a; b; c)$ стрибків дорівнює $(p_2)^c \cdot (p_0)^a$, звідки отримаємо потрібне.

Теорему доведено.

Безумовно актуальним є питання про найімовірніше положення броунівської частинки.

Незважаючи на те, що ми говоримо про найімовірніше положення броунівської частинки, відповідно ймовірність достатньо мала, тому логічно говорити ***про діапазон***, в який потрапить броунівська частинка з деякою ймовірністю (наприклад 95%).

Спочатку розглянемо випадок фіксованого діапазону і дослідимо відповідну асимптотику попадання броунівської частинки в нього відповідно.

Для цього скористаємось класичною центральною граничною теоремою у формулі Ляпунова.

Нехай $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, тоді S_n представляє положення броунівської частини на n кроці . За центральною граничною теоремою Ляпунова[4]

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}} \in [a; b]\right) = G(b) - G(a);$$

Оскільки в нашому випадку:

$$M_{\xi_1} = p_0 \cdot (-1) + p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 1 = p_2 - p_0;$$

$$\sigma_{\xi_1} = \sqrt{D_{\xi_1}} = \sqrt{p_0 \cdot (-1)^2 + p_1 \cdot 0^2 + p_2 \cdot 1^2 - M_{\xi_1}^2} = \sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}$$

маємо:

$$P(\frac{S_n - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}} \in [a;b]) \approx G(b) - G(a)$$

Отже,

$$P\left(\frac{S_n - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}} \in [a;b]\right) =$$

$$P(S_n \in \left[n(p_2 - p_0) + \sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}a; n(p_2 - p_0) + \sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}b\right])$$

І якщо, ми розглядаємо ***деякий фіксований діапазон*** $[\boldsymbol{c}; \boldsymbol{d}]$, в який попадає броунівська частинка, то

$$n(p_2 - p_0) + \sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}a = c;$$

$$n(p_2 - p_0) + \sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}b = d.$$

Звідки отримуємо, що

$$a = \frac{c - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}};$$

$$b = \frac{d - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}};$$

Враховуючи теорему Лагранжа маємо, що існує

$$t \in \left[\frac{c - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}}; \frac{d - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}}\right],$$

Для якого

$$P(S_n \in [c;d]) \approx G(\frac{d - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}}) - G\left(\frac{c - n(p_2 - p_0)}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}}\right)$$
$$= \frac{dG}{dx}\Big|_{x=t\in[a;b]}\left(\frac{d - c}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}}\right)$$
$$\sim \frac{d - c}{\sqrt{p_0 + p_2 - (p_2 - p_0)^2}\sqrt{n}},$$

адже

$$t \in [a;b] \to -sign(p_2 - p_0) \cdot \infty \quad (n \to +\infty) \implies$$

$$\frac{dG}{dx}\Big|_{x=t\in[a;b]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sim O(e^{-n}).$$

Отже, при $p_2 \neq p_0$ маємо наступну асимптотику:

$$P(S_n \in [c;d]) \sim O(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}).$$

Безумовно, є бажання сказати, ймовірність попадання броунівської частинки у діапазон асимтотично прямує до 0, з порядком $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, але потрібно більш детально проаналізувати похибку при наближеному переході по теоремі Ляпунова.

Використовуючи нерівність Беррі-Ессеєна, можна встановити наступні асимпотитики:

$$P(S_n \in [c;d]) \sim \begin{cases} O\left(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\right), p_2 \neq p_0\,; \\ O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), p_2 = p_0. \end{cases}$$

Список літератури

1. *Говорухин В. Н., Цибулин В. Г., Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс.- Спб.: Питер, 2001.*
2. *Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: Наука, 1988. – 448 с.*
3. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк., 1988. – 439 с.*
4. *Дж.Дэбни, Т.Харман Simulink 4. Секреты мастерства. Издательство: Бином. Лаборатория знаний, 2003 г. Твердый переплет, 404 стр. ISBN 5-94774-048-6, 0-13-1-017085-2. Тираж: 3000 экз. Формат: 70x100/16.*
5. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. — Ч. І. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2000. — 304 с.*
6. *Молчанов О.О, Моделювання та проектування складних систем. – К. Вища школа, 1988. – 359 с.*
7. *Кендел М., Часові ряди /Пер. с англ. та передмова Ю.П. Лукашина, М. «Фінанси і статистика», 1981. – 199 с.*
8. *Клейнрок Л. Теорія масового обслуговування /Пер. с англ. І.І. Глушко. – М.: Машинобудування, 1979. – 432 с.*

9. *Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. — М.: Энергия, 1980,— 424 с.*
10. *Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс. М.: Наука,1979. − 184 с .*
11. *Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. –120 с.*