УДК 517

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ АНАЛІЗУ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ

Попов Іван

Науковий керівник: доктор істор. наук, професор Ріжняк Р.Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті розкрито етапи життя та діяльності вчених Ньютона і Лейбніца; розглянуто історію відкриття ними нескінченно малих, зокрема винайдення теорії флюксій та диференціального числення, історію створення символіки математичного аналізу та винайдення формули багатократного диференціювання похідної.

Метою статті є дослідження історії виникнення нескінченно малих.

В процесі роботи проаналізовано історію розвитку поняття «нескінченно малих», зокрема історію виникнення теорії флюксій (І. Ньютон) та диференціального числення (Г. Лейбніц).

Ключові слова: нескінченно-мала, диференціал, теорія флюксій, історія, математичний аналіз, Ньютон, Лейбніц

History of emergence of the analysis infinitesimal

Popov Ivan

Scientific supervisor: Doctor of Historical Sciences, Professor R. Ya. Rizhniak

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

In article stages of life and activity of scientists Newton and Leibniz are opened; history of opening by them infinitesimal, in particular the invention of the theory of a fluxion and differential calculus, history of creation of symbolics of the mathematical analysis and the invention of a formula of repeated differentiation of a derivative is considered.

The purpose of article is the research of history of emergence infinitesimal.

In the course of work history of development of a concept "infinitesimal", in particular history of emergence of the theory of a fluxion (I. Newton) and differential calculus is analysed (G. Leibniz).

Keywords: infinitesimal, differential, theory of a fluxion, history, mathematical analysis, Newton, Leibniz

Постановка проблеми. В другій половині XVII ст. почала складатися нова область математики – аналіз нескінченно малих. Його поява була передчута багатьма вченими. Він революціонізував всю математику, перетворивши її в математику змінних величин. Першим етапом існування аналізу було формування диференціального та інтегрального числення. Останнє виникло як самостійний розділ математики майже одночасно в двох різновидах: у вигляді теорії флюксій в працях І. Ньютона та його англійських послідовників і в вигляді числення диференціалів Г. Лейбніца, яке розповсюдилося насамперед на континенті Європи.

Більшість фундаментальних математичних понять є дуже важливими під час опанування спеціальних дисциплін. Нескінченно малі не є виключенням. Ними пронизана вся історія виникнення математики, починаючи від 1800-х років до н.е. та до сьогодення. Саме тому, для кращого опанування цього поняття треба зануритися та дослідити його історію та розвиток.

Аналіз досліджень та публікацій. Досить широко ще з радянських часів різними вченими проводяться історичні дослідження цього поняття, проте найбільше уваги питанню історії нескінченно-малих приділили Г. Шашкова, А. Юшкевич, І. Цейтен, В. Бевз та В. Генріх.

Найяскравіше та найповніше історію поняття розкрили саме В. Генріх та В. Бевз. Їх дослідження найповніше розкривають не лише історію поняття, а й розглядають проблему використання історії математики в навчальному процесі. В. Бевз підкреслює, що історія математики дозволяє побачити «живу математику».

Проте в жодній з вищезгаданих науково-історичних робіт комплексного дослідження утворення поняття не наводиться, що має на меті розглянути історію розвитку визначення «нескінченно-мала» різними вченими, розглянути історію винайдення та вивчення об’єкта дослідження видатними математиками. Крім того, у нашій роботі використаний аналіз доступних джерел: навчальні ресурси мережі Internet та наукова література з математики, а також методологія історичного дослідження [6].

Мета статті та постановка завдання. Мета дослідження – ознайомлення з життєвим шляхом видатних вчених І. Ньютона та Г.Лейбніца та їх внесок в розвиток аналізу, зокрема розкриття періодики історії виникнення нескінченно малих. Відповідно, для досягнення мети треба виконати наступні завдання: 1) дослідити життя та діяльність вчених Ньютона та Лейбніца; 2) розглянути логічний ланцюг виникнення понять нескінченно малих; 3) розглянути теорії вчених щодо появи аналізу нескінченно малих.

Основні ідеї математичного аналізу, щоправда в механічній та геометричній формах, повністю визріли на кінець XVII ст. Щодо цього Г. Лейбніц писав: «Після таких успіхів науки не вистачало тільки одного – нитки Аріадни в лабіринті задач, саме аналітичного числення на зразок алгебри». Для остаточного створення інтегрального та диференціального числення стало необхідним об'єднати існуючі загальні прийоми, які застосовувалися для розв'язування різних задач, в єдиний метод на базі поняття нескінченно малої величини і виробити алгоритм для обчислення похідних і інтегралів. Розвиток математичних обчислень носить чітко виражений діалектичний характер. В рамках уже існуючих обчислень відбувається процес накопичення передумов, елементів і складових нового обчислення. Потім настає момент, коли відбувається переворот в методі. Цей переворот виражається в появі математичних праць, в яких накопичені в даній області факти переглядаються з нової, єдиної точки зору. Центр уваги переміщується зі спроб розв'язання окремих задач на сам метод чи групу методів, які явно формулюються, вдосконалюються та застосовуються. Область застосування обчислення, яке з'явилося таким методом, як правило, виявляється більш широкою аніж область його виникнення. Роботи І. Ньютона та Г. Лейбніца з аналізу нескінченно малих відбивають саме таку поворотну точку в історії математичного аналізу.

Найбільш ранньою формою аналізу є теорія флюксій, відкриття якої належить І. Ньютону.

Основними напрямами наукової діяльності Ньютона була фізика, механіка, астрономія та математика. Йому належать в цих областях науки першокласні досягнення, в тому числі: вивід та формулювання основних законів класичної механіки, відкриття закону всесвітнього тяжіння, законів спектрального розкладання світла, розробка диференціального та інтегрального обчислень в формі методу флюксій.

Математика в системі наукових поглядів Ньютона займала місце загальної частини науки про природу – натуральної філософії – і знаряддя фізичних дослідів. В якості математичного апарату механіки, який враховував би рух і охвачував пов'язані з ним поняття швидкості та прискорення, Ньютон в 1665-1666 рр. розробив метод, названий ним методом флюксій.

Погляди І. Ньютона на числення нескінченно малих кілька разів змінювалися, про що говорять дослідження багатьох його праць. Спочатку, під впливом Барроу та Валліса, Ньютон оперував з нескінченно малими величинами, які він називав моментами. [1, 49] Він використовував моменти площ і побудував на їх основі свій метод квадратури. Задавши на площині площу фігури, обмеженої графіком функції f, осями координат і ординатою в деякій точці з абсцисою x, Ньютон розглядав момент площі, тобто її приріст по осі Oy, коли абсциса x зросла на нескінченно малу величину a. Він обчислив миттєву швидкість зміни площі в точці з абсцисою x, тобто похідну, і встановив, що вона дорівнює ординаті в точці кривої з абсцисою x. Таким чином, якщо дана площа може бути виражена як $z = \frac{n}{m+n} a^{\frac{m+n}{n}}$, то її швидкість зміни дорівнює $y = ax^{\frac{m}{n}}$. І навпаки, Ньютон визначив площу під кривою із заданим рівнянням $y = f\ x$, обернувши операцію диференціювання, тобто обчисливши невизначений інтеграл від f. Він більше не додавав нескінченно малі площі, як це робили його попередники, а зосередив усі свої дослідження навколо похідної.

В 1671 році І. Ньютон відмовився від нескінченно малих величин і у праці «Метод флюксій і нескінченні ряди» ввів свій найбільш відомий метод. Він розглядав математичні величини як «породжувані внаслідок неперервного зростання, подібно до шляху, який описує тіло або будь-яка річ, що рухається», і вводить поняття «швидкості породжуючих їх рухів». Ці швидкості були названі ним «флюксіями».

Ньютон увів поняття флюент і флюксій [2, 112] у наступних висловлюваннях: «Я буду називати флюентами величини, які розглядаю як поступово і невизначено зростаючі; позначати я їх буду останніми літерами алфавіту w, x, y, z. Швидкості, з якими зростають внаслідок породжуючого їх руху окремі флюенти (і які я називаю флюксіями або просто швидкостями), я буду позначати тими ж літерами, але з точкою зверху, наприклад w, x, y, z.»

І все ж методи, розроблені І. Ньютоном, залишалися недостатніми для обґрунтування диференціального числення. Це був той етап розвитку аналізу нескінченно малих, коли теорія існує і розвивається, але не роз’яснюється.

Як було вище зазначено, аналіз нескінченно малих виник майже одночасно в двох різних, незалежних одна від одної формах. Першою по часу винайдення була теорія флюксій Ньютона. Проте перші публікації з математичного аналізу були присвячені іншому виду числення – обчисленню диференціалів.

Діяльність Лейбніца дуже багатогранна: він був видатним дипломатом, політиком та вченим. Такими ж різноманітними є і його наукові інтереси: природничі науки, фізика, філософія, право, література та мовознавство, математика були об’єктами його досліджень, нерідко вельми чудових.

Лейбніц у всіх різних за змістом математичних заняттях виходив з однієї мети. Мета ця філософська: створення універсального методу наукового пізнання, за термінологією Лейбніца – всезагальної характеристики.

Всезагальна характеристика повинна замінити всі логічні судження численням, виробленим над словами та іншими символами, однозначно відображаючими поняття. Вона, таким чином, визначається як деякий загальний логіко-математичний апарат суджень. Математика при цьому набуває розширене тлумачення як наука про відображення всеможливих видів зв’язків і залежностей найпростіших елементів.

Встановлення всезагальної характеристики і відкриття закономірностей нової математики розв’яже проблему наукового доведення і усуне суперечності, так як замість спорів знадобиться лише провести обчислення.

З 1672 року Г. Лейбніц почав завзято вивчати твори Б. Кавальєрі, Ж. Роберваля, Б. Паскаля, Р. Декарта та ін. Одержимий отриманими знаннями, Г. Лейбніц зрозумів, що в галузі нового аналізу накопичилась значна кількість розв'язань частинних задач і для відкриття загального методу не вистачає зручної символіки. З 1673 р. думки щодо цього не покидали Г. Лейбніца.

«Зерна нової математики зберігаються в старій. Останню треба вивчити, вибрати з неї і поставити проблеми, що відносяться до розробки нескінченних процесів, з якими не може справитися алгебра, створити нові алгоритми. Цим алгоритмам необхідно придати по можливості досконалу символіку, що відбиватиме сутність понять чи операцій» [3, 24]. Вибору символіки Лейбніц надавав важливе значення: «Слід піклуватися, – писав він, – про те, щоб позначення були зручними для відкриттів. Це більшою частиною буває, коли позначення коротко виражають, і як би відображають інтимну сутність речей. Тоді вражаючим чином скорочується робота думки». Оперативне значення нових алгоритмів виросте, якщо вони стануть механізованими.

Такими загалом були вихідні установки Лейбніца. Вони визначили напрям та характер його математичних занять, які привели до відкриття диференціального та інтегрального числення.

З 1673 р. Лейбніц використав багато спроб для створення нової, зручної символіки. Він, шукаючи загальний розв’язок задачі про дотичні, приходить до думки про символ d (скорочення слова *differentia*-різниця) для позначення нескінченно малої різниці [2, 115].

Цього ж часу Г. Лейбніц вводить знак $\int$ із зауваженням «$\int$ означає суму, а d – різницю». Називаючи інтеграл просто сумою, Лейбніц розглядав суму нескінченної кількості нескінченно малих різниць, і це відразу визначило зв’язок між операціями диференціювання та інтегрування.

В 1684 р. в лейпцизькому журналі «Acta Eruditorium» Лейбніц опублікував перший мемуар про аналіз нескінченно малих: «Новий метод максимумів, мінімумів, а також дотичних, для якого не є перешкодою ні дробові, ні ірраціональні величини і особливий для цього рід числення».

Мемуар цей невеликий, менше 10 сторінок. В ньому немає доведень. Але диференціальне числення в ньому вперше на сторінках наукового журналу з'являється як об'єкт математичного дослідження в вигляді, який за структурою дуже схожий на сучасний. Стаття містила виклад сутності методу числення нескінченно малих, зокрема викладались основні правила диференціювання. У цій статті також вводилася звична сучасна символіка, вперше зустрілося словосполучення «диференціальне числення». Якщо Ньютон як первісне поняття використовує «швидкість», то в праці Лейбніца таким поняттям є «дотична».

Диференціал аргумента – dx – прийнятий за абсолютно довільну величину. Диференціал функції – dy – визначений рівністю $dy = \frac{ydx}{S_t}$, де S_t– дотична до кривої в точці (x, y). Введено символи: dx та dy. Сформульовані правила диференціювання постійної величини, суми функцій, різниці, добутку, степеня, частки, кореня. Відмічена інваріантність виду першого диференціала від вибору аргумента. Диференціали розуміються спочатку як величини, пропорційні миттєвим приростам величин. Правда, пізніше диференціали знову визначаються як нескінченно малі різниці.

Аналіз нескінченно малих вийшов, таким чином, із стадії формування і заявив про себе як про нову математичну науку, відразу ж продемонструвавши незвичайну плодотворність. Активна пропаганда нового обчислення зі сторони Лейбніца, його учнів і послідовників сприяла також його бурхливому розповсюдженню. А потік нових відкриттів Лейбніца не закінчувався.

В 1693 р. він розповсюдив нове числення на трансцендентні функції шляхом розкладу їх в ряди за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Цю групу результатів він виклав в статті з характерною для публікацій XVII і XVIII ст. назвою: «Доповнення практичної геометрії, яке розповсюджується на трансцендентні проблеми за допомогою нового, найбільш загального методу нескінченних рядів».

В наступних роботах Лейбніца охоплені по суті всі початкові розділи диференціального та інтегрального обчислень. Так, в 1695 р. він опублікував правило диференціювання загальної показникової функції та формулу багатократного диференціювання похідної:

$$d^m\ xy\ = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x \cdot dy + \frac{m\ m-1}{1 \cdot 2} d^{m-2} x \cdot d^2 y + \cdots$$

Тоді ж йому вдалося узагальнити поняття диференціала на випадки від’ємного і дробового показника. На протязі 1702-1703 рр. були розроблені прийоми інтегрування раціональних дробів.

За допомогою нового числення математикам кінця XVII – поч. XVIII ст. вдавалося розв’язувати швидко зростаючу кількість важких та практично важливих задач. Лейбніц і в цьому роді діяльності проклав дорогу. В 1691 р., наприклад, він встановив форму, яку приймає підвішена за кінці важка гнучка однорідна нитка, і вивів рівняння ланцюгової лінії. З 1696 р. його займають нові задачі – варіаційні. Він розв’язав задачу про брахістохрон – криву найкоротшого спуску, знайшов метод розв’язання задач про геодезичні лінії.

Символіка та терміни Лейбніца виявилися дуже гарно продуманими [4, 129]; вони були нескладними і відображали сутність справи, допомагали розумінню і дозволяли оперувати з ними по порівняно простих правилах. Багато з них дійшли до наших днів. Від Лейбніца беруть своє походження терміни: диференціал, диференціальне числення, функція, координати, диференціальне рівняння, алгоритм (в сенсі, аналогічному до сучасного розуміння) і багато інших, а також велика кількість символів. Практичні успіхи та розробленість числення досягли такого рівня, що в кінці століття (1696 р.) з’явився перший підручник диференціального числення і його додатків до геометрії: «Аналіз нескінченно малих» Лопіталя.

Практична цінність числення Лейбніца, неймовірна простота привертали до нього увагу вчених. Воно швидко стало центром всієї математики, основною зброєю дослідження в руках вчених. Але в ньому було слабке місце: залишалось невідомим, яке раціональне пояснення можна дати основним поняттям, що спираються на нескінченну близькість, нескінченний мізер або нескінченну протяжність процесу. В рукописах і статтях Лейбніц постійно повертається до нерозв'язаної проблеми обґрунтування аналізу нескінченно малих. Він робив багато спроб, з самих різних вихідних позицій.

Проте проблема обґрунтування аналізу нескінченно малих видалась непосильною Лейбніцу, так як і Ньютону. Основи цієї дуже важливої частини математики, в якій слідували один за іншим чудові досягнення, залишались нез'ясованими, таємними. В області обґрунтування новий аналіз протягом XVII р. переживав «містичний» по влучному висловленню К. Маркса період.

Велике місце в творах з історії математики цього часу зазвичай займає спір між послідовностями І. Ньютона та Г. Лейбніца про пріоритет відкриття диференціального та інтегрального обчислень [5]. В свій час, так і було, спір набував напружений характер, розростався до розмірів національного суперництва та спору, залучав в свою сферу велику кількість вчених і навіть політичних діячів. Але не все, навіть найгучніші спори, наймодніші теорії мають в історії найдовше існування і неминуче значення. Закони історії невблаганно відображають саме змістовний бік науки, її відповідність економічному ладу людського суспільства, суттєві зв’язки.

Швидше за все, Ньютон та Лейбніц відкрили свої форми числення незалежно один від одного. Вони обоє спирались на досвід великого числа попередників, в якому накопичилось достатньо передумов для їх відкриттів. Вони обоє відобразили, виходячи з різних посилань, загальну потребу науки в аналізі нескінченно малих. Ньютон, скоріш за все, добився успіху раніше, Лейбніц – дещо пізніше. Проте пріоритет в публікації, переваги в зручності алгоритмів та символів, заслуги в активній пропаганді нового числення належать Лейбніцу.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. 1. Відкриття аналізу нескінченно-малих одночасно двома вченими дозволило повноцінно створити один з розділів математичного аналізу, адже Ньютон огортав увагою безпосередньо зміст понять, а Лейбніц – забезпечив математичний аналіз зручною символікою, якою користуються досьогодні.

2. Метод флюксій, знайдений Ньютоном відображає математичний апарат механіки через зв’язок понять «рух», «швидкість», «прискорення». Даний метод використовується досьогодні в курсі математичного аналізу.

3. Публікація в 1695 р. Лейбніцем правила диференціювання загальної показникової функції, формули багатократного диференціювання похідної: $d^m\ xy\ = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x \cdot dy + \frac{m\ m-1}{1\cdot 2} d^{m-2} x \cdot d^2 y + \cdots$ започаткували новий етап творення математичної науки; нова, зручна символіка, зокрема символи d - нескінченно-мала різниця), знак $\int$ – інтеграл, dx – диференціал аргумента, dy – диференціал функції, сформульовані правила диференціювання постійної величини, суми функцій, різниці, добутку, степеня, частки, кореня відіграли важливу роль в творенні математичного аналізу.

Представлені результати досліджень являються деякою ланкою у визначенні особливостей історії творення математичного аналізу. Для більш широкого розуміння історії математичного аналізу пропонується дослідити історію попередніх та наступних понять курсу математичного аналізу. Перспектива дослідження теми полягає у подальшому, глибокому аналізі наукової роботи вчених, для порівняння математичного аналізу (символіки та термінології) на етапі створення із сучасним, відповідно.

Список літератури

1. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Г. Вилейтнер. М.: ГИФМЛ, 1960. – 468 с.
2. Бевз В. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: монографія / В. Бевз. – К. : НПУ імені Драгоманова, 2005. – 360 с.
3. Юшкевич А.П. Из истории возникновения математического анализа. – М.: Знание, 1985. – 48 с.
4. Шмигевський М.В. Видатні математики. – Харків: Вид. гр. «Основа», 2004. – 176 с.
5. Відкриття [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Київ: Державна бібліотека України для юнацтва, 2014-2017. – Режим доступу: http://discovery.4uth.gov.ua/ (дата звернення 24.12.2017) – Назва з екрана.
6. Ріжняк Р.Я. Розвиток інформатики та інформаційних технологій у вищих навчальних закладах України у другій половині ХХ – на початку XXI століття. Кіровоград, Видавництво «Код», 2014, 436 с.