

УДК 532.59

**ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТУ MAPLE ДЛЯ  
АНАЛІЗУ ЕНЕРГІЇ ХВИЛЬ У ТРИШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ  
СИСТЕМІ**

**Гринько А.Р., Луньова М.В.**

**Науковий керівник: доктор ф.-м. наук, професор Авраменко О.В.**

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені  
Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

*Дослідження енергії хвильових процесів у гідродинамічних системах різного типу до сьогодні залишається однією із актуальних проблем гідродинаміки. У даній статті вивчаються енергетичні характеристики поширення хвиль вздовж поверхонь контакту у гідродинамічній системі «рідкий півпростір – шар – шар з твердою кришкою». Було отримано рівняння енергії хвильового руху трьох шарів, а також сумарної енергії системи. Використовуючи засоби математичного пакету MAPLE розроблено маплет для побудови графіків залежності енергії від фізичних та геометричних параметрів системи.*

*Ключові слова: енергія хвильового руху, гідродинамічна система, складконелінійна система.*

**Using maple mathematical package for wave energy analysis in third-hydrodynamic system**

**A. Grin'ko, M. Lunyova**

**Scientific Supervisor: Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Avramenko  
O.V.**

*Central Ukrainian Volodymyr Vynnychenko State Pedagogical University,  
Kropyvnytsky, Ukraine*

*Investigation of the energy of wave processes in hydrodynamic systems of various types up to now remains one of the urgent problems of hydrodynamics. In this paper, the energy characteristics of the propagation of waves along the contact surfaces in the hydrodynamic system "liquid half-space - layer - layer with a rigid lid" are studied. It was obtained the energy equation of the waveguide of the three layers, as well as the total energy of the system. Using the mathematical package MAPLE, a chart has been developed for plotting energy dependencies from the physical and geometric parameters of the system.*

*Key words: energy of wave motion, energy dependence, hydrodynamic system.*

**Постановка проблеми.** Дослідження внутрішніх та поверхневих хвиль у різного типу гідродинамічних системах і до сьогодні залишається однією з

актуальних проблем. Подібні дослідження є одними з найскладніших у сучасній науці і є важливим підґрунтям для дослідження енергетичної складової хвильового руху. І саме практичне використання енергетичної складової поширення та взаємодії хвиль стало вагомим причиною для вивчення хвильових процесів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У роботі [6] досліджується поширення хвиль в двошаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею». За допомогою методу багато масштабних розвинень отримано перші три лінійні наближення нелінійної задачі. Було побудовано та проаналізовано розв'язки першого лінійного наближення проблеми. На основі аналізу відношення амплітуд досліджено взаємодію хвильових рухів в заданій системі. Подальше дослідження поширення та взаємодії хвильових пакетів у системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею» було проведено у роботах [1], [2], [7]. Було проаналізовано модуляційну стійкість хвильових пакетів, досліджено умови проходження та форму хвиль. Також проаналізовано залежності енергії руху внутрішніх та поверхневих хвиль від геометричних та фізичних параметрів системи.

У роботі [5] розглянуто слабконелінійну модель поширення та взаємодії хвиль вздовж поверхонь контакту у гідродинамічній системі «рідкий півпростір – шар – шар з твердою кришкою», наведено перші три її лінійні наближення. Отримано умову поширення хвиль вздовж поверхонь контакту. Проаналізовано залежність відношення амплітуд хвиль на поверхнях контакту від хвильового числа та від товщини верхнього шару. Досліджено структуру хвильових рухів на поверхнях контакту.

**Постановка завдання.** Мета даної роботи, використовуючи засоби математичного пакету MAPLE, створити програмний додаток, який дозволить проводити аналіз залежності енергії хвильових рухів від фізичних та геометричних параметрів не заглиблюючись в математичну постановку проблеми. Для досягнення поставленої мети були сформульовані такі завдання:

– отримати вирази для оцінки енергії хвильового руху у кожному із шарів тришарової гідродинамічної системи «рідкий півпростір – шар – шар з твердою кришкою» та сумарної енергії системи;

– створити програмний додаток для побудови графіків залежності енергії хвильових рухів від фізичних та геометричних параметрів.

### **Виклад основного матеріалу дослідження**

**Оцінка енергії хвильового руху тришарової гідродинамічної системи системи.** Досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого шару  $\Omega_1 = x, z : |x| < \infty, -\infty \leq z < 0$  з густиною  $\rho_1$ , середнього рідкого шару  $\Omega_2 = x, z : |x| < \infty, 0 \leq z < h_2$  з густиною  $\rho_2$  та верхнього рідкого шару  $\Omega_3 = x, z : |x| < \infty, h_2 \leq z < h_2 + h_3$  з густиною  $\rho_3$ . Шари  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$  розділенні поверхнею контакту  $z = \eta_1(x, t)$ , а шари  $\Omega_2$  та  $\Omega_3$  – розділенні поверхнею контакту  $z = h_2 + \eta_2(x, t)$ . При розв'язанні враховуються сили поверхневого натягу на поверхнях контакту. Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні розподілу у від'ємному  $z$ -напрямку, рідини вважаються нестисливими.

Енергію, яку переносять внутрішні хвилі на верхній та нижній поверхнях контакту, будемо досліджувати згідно [3, 301]. Розглянемо енергію, яку переносять за період  $\tau$  двовимірні прогресивні хвилі, що задаються розв'язками дисперсійного рівняння, яке було виведено у [5, 61], через площину  $x = const$  на верхній та нижній поверхні контакту. Тоді мають місце формули

$$E_1 = -\frac{\rho_1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-\infty}^0 \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (1)$$

$$E_2 = -\frac{\rho_2}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (2)$$

$$E_3 = -\frac{\rho_3}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{h_2}^{h_2+h_3} \frac{\partial(\varphi_{31}^{(1)} + \varphi_{31}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{31}^{(1)} + \varphi_{31}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (3)$$

$$E_s = E_1 + E_2 + E_3, \quad (4)$$

де  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  - енергія, яку переносять внутрішні хвилі. Формули (1-4) дають оцінку енергії внутрішніх хвиль на основі розв'язків першого наближення.

**Опис програмного додатку «Енергія хвильового руху в тришаровій ГДС».** Використовуючи можливості математичного пакету Maple і отримані формули (1-4), створено програму графічного аналізу «Енергія хвильового руху в тришаровій ГДС». Програма складається з вікна головного меню та чотирьох вікон для побудови графіків.

Вікно головного меню представляє собою діалогове вікно із зображенням схеми тришарової ГДС та чотирма кнопками із різними варіантами побудови графіків (рис 1).

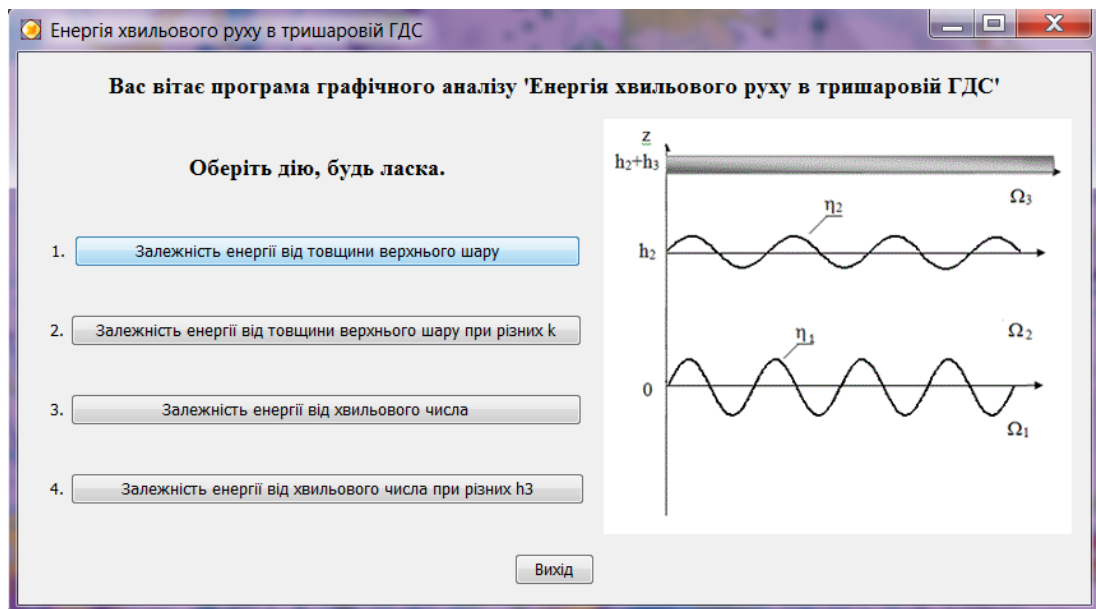


Рис. 1. Вигляд вікна «Енергія хвильового руху в тришаровій ГДС»

Вікно 1 – «Залежність енергії від товщини верхнього шару» складається із поля для виведення графіків, текстових полів для введення параметрів системи, кнопки побудови графіку, кнопки очищення полів, кнопки повернення до головного меню та кнопки допомоги (рис. 2). Дане вікно ми отримали написавши невеликий текст програмного коду:

```
maplet2 := Maplet(Window['W2']('title' = "Залежність енергії від товщини верхнього шару",
'layout' = 'BL2'), BoxLayout['BL2']
```

*(BoxRow(*

*Plotter['PL1'](), BoxColumn(*

*BoxRow("Задайте параметри системи:"),*

*BoxRow("rho1", TextField['TF1']("", 4), "rho2", TextField['TF2']("", 4), "rho3",  
TextField['TF3']("", 4)),*

*BoxRow("k", TextField['TF5']("", 4), "A", TextField['TF6']("", 4), "B",  
TextField['TF7']("", 4)),*

*BoxRow("Задайте початкове h3", TextField['TF8']("", 4), "кінцеве h3",  
TextField['TF9']("", 4)),*

*BoxRow(*

*Button[B1]("Побудувати", Evaluate('PL1' = 'energy1(TF1, TF2, TF3, TF5,  
TF6, TF7, TF8, TF9)'), Button[B2]("Очистити", Action(SetOption('TF1' =  
" "), SetOption('TF2' = " "), SetOption('TF3' = " "), SetOption('TF5' = " "),  
SetOption('TF6' = " "), SetOption('TF7' = " "), SetOption('TF8' = " "),  
SetOption('TF9' = " "), Evaluate('PL1' = 'energy5())))),*

*BoxRow(Button[B3]("Головне меню", Shutdown()), Button[B4]("Допомога",  
Evaluate('function' = 'Maplets[Display](maplet6)'))))))*

Процедура побудови графіка залежності енергії від товщини верхнього шару описана наступним чином:

*energy1 := proc (r1, r2, r3, kk, AA, BB, hb, he)*

*local hh2, T1, T2, xx, tt, ttt, Emin, Emax, gra1, gra2, gra3, gra5;*

*hh2 := 1; T1 := 0.; T2 := 0.; xx := 0; tt := 0; ttt := evalf(2000000); Emin := 0; Emax :=  
0.00025;*

*gra1 := plot(E1(r1, r2, r3, T1, T2, kk, hh2, hh3, xx, tt, ttt, AA, BB), hh3 = hb .. he, E, color  
= brown, linestyle = 3, labels = ["h3", "E"], legend = ["E1"]);*

*gra2 := plot(E2(r1, r2, r3, T1, T2, kk, hh2, hh3, xx, tt, ttt, AA, BB), hh3 = hb .. he, E, color  
= green, linestyle = 3, labels = ["h3", "E"], legend = ["E2"]);*

*gra3 := plot(E3(r1, r2, r3, T1, T2, kk, hh2, hh3, xx, tt, ttt, AA, BB), hh3 = hb .. he, E, color  
= blue, linestyle = 3, labels = ["h3", "E"], legend = ["E3"]);*

*gra5 := plot(Es(r1, r2, r3, T1, T2, kk, hh2, hh3, xx, tt, ttt, AA, BB), hh3 = hb .. he, E, color =  
black, linestyle = 5, labels = ["h3", "E"], legend = ["Es"]);*

*display(gra1, gra2, gra3, gra5)*

*end proc;*

Вікно 2 – «Залежність енергії від товщини верхнього шару при різних  $k$ » (рис.3) складається із поля для виведення графіків, текстових полів для введення параметрів системи, полів для введення чотирьох різних значень хвильового числа  $k$ , кнопки побудови графіку, кнопки очищення полів, кнопки повернення до головного меню та кнопки допомоги.

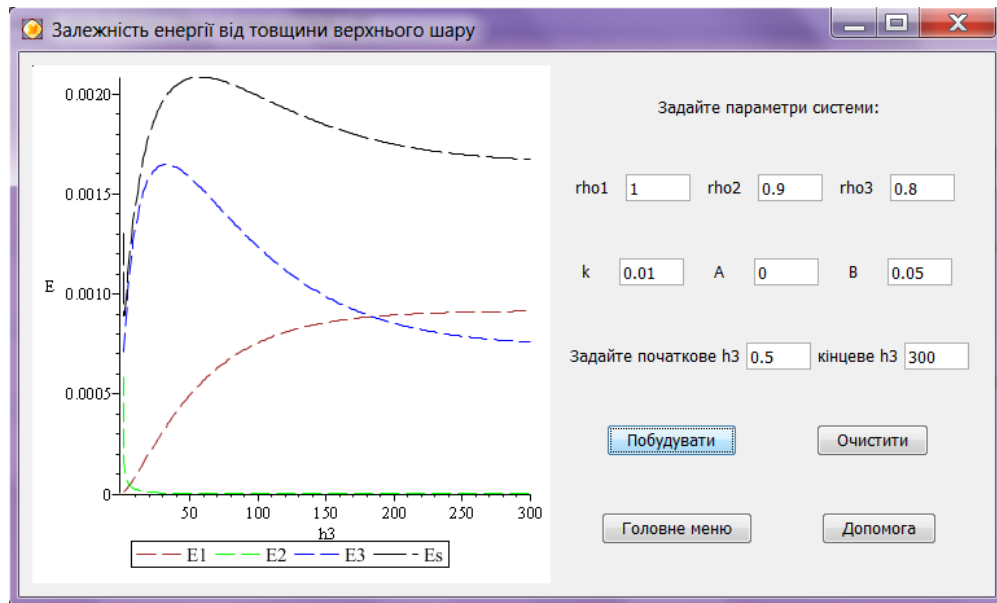


Рис. 2. Вигляд вікна «Залежність енергії від товщини верхнього шару»

Процедура побудови графіка залежності енергії від товщини верхнього шару описана наступним чином:

```
energy2:=proc(r1,r2,r3,k1,k2,k3,k4,AA,BB,hb,he)
```

```
local hh2, T1,T2,xx,tt,ttt,Emin,Emax,gra1,gra2,gra3,gra5:
```

```
hh2:=1: T1:=0.0: T2:=0.0: xx:=0;tt:=0; ttt:=evalf(2000000); Emin:=0:
```

```
Emax:=0.00025:
```

```
gra1:=plot(Es(r1,r2,r3,T1,T2,k1,hh2,hh3,xx,tt,ttt,AA,BB),hh3=hb..he,E,  
color=brown,linestyle=3,labels=["h3","Es"],legend=["k"=k1]):
```

```
gra2:=plot(Es(r1,r2,r3,T1,T2,k2,hh2,hh3,xx,tt,ttt,AA,BB),hh3=hb..he,E,  
color=green,linestyle=3,labels=["h3","Es"],legend=["k"=k2]):
```

```
gra3:=plot(Es(r1,r2,r3,T1,T2,k3,hh2,hh3,xx,tt,ttt,AA,BB),hh3=hb..he,E,  
color=blue,linestyle=3,labels=["h3","Es"],legend=["k"=k3]):
```

```
gra5:=plot(Es(r1,r2,r3,T1,T2,k4,hh2,hh3,xx,tt,ttt,AA,BB),hh3=hb..he,E,  
color=black,linestyle=5,labels=["h3","Es"],legend=["k"=k4]):
```

```
display(gra1,gra2,gra3,gra5):
```

```
end proc:
```

Вікно 3 – «Залежність енергії від хвильового числа» та вікно 4 – «Залежність енергії від хвильового числа при різних  $h_3$ » за структурою аналогічні вікнам 1 та вікнам 2 відповідно. Вікно допомоги (рис. 4) містить рекомендацію перевірки коректності введення даних.

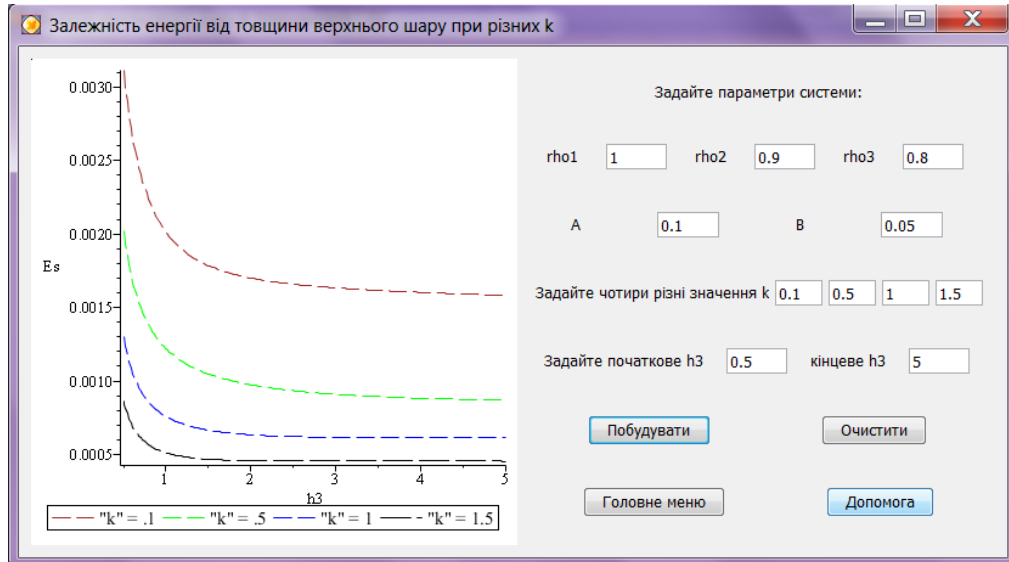


Рис. 3. Вигляд вікна «Залежність енергії від товщини верхнього шару при різних  $k$ »

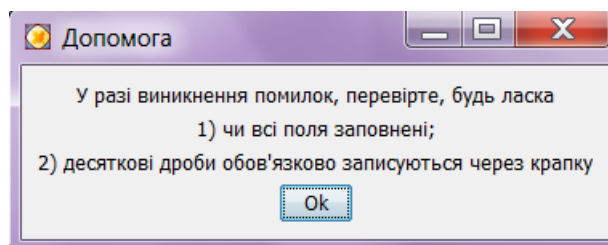


Рис. 4. Вигляд вікна «Допомога»

**Висновки.** Під час дослідження проблеми аналізу енергії хвильових рухів в тришаровій гідродинамічній системі «рідкий півпростір – шар – шар з твердою кришкою» були знайдені аналітичні вирази для обчислення енергії хвильового руху в першому наближенні. За допомогою математичного пакету символьних обчислень Maple виконано всі аналітичні перетворення, графічні побудови та створено програмний додаток для побудови графіків залежності енергії хвильових рухів в тришаровій гідродинамічній системі від геометричних та фізичних параметрів для заданих параметрів системи. Дана

робота має практичний характер та буде корисною учням і студентам, які цікавляться хвильовими рухами та математичним моделювання. У подальшому можливе створення додаткових модулів для аналізу інших видів гідродинамічних систем, наприклад двошарової гідродинамічної системи «рідкий півпростір – шар з твердою кришкою»

### Список літератури

1. Авраменко, О. В. Аналіз поширення слабконелінійних хвиль в двошаровій рідині з вільною поверхнею [Текст] / О. В. Авраменко, В. В. Наратовий // Східно-Європейський Журнал передових технологій. – 2015. –Т. 4, № 7. – С. 39–44. doi: 10.15587/1729-4061.2015.48282.
2. Авраменко, О. В. Енергія внутрішніх і поверхневих хвильових рухів у двошаровій гідродинамічній системі [Текст] / О. В. Авраменко, В. В. Наратовий, І. Т. Селезов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 1. – С. 111–120.
3. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч. 3: Механика невязкой жидкости. – Харьков: Золотые страницы, 2005. – 332 с.
4. O.Avramenko. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid. [Text]/ O.Avramenko, M. Lunyova, V.Naradovyi //Easter-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – Vol.5, Issue 7 (89). – P.58-66. Doi: 10.15587/1729-4061.2017.111941
5. Selezov, I.T. Nonlinear interaction of internal and surface gravity waves in a two-layer fluid with free surface [Text] / I. T. Selezov, O. V. Avramenko, Yu. V. Gurtovyi, V. V. Naradovyi // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 168, Issue 4. –P. 590–602.
6. Avramenko, O. V. Conditions of wave propagation in a two-layer liquid with free surface [Text] / O. V. Avramenko, V. V. Naradovyi, I. T. Selezov // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 2012, Issue 2. –P. 131–141. doi: 10.1007/s10958-015-2654-4
7. Nayfeh A. H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME., Ser. E.– 1976. – 43, № 4.– P. 584 – 588.