УДК 511.7(09)

ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ ВІД ПОЧАТКУ XVII СТОЛІТТЯ

Харченко Діана

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, Professor Rizhniak R.Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

В статті розглянуто історію розвитку чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем від початку XVII століття до початку XX століття. Акцент зроблено на внесках відомих математиків у розвиток чисельних методів та наближених обчислень. Стаття буде корисна викладачам та студентам, які цікавляться історією математики, прикладною математикою, та вчителям які ведуть гуртки з математики та інформатики.

Ключові слова: *диференціальне рівняння, система рівнянь, наближення, корінь рівняння, функція, неперервність, уточнення.*

History of development of numerical methods for solving differential equations and their systems from the beginning of the XVII century

Kharchenko Diana

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, Professor Rizhniak R.Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article deals with the history of the development of numerical methods for solving differential equations and their systems from the beginning of the XVII century to the beginning of the XX century. The emphasis is made on the contributions of well-known mathematicians to the development of numerical methods and approximate calculations. The article will be useful for teachers and students who are interested in the history of mathematics, applied mathematics, and teachers who lead math and computer science groups.

Keywords: *differential equation, system of equations, approximation, root of equation, function, continuity, refinement.*

Постановка проблеми. Переважна кількість практично важливих задач зводиться до складання диференціальних рівнянь, або систем диференціальних рівнянь. Проте не завжди при розв'язанні отриманих рівнянь, або систем можна отримати точну відповідь. Тому ряд математиків цікавила проблема знаходження наближеного розв'язку задачі. Розділ математики, який цим займається називають або прикладною математикою, або обчислювальною фізикою. Сьогодні розділ математики, який вивчає методи наближених обчислень називається обчислювальною математикою.

Аналіз досліджень і публікацій теоретичним підґрунтям дослідження історії розвитку чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем стали наступні публікації: Калиткин Н.Н. у своїй книзі «Чисельні методи» розглядав історію розвитку прикладної математики та роль в ній чисельних методів [1, 16]. Семеріков С.О. у своїй статті виділив етапи розвитку наближених методів та історію створення курсу «чисельні методи» як окремої дисципліни у ВНЗ [2, 189]. Юшкевич А.П. окремо розглядав історію математики у XVII і XVIII століттях [3, 32]. Русанов В.В. та Росляков Г.С. також розглядали історію наближених обчислень [5, 112]. Шаповаленко В.А. у посібнику «Чисельні методи та моделювання на ЕОМ» в окремому пункті розглянув історію розвинення та класифікацію чисельних методів. Також він згадав про роль у ньому чисельних методів під час відкриття планети Нептун [6, 9]. Панкратьєв В.О. та Шукайло Є.М. навели ряд чисельних методів, їх основну суть та приклади їх застосування [7, 59]. У нашій роботі використаний аналіз доступних джерел: навчальні ресурси мережі Internet та наукова література з математики, а також методологія історичного дослідження [8].

Метою роботи є дослідження історії розвитку найвідоміших чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь.

У своєму розвитку чисельні методи пройшли такі три основні етапи:

I. До початку XX ст. — етап накопичення досвіду наближених обчислень.

II. Перша половина XX ст. — безмашинний (докомп'ютерний) етап.

III. Друга половина XX ст. — машинний (комп'ютерний) етап.

На першому етапі відбувалося формування основних навичок практичних вимірювань та обчислень, які призвели до виникнення та розвитку математики як науки. У статті ми розглянемо історію розвитку чисельних методів на першому етапі.

1 Леонард Ейлер та його внесок у чисельне інтегрування диференціальних рівнянь. Окрім алгебраїчних рівнянь математиків також цікавили способи знаходження наближеного розв'язку диференціального рівняння. Перший алгоритм чисельного розв'язання диференціального рівняння запропонував Л. Ейлер у першому томі «Інтегрального числення» (1767). Ним була поставлена задача обчислити розв'язок рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad (1.1)$$

якщо відомо значення $y = y_0$ при $x = x_0$. Це була перша постановка задачі з початковими даними. Метод, запропонований Ейлером, прийнято називати методом ламаних або методом Ейлера. Він полягає в тому, що в близькій до x_0 точці $x = x_1$ вважають $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, $h = x_1 - x_0$. (1.2)

Аналогічно обчислюючи $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ і т. д. формула (1.2) отримана утриманням перших двох членів ряду Тейлора для $y(x)$ і має локальну похибку $O(h^2)$. Ламаній Ейлера можна наблизити інтегральну криву, що проходить через точку (x_0, y_0), якщо крива існує і єдина [1, 71].

В другому томі «Інтегрального числення» (1769) Ейлер поширює свій метод ламаних на рівняння другого порядку, які записуються у вигляді системи двох рівнянь першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = V(x, y, p).$$

При цьому він вказує на зміну постановки задачі з початковими умовами: окрім вимоги $y(a) = b$ ще має бути поставлена умова $p|_{x=a} = c$. Викладення фактично містить схему застосування методу ламаних до довільної системи виду:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \quad [2, с. 191].$$

Математична теорія задачі була створена значно пізніше появи робіт Ейлера. Французький математик Огюстен Коши (1789-1857) показав, що якщо $f(x, y)$ неперервана по x_0 та y_0 і задовольняє умові Ліпшиця по y, то розв'язок рівняння існує і єдине. Інше доведення існування розв'язку задачі (але не єдиності) при виконанні лише умови неперервності $f(x,y)$ по обом змінним дав італійський учений Джузеппе Пеано (1858-1932). При цьому і Коші і Пеано при доведенні використовували ламані Ейлера [3, 82].

2. Карл Рунге та його внесок у чисельне інтегрування диференціальних рівнянь. Другий підхід до побудови наближеного розв'язку диференціального рівняння (1. 1) дав німецький учений (математик, фізик і спектроскопіст) Карл Рунге (1856-1927). Навчався в Берлінському університеті у Карла Веєрштраса, 1880 року отримав ступінь доктора філософії з математики, з 1886 року був професором математики в Ганноверському університеті. 1904 року за ініціативою Фелікса Клейна був запрошений до Геттінгенського університету Георга-Августа й очолив знов відкриту кафедру прикладної математики. Вважається історично першим німецьким математиком з цієї дисципліни.

У Геттінгені, спільно з Мартіном Кутта, розробив методи чисельного інтегрування систем звичайних диференційних рівнянь — метод Рунге-Кутти. Ідея методу полягає в наступному. Значення y_1 в точці x_1 представляється у вигляді ряду Тейлора по степеням h, тобто

$$\Delta y = y_1 - y_0 = hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}y_0''' + \cdots \qquad (2.1)$$

З іншої сторони приріст розв'язання виражається так:

$$\Delta y = \left(\sum_{i=1}^{r} p_i k_i(h)\right), \qquad (2.2)$$

де $p_i = const, p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$,

$$k_1 = hf(x_0, y_0),$$

$$k_2 = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21}k_1),$$

$$k_3 = hf(x_0 + \alpha_3 h, y_0 + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$k_r = hf(x_0 + \alpha_r h, y_0 + \beta_{r1}k_1 + \beta_{r2}k_2 + \cdots + \beta_{r,r-1}k_{r-1}).$$

Коефіцієнти $p_1, \ldots, p_r, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_{n,m}, n = 2, \ldots, r, m = 1, \ldots, r-1$, вибираються так, щоб розклад (2.2) співпадав з (2.1)до більш високих степенів h.

Очевидно, при $r = 1$ це метод Ейлера (2.1). При $r = 2$ метод зводиться до методу хорд.

Найбільш використовувана формула Рунге-Кутта при $r = 4$. Вона має вигляд (для точки $x_1 = x_0 + h$):

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) + O\left(h^5\right),$$

де

$$k_1 = hf_0, \qquad k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right), \qquad k_4 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right)$$

Формула Рунге-Кутта при $r \le 4$мають похибку $O\left(h^{r+1}\right)$. Проте при $r \ge 5$ не можна отримати локальну похибку $O\left(h^s\right), s \ge r + 1,$ тому формули Рунге-Кутта при $r > 4$ не використовуються [5, с. 138].

3. Джон Куч Адамс. Другий клас формул чисельного інтегрування рівняння (1.1) був отриманий раніше, у 1845 році, англійським математиком і астрономом Джоном Адамсом (1819-1892). Ідея методу полягаю в наступному. Розглянемо сітку рівновіддалених вузлів $x_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots$ і запропонуємо, що розв'язання відомо в m вузлах $x_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_{n-1}$. Для обчислення y_n рівняння (1.1) запишемо у вигляді

$$y_n = y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f\left(x, y(x)\right) dx \qquad (3.1)$$

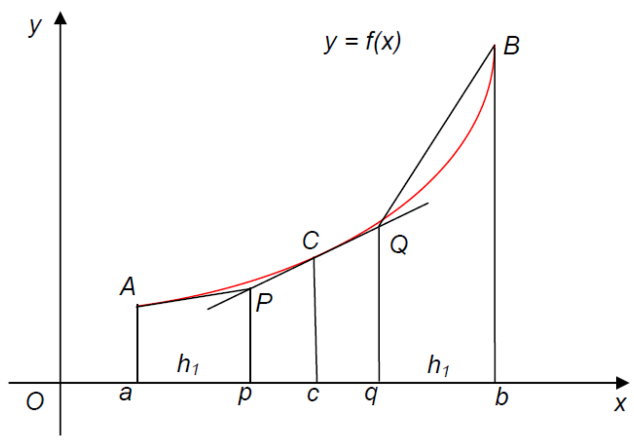
Щоб обчислити інтеграл для функції $f(x, y)$, запишемо інтерполяційний поліном Ньютона по вузлам $x_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_{n-1}$ і використовуємо його на $[x_{n-1}, x_n]$ замість $f(x, y)$. Виконавши інтерполяцію в (3.1), отримуємо $y_n = y_{n-1} + h\left(a_{n-1}f_{n-1} + a_{n-2}f_{n-2} + \dots + a_{n-m}f_{n-m}\right)$,
де $f_i = f(x_i, y_i)$. Найбільш використовувана ця формула при $m = 4$. Вона має вигляд $y_n = y_{n-1} + \frac{h}{24}\left(55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4}\right)$. (3.2.)

Формули такого типу отримали назву екстраполяційних формул Адамса [5, с. 138]. Його найбільш відомим досягненням було відкриття планети Нептун (згідно фразі Д. Араго, що стала крилатою – «планета, відкрита на кінчику пера»). Розрахунки були проведені для пояснення відхилень в орбіті Урана від законів Кеплера і Ньютона. У своїх розрахунках Адамс використовував тільки математику і чисельні методи. Незалежно від нього такі ж розрахунки виконав Урбен Левер'є. У 1846 році Йоганн Галле за вказівками, отриманими від Левер'є, виявив Нептун [6, с. 9].

4. Томас Сімпсон та його внесок у чисельне інтегрування диференціальних рівнянь. Також проблему наближеного розв’язку диференціального рівняння досліджував англійський математик Томас Сімпсон. Його батько був ткачем і син мав успадкувати професію батька, проте після того як він став свідком сонячного затемнення у 1724 році, Сімпсон вирішив пов’язати своє життя з математикою. У 1743 році вийшла його праця «Mathematical Dissertationson a variety of physical and analytical subjects», в якій у трактаті «Of the areas of curves etc. By approximation» була виведена формула наближеного обчислювання визначених інтегралів, відома як метод Сімпсона.

Метод парабол (метод Сімпсона) дає значне підвищення точності наближених формул чисельного інтегрування. Ідея методу виходить з того, що на частковому проміжку дуга параболи в загальному випадку «тісніше» прилягає до кривої $y = f(x)$, ніж хорда, яка з’єднує кінці дуги цієї кривої (метод трапецій). Тому значення площин відповідних елементарних трапецій, які обмежені зверху дугами парабол, є ближчими до значень площин відповідних часткових криволінійних трапецій, обмежених зверху дугою кривої $y = f(x)$, ніж значення площин відповідних прямолінійних трапецій.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Будемо вважати, що на відрізку $[a, b]$ вона додатна и неперервна. Знайдемо площу криволінійної трапеції $aABb$ (Мал. 4.1).



Мал. 4.1. Геометрична інтерпретація методу Сімпсона

Відрізок $[a, b]$, на якому розглядається дана функція ділиться точкою $c = \frac{a+b}{2}$ навпіл і в точці $C(c, f(c))$ проводиться дотична до лінії $y = f(x)$. Після цього відрізок $[a, b]$ ділиться точками pі qна три рівні частини і через них проводяться прямі $x = p$і $x = q$.Pі Q– точки перетину цих прямих з дотичною. Після з'єднання точок Aз Pі B з Q, то отримуються три прямолінійні трапеції $aAPp, pPQq, qQBb$. Тоді площу трапеції $aABb$ можна приблизно обчислити за формулою:

$$I \approx \frac{aA + pP}{2} h_1 + \frac{pP + qQ}{2} h_1 + \frac{qQ + bB}{2} h_1, \qquad \text{де } h_1 = \frac{b-a}{3}$$

Ця формула має назву «мала» формула Сімпсона.

$$I \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f(c) + f(b) \right).$$

У цьому випадку дуга ACB замінюється параболою, яка проходить через точки A, P, Q, B. «Мала» формула Сімпсона дає інтеграл с достатньою точністю, коли графік функції мало «зігнутий», в іншому випадку, коли функція більш складна, необхідно поділити відрізок $[a, b]$ на n частин и до кожної з них використати «малу» формулу Сімпсона. Обов'язковою вимогою є та, що n повинно бути парним.

Тоді отримуємо так звану «велику» формулу Сімпсона, яка має вигляд:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}))$$
$$+ 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})) + f(x_n)]$$

Загальний вигляд формули:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(Y_{\text{кр}} + 4Y_{\text{непар}} + 2Y_{\text{пар}}),$$

Де $Y_{\text{кр}} = y_0 + y_{\text{п}}, Y_{\text{непар}} = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}, Y_{\text{пар}} = y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}$,

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Ці методи також поширюються і на системи рівнянь [7, 59].

Висновки. У статті було розглянуто етапи розвитку чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем. Зокрема особистий внесок у розвиток чисельних методів здійснили відомі математики: Леонард Ейлер, Карл Рунге, Мартін Кутт, Джон Куч Адамс, Томас Сімпсон.

Найбільш стрімко чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь та чисельного інтегрування розвивалися на першому етапі, у період від XVIII-XIX століття.

У статті були згадані історичні праці з математики, в яких був викладений основний зміст розглянутих чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь та роль цих методів у науці.

Робота може бути корисною для студентів фізико-математичних спеціальностей, для викладачів математичних гуртків загальноосвітніх навчальних закладів, та для тих хто цікавиться історією математики.

Список літератури

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. Москва, Наука, 1978, 512 с.

2. Семеріков С.О. Еволюція та сучасний стан курсу чисельних методів у вищій школі // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету: Серія педагогічна. – Випуск 8: Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей. Кам'янець-Подільський державний педагогічний університет. Інформаційно-видавничий відділ. 2002. С. 189–193.

3. Юшкевич А.П. Математика XVII столетия. Москва, Наука, 1970, 303 с.

4. Юшкевич А.П. Математика XVIII столетия. Москва, Наука, 1972, 498 с.

5. Русанов В.В.История и методология прикладной математики. Москва, 2004, 123 с.

6. Шаповаленко В.А. Чисельні методи та моделювання на ЕОМ (навчальний посібник). Одеса, ВЦ ОАНЗ, 2010, частина 1, 88 с.

7. Панкратьєв В.О. Чисельні методи в інформатиці. Київ, Видавничий центр НУБіП України, 2011, 79 с.

8. Ріжняк Р.Я. Розвиток інформатики та інформаційних технологій у вищих навчальних закладах України у другій половині XX – на початку XXI століття. Кіровоград, Видавництво «Код», 2014, 436 с.