УДК 511.7(09)

ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ НАБЛИЖЕНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ВІД ПОЧАТКУ XVII СТОЛІТТЯ

Харченко Діана

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Ренат Ярославович

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті розглянуто історію розвитку чисельних методів розв'язування рівнянь та їх систем від початку XVII століття до початку XX століття. Акцент зроблено на внесках відомих математиків у розвиток чисельних методів та наближених обчислень. Стаття буде корисна викладачам та студентам, які цікавляться історією математики, прикладною математикою, та вчителям які ведуть гуртки з математики та інформатики.

Ключові слова: *рівняння, система рівнянь, наближення, корінь рівняння, функція, неперервність, уточнення.*

History of the development of approximate mathematical calculations from the beginning of the XVII century

Kharchenko Diana

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, Professor Rizhniak R.Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article deals with the history of the development of numerical methods for solving equations and their systems from the beginning of the XVII century to the beginning of the XX century. The emphasis is made on the contributions of well-known mathematicians to the development of numerical methods and approximate calculations. The article will be useful for teachers and students who are interested in the history of mathematics, applied mathematics, and teachers who lead math and computer science groups.

Keywords: *equation, system of equations, approximation, root of equation, function, continuity, refinement.*

Постановка проблеми. Переважна кількість практично важливих задач зводиться до складання рівнянь, або систем рівнянь. Проте не завжди при розв'язанні отриманих рівнянь, або систем можна отримати точну відповідь. Тому ряд математиків цікавила проблема знаходження наближеного розв'язку задачі. Розділ математики, який цим займається називають або прикладною математикою, або обчислювальною фізикою. Сьогодні розділ математики, який вивчає методи наближених обчислень називається обчислювальною математикою. Хоч дана тема і не вивчається у шкільному курсі математики, проте вона могла б зацікавити вчителів, що керують шкільними гуртками з математики та гуртками з інформатики.

Аналіз досліджень і публікацій теоретичним підґрунтям дослідження історії розвитку чисельних методів розв'язання рівнянь та їх систем стали наступні публікації: Калиткин Н.Н. у своїй книзі «Чисельні методи» розглядав історію розвитку прикладної математики та роль в ній чисельних методів [1, 16]. Семеріков С.О. у своїй статті виділив етапи розвитку наближених методів та історію створення курсу «чисельні методи» як окремої дисципліни у ВНЗ [2, 189]. Юшкевич А. П. окремо розглядав історію математики у XVII і XVIII століттях [3, 32]. Русанов В.В. та Росляков Г.С. також розглядали історію наближених обчислень, зокрема таких математиків як Ньютон, Ейлер, Рунге та інші [5, 89]. У нашій роботі використаний аналіз доступних джерел: навчальні ресурси мережі Internet та наукова література з математики, а також методологія історичного дослідження [6].

Метою роботи є дослідження історії розвитку найвідоміших чисельних методів.

У своєму розвитку чисельні методи пройшли такі три основні етапи:

I. До початку XX ст. — етап накопичення досвіду наближених обчислень.

II. Перша половина XX ст. — безмашинний (докомп'ютерний) етап.

III. Друга половина XX ст. — машинний (комп'ютерний) етап.

На першому етапі відбувалося формування основних навичок практичних вимірювань та обчислень, які призвели до виникнення та розвитку математики як науки. У статті ми розглянемо історію розвитку чисельних методів на першому етапі.

1. Внесок Ісака Ньютона у розвиток методу дотичних. Велику роль в розвитку чисельних методів відіграв Ньютон. Свій метод, який в наш час відомий як метод Ньютона, або його ще часто називають метод Ньютона-

Рафсона, він вперше детально виклав в «Аналізі за допомогою рівнянь з нескінченим числом членів» (analysi per aequationes numero terminorum infinitas), який був написаний не пізніше 1669 року і в тому ж році прочитаний в рукописі декількома англійськими математиками. Але опублікували його більше ніж 40 років по тому (Лондон 1711р.). про цей же метод Ньютон повідомив 13 червня 1676 року в листі, пересланому через секретаря Королівського товариства Ольденбурга. У друкованому вигляді метод був оприлюднений в 94-й главі «Алгебри» Валліса (1685 р).

У листі до Лейбніца Ньютон підкреслює переваги свого методу у порівнянні із схожим, але більш громіздким прийомом Вієта. Основна ідея полягає в тому, що малий корінь нелінійного рівняння $\varphi(z) = 0$ можна приблизно знайти із лінійного рівняння, яке отримується шляхом відкидання із даного рівняння всіх членів, починаючи з другого степеня. Тоді, якщо для кореня якого-небудь даного рівняння $f(x) = 0$ відоме наближення x_0 , так, що $x = x_0 + p$, де p – мале число, то рівняння $f\ x\ = f\ x_0 + p\ = f_1\ p\ = 0$ замінюється рівнянням $f_1\ p\ = 0$ з малим коренем p іp_0, наближене значення p знаходиться за допомогою лінеаризації рівняння $f_1\ p\ = 0$. Після цього покладається $p = p_0 + q$ і наближене значення q_0 для q відшукується шляхом лінеаризації рівняння $f_1\ p_0 + q\ = f_2\ q\ = 0$ тощо. Так виникає ланцюг рівнянь $f_1\ p\ , f_2\ q\ , f_3\ r\ , \ldots$, а послідовні поправки $p_0, q_0, r_0, \ldots$ обчислюються кожен раз із відповідних лінійних рівнянь.Допоміжних рівнянях$f_{k-1} = 0$ буває можливо, із дотриманням обережності, відкидати для простоти деякі старші члени і до перетворення в $f_k = 0$ [3, 49].

2. Внесок Джозефа Рафсона у розвиток методу дотичних. Послідовник Ньютона, член Королівського товариства Джозеф Рафсон (1648-1717) надав методу трохи інший вигляд, обчислюючи послідовні наближення кореня $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ використовуючи одну й ту саму формулу і обходячись без послідовних рівнянь $f_2 = 0, f_3 = 0, \ldots$ для обчислення поправок. Саме отримавши шляхом лінеаризації для рівняння

$$f(x) = f(x_0 + p) = f(x_0) + f'(x_0) * p + \frac{f''(x_0)}{2} * p^2 + \cdots = 0$$

першу поправку

$$p_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

Рафсона слідом потім використовує наближене значення кореня

$$f(x_1 + q) = 0,$$

Що дозволяє аналогічно знайти

$$q_0 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \text{ і } x_2 = x_1 - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Взагалі наближення обчислюється за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Тут функція $f'(x)$, що стоїть у знаменнику поправки, є похідною функції $f(x)$. Рафсон виклав свою модифікацію прийому в «Загальному аналізі рівнянь» (Analysis pe raequationes universalis, Londini, 1690). Саме в такій формі метод застосовується і до сьогодні, при чому не тільки до алгебраїчних, але і для трансцендентних рівнянь. В модифікації Рафсона метод має простіший алгоритм, ніж метод Ньютона. Саме завдяки цій його роботі Едмунд Галілей порекомендував Джозефа Рафсона у Лондонське королівське товариство (англ. The Royal Society of London forthe Improvement of Natural Knowledge 1660) – провідне наукове товариство Великої Британії, одне з найстаріших у світі. Ні Ньютон, ні Рафсон не провели досліджень умов застосування методу [3, 49].

Також математиками розроблялися прийоми прискорення збіжності ітерацій. Наприклад, у 1838 році П.Л. Чебишевим для визначення кореня рівняння $f(x) = 0$. Він був заснований на представленні функції оберненої до $f(x)$ за допомогою формули Тейлора. Метод Чебишева другого порядку є методом Ньютона. Метод Чебишева третього порядку записується формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n) f^2(x_n)}{2f'^3(x_n)}$$

Ще один метод прискорення збіжності запропонував А.С. Ейткен у 1937 році. Метод Ейткена полягає у обчисленні уточненого наближення за формулою

$$x_{n+3} \approx x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

3. Філіп Людвіг фон Зейдель. Один з ітераційних методів розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь запропонував німецький математик і астроном Філіп Людвіг фон Зейдель. Він народився у 1821 році в сім'ї працівника поштового відомства. У 1840–1842 роках він навчався в Берлінському університеті, 1842–1843 роках у Кенігсберзькому та Мюнхенському університеті, де в 1846 році отримав докторський ступінь, захистивши дисертацію «Über die beste Form der Spiegelin Teleskopen» («Про кращій формі дзеркал в телескопах»). У тому ж році він отримав наукове звання доцента. У 1855 році його призначили професором Мюнхенського університету. Серед його студентів був Макс Планк.

У 1874 році він опублікував роботу, в якій запропонував ітераційний метод розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, нині відомий як метод Зейделя (інша назва метод Гаусса-Зейделя). За цим методом обчислення виконують у такому порядку:

1) задаються нульові наближення, потім із першого рівняння обчислюється перше невідоме і це значення першого невідомого підставляється в друге рівняння;

2) обчислюється друге невідоме, його значення разом з першим підставляється в третє рівняння;

3) обчислюється третє невідоме.

Далі виконується ітерація.

4. Даніель Бернуллі. Чисельний метод розв'язання алгебраїчних рівнянь, запропонований Д. Бернуллі, полягає в тому, що рівняння спочатку зводиться до вигляду

$$1 = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots + px^n.$$

Далі беруться v довільних чисел $A_1, A_2, \dots, A_n,$ за допомогою яких для $n = v + 1, n = v + 2, \dots$ послідовно знаходяться числа

$$A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2} + \cdots mA_{n-v+1} + pA_{n-v}$$

Тоді при достатньо великому n відношення A_{n-1}/A_n наближено рівне кореню рівняння, найближчому нулю. Для простоти можна взяти $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 1.$ Застосування цього ж процесу до рівняння, записаного у вигляді

$$x^0 = ax^{y-1} + bx^{y-2} + \cdots + mx + p,$$

дає наближене значення кореня рівняння, найбільш віддаленого від нуля. Відношення A_{n-1}/A_n не завжди прямує до певної межі при $n \to \infty$, тому метод можна застосовувати не завжди, наприклад при наявності двох дійсних коренів $x_1 = -x_2.$ В останньому випадку, втім, можна попередньо зробити заміну $x = y + \alpha.$ У записках Петербурзької академії за 1730–1731 рр. (які були опубліковані у 1738 році) Д. Бернуллі запропонував свій метод і до відшукання нулів функції, заданих «нескінченно триваючими рівняннями», тобто степеневими рядами.

Метод Бернуллі був запропонований ним без доведень; дослідженню цього метода присвячена 17–та глава першого тому «Введення в аналіз нескінчених» Ейлера, де з’ясовуються і умови застосування методу при наявності двох дійсних коренів, що відрізняються між собою тільки знаком, тих чи інших кратних дійсних коренів, деяких уявних коренів тощо. Метод Бернуллі має більше теоретичний інтерес, ніж практичне значення [4, с. 81].

5. Інші чисельні методи, відокремлення коренів. Ейлер у «Диференціальному численні» (1755) запропонував спосіб визначення границь коренів алгебраїчних рівнянь, які по суті призводять до методу Ролля, але який поширюється і на уявні корені. В основі цього методу лежить використання розташування максимумів і мінімумів парабол n-го порядку (для $n = 3$ і $n = 4$ цей метод був запропонований в 1741 році Дж. Стірлінгом і Ж.П. Гюа де Мальвом). Встановленням границь коренів алгебраїчних рівнянь займався також англійський математик другої половини XVIII століття Едвард Варінг (1734–1798), який блискуче закінчив Кембриджський університет у 1757 р. і вже у 1760 р. отримав у ньмуЛюкасовську кафедру, яку в свій час займали Барроу і потім Ньютон. У 1767 р. його обрали членом Лондонського королівського товариства.

В «Аналітичних етюдах» (1762) Варінг запропонував ідею наближеного методу, в деякому сенсі висхідну до «Загальної арифметики» (1707) Ньютона, де викладено прийом обчислення найбільшого за абсолютною величиною кореня рівняння з дійсними коренями як границі послідовності $\sqrt[2n]{S_{2n}}$ при $n \to \infty$. Прийом Варінга, правда лише намічений, полягає в наступному. Для даного рівняння $x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$ з дійсними різними коренями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, розташованими у порядку спадання їх абсолютних величин, будується рівняння $y^m + A_1y^{m-1} + \cdots + A_m = 0$ з коренями $\beta_1 = \alpha_1^k, \beta_2 = \alpha_2^k, \dots, \beta_m = \alpha_m^k$. При достатньо великому парному k кожне з чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ вельми велике при порівнянні зі всіма, слідуючими за ним, так що рівність $\beta_1 + \beta_2 + \cdots \beta_m = -A_1$. Аналогічно знаходяться $\beta_2, \beta_3, \dots$ за допомогою інших елементарних симетричних функцій. Ця ідея згодом була успішно розроблена бельгійцем Ж. П. Данделеном у 1826 р. та К.Г. Греффе у 1837 р., незалежно один від одного.; всі вони брали $k = 2^n$. Метод, який іноді називають іменем Греффе, застосовний до обчислення всіх комплексних коренів без попереднього відокремлення [4, с. 83].

Ще один метод К.Г. Греффе розробив разом з Лобачевським, який називається методом Лобачевського-Греффе. Ідею методу та короткий виклад був даний у 1834 році Лобачевським. Удосконалив його і більш детально описав швейцарський математик Греффе у 1837 році. Детальна розробка була дана німецьким астрономом Йоганом Енке у 1841 році. Детальне викладення методу Лобачевського-Греффе з численними прикладами, коментарями і уточненнями в першій фундаментальній праці з обчислювальної математики академіка А.Н. Крилова «Лекції про наближені обчислення», опублікованій у 1911 році і не одноразово перевиданій.

Ідея методу полягає у наступному. Нехай для рівняння

$$P_n(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (1)$$

З дійсними коефіцієнтами відомо, що всі його корені дійсні і задовольняють умову $x_1 \gg x_2 \gg \cdots \gg |x_n|$. (2)

Тоді з формул Вієта слідує, що з більшою точністю будуть виконуватися співвідношення:

$$x_1 = -\frac{a_1}{a_0}, x_2 = -\frac{a_2}{a_1}, \dots, x_n = -\frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Якщо корені різні, але умова (2) не виконується, Лобачевський використовує процедуру квадруваня, що приводить до нового рівняння, корені якого задовольняють (2) і просто виражаються через корені вихідного початкового рівняння (1) [5, с. 96].

Також значний внесок у розвиток чисельних методів зробив Лагранж. У 1768, 1770 роках у «Новому методі розв'язання буквених рівнянь за допомогою рядів». Там була приведена формула Лагранжа для обернення функцій, за допомогою якої у 1771 році у наступному томі записок Берлінської академії Лагранж дав наближений розв'язок трансцендентного рівняння Кеплера $x = t - esinx$. Перші доведення формули опублікували Кондорсе (Miscell. Taurinensia, (1770-1773)) і Лаплас (1777–1778), після чого її по різному вивели Г.А. Роте (1795), І.Ф. Пфафф (1795) і сам Лагранж. Доведення Лагранжа містяться в його праці «про розв'язання числових рівнянь всіх степенів» (Delare solution des equations numeriqu es de tous les degres. Paris, рік VI, 1798), в якій він об'єднав і доповнив свої дослідження з цього питання, а також в «Теорії аналітичних функцій» (1797) [5, с. 103].

В мемуарі «Про розв'язання числових рівнянь» (1767–1769) Лагранж запропонував метод наближеного розв'язання алгебраїчних рівнянь за допомогою неперервних дробів. Якщо корінь xналежить проміжку $p < x < p + 1$і якщо підставити в рівняння $x = p + \frac{1}{y}$, отримується рівняння того ж степеня відносно y. Оскільки $1 > \frac{1}{y} > 0$, нове рівняння має корінь більший за одиницю. Якщо ціла частина наближеного значення yрівна q, то вважаємо $y = q + \frac{1}{r}$ тощо, так що

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cdots}}$$

Корінь x раціональний, якщо цей неперервний дріб обривається, і ірраціональний, якщо дріб нескінчений. В додаток до цього мемуару, надрукованому у «Mem. Ac. Berlin» за 1768 р. (1770), Лагранж показав, що для коренів квадратного рівняння ці дроби періодичні [6, 65].

Відмітимо також, що П. Руффіні у премійованому Італійським науковим товариством творі «Про визначенні коренів чисельних рівнянь будь-якої степені» (1804) і У. Горнер запропонували спосіб наближеного розв'язання алгебраїчних рівнянь за допомогою схеми, яку часто називають «схемою Горнера» або «схемою Руффіні-Горнера».

Висновки. У статті було розглянуто етапи розвитку чисельних методів та внесок видатних математиків у розвиток наближених обчислень. Зокрема особистий внесок відомих математиків: Ісака Ньютона, Джозефа Рафсона, Філіпа Людвіга фон Зейделя, Даніеля Бернуллі, Лобачевського та інших.

Найбільш стрімко чисельні методи розвивалися на першому етапі, тобто до початку XX століття. У статті були згадані історичні праці з математики, в яких був викладений основний зміст розглянутих чисельних методів.

Робота може бути корисною для студентів фізико-математичних спеціальностей, для викладачів математичних гуртків загальноосвітніх навчальних закладів, та для тих, хто цікавиться історією математики.

Список літератури

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. Москва, Наука, 1978, 512 с.

2. Семеріков С.О. Еволюція та сучасний стан курсу чисельних методів у вищій школі // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету: Серія педагогічна. – Випуск 8: Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей. Кам'янець-Подільський державний педагогічний університет. Інформаційно-видавничий відділ. 2002. С. 189–193.

3. Юшкевич А.П. Математика XVII столетия. Москва, Наука, 1970, 303 с.

4. Юшкевич А.П. Математика XVIII столетия. Москва, Наука, 1972, 498 с.

5. Русанов В.В. История и методология прикладной математики. Москва, 2004, 123 с.

6. Ріжняк Р.Я. Розвиток інформатики та інформаційних технологій у вищих навчальних закладах України у другій половині ХХ – на початку ХХІ століття. Кіровоград, Видавництво «Код», 2014, 436 с.