УДК 514.13.132

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ І ЗНАЧЕННЯ НЕЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Осадча Вікторія Вадимівна

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Ренат Ярославович

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті висвітлено значущість в сучасній науці, зацікавленість математиків даною темою. Представленно історію дослідження неевклідової геометрії, її виведення, розвиток та застосування в повсякденному житті. А також представлено дослідників неевклідової геометрії та поняття, які вони ввели. Детально розглянуто історію створення нової геометрії, перші начерки та відкриття неевклідової геометрії, зміст геометрії Лобачевського та Рімання. Описано три моделі геометрії Лобачевського.

Ключові слова: неевклідова геометрія, геометрія Лобачевського, геометрія Рімання.

HISTORY OF THE ORIGIN AND SIGNIFICANCE OF NON-EUCLIDEAN GEOMETRY

Osadcha Victoria Vadimovna

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, Professor Rizhniak R.Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article highlights the significance in modern science, the interest of mathematicians in this topic. The history of the study of non-Euclidean geometry, its derivation, development and application in everyday life is presented. Also presented by researchers of non-Euclidean geometry and the concepts they introduced. The history of creating a new geometry, the first outline and the discovery of non-Euclidean geometry, the content of the geometry of Lobachevsky and Riemann, are considered in detail. Three models of Lobachevsky geometry are described.

Key words: non-Euclidean geometry, Lobachevsky geometry, Riemann geometry.

Постановка проблеми. До 1800 років, математика лежала на двох "китах", а саме – на числовій системі і евклідовій геометрії. Так як багато властивостей числової системи доводили геометрично, евклідова геометрія була найбільш надійною частиною будівлі математики. Тим не менш, аксіома про паралельні прямі містила твердження про прямі, що тягнуться у нескінченність, яке не могло бути підтверджено досвідом. Навіть версія цієї аксіоми, що належить самому Евкліду, зовсім не стверджувала, що якісь прямі не перетнуться. У ній швидше формулювалася умова, при якій вони перетнуться в деякій кінцевій точці. Математики століттями намагалися знайти аксіомі про паралельні прямі відповідну заміну. Але в кожному варіанті неодмінно у когось був пробіл. Честь створення неевклідової геометрії випала М.І. Лобачевському та Я. Бояї, кожен з яких незалежно опублікував свій власний оригінальний виклад неевклідової геометрії. У їхніх версіях геометрії через дану точку можна було провести нескінченно багато паралельних прямих до даної. В геометрії Б. Рімана через точку поза прямою не можна провести ні однієї паралельної [7].

Аналіз досліджень і публікацій. Аналізуючи дослідження і публікації можна сказати, що неевклідова геометрія стала найбільш вражаючим інтелектуальним звершенням IX ст. Вона ясно продемонструвала, що математику не можна більше розглядати як звіт незаперечних істин. У кращому випадку, математика могла гарантувати достовірність доведень на основі недостовірних аксіом. Проте, математики надалі здобули свободу досліджувати будь-які ідеї, які могли здаватися їм привабливими. Кожен математик окремо був тепер вільний вводити свої власні нові поняття і встановлювати аксіоми на свій розсуд, стежачи лише за тим, щоб теореми, які виникають з аксіом, не суперечили одна одній. Грандіозне розширення кола математичних досліджень в кінці IX ст., по суті, стало наслідком цієї нової свободи [7].

Відкриття неевклідової геометрії зробило переворот не тільки в геометрії і навіть не тільки в математиці, але можна сказати, в розвитку людського мислення взагалі. І те, що евклідова геометрія не є єдино можливою, доведене Гауссом, Лобачевским і Бояї, вплинуло на світогляд людства. Однак мало кому відомо, що неевклідова геометрія, поряд з евклідовою, є одним з робочих інструментів математики, незважаючи на те що «простір, в якому ми живемо», в доступних нашому розумінню межах є скоріше евклідовим, ніж неевклідовим [8, с. 10]. Крім того, у роботі нами був використаний аналіз доступних джерел: навчальні ресурси мережі Internet та наукова література з математики, а також методологію історичного дослідження [10].

Мета статті. У даній статті ми розглянемо історію дослідження неевклідової геометрії, її виникнення, розвиток та застосування.

Неевклідова геометрія – будь-яка геометрична система, яка відрізняється від геометрії Евкліда; проте традиційно термін «неевклідова геометрія» застосовується в більш вузькому сенсі і відноситься тільки до двох геометричним системам: геометрії Лобачевського і сферичної геометрії [2, 50].

Як і евклідова, ці геометрії відносяться до метричної геометрії простору постійної кривизни. Нульова кривизна відповідає евклідової геометрії, додатна – сферичній, від'ємна – геометрії Лобачевського [9].

Глибоке дослідження V постулату, засноване на абсолютно оригінальному принципі, провів в 1733 році італійський монах-єзуїт, викладач математики Джироламо Саккері. Ідея Саккері полягала в тому, щоб замінити V постулат протилежним твердженням, вивести з нової системи аксіом якомога більше наслідків, тим самим побудувавши «помилкову геометрію», і знайти в цій геометрії протиріччя або свідомо неприйнятні положення. Тоді справедливість V постулату буде доведена від супротивного.

Саккері розглядає все ті ж три гіпотези про четвертий кут чотирикутника Ламберта. Гіпотезу тупого кута він відкинув відразу з формальних міркувань. Легко показати, що в цьому випадку взагалі всі прямі перетинаються, а тоді можна зробити висновок, що V постулат Евкліда справедливий – адже він як раз і стверджує, що при деяких умовах прямі перетинаються. Звідси робиться висновок, що «гіпотеза тупого кута завжди цілком помилкова, оскільки вона сама себе руйнує».

Після цього Саккері переходить до спростування «гіпотези гострого кута», і тут його дослідження набагато цікавіше. Він допускає, що вона вірна, і, одне за іншим, доводить цілий ряд наслідків. Сам того не підозрюючи, він просувається досить далеко в побудові геометрії Лобачевського. Багато теорем, доведених Саккері, виглядають інтуїтивно неприйнятними, але він продовжує ланцюжок теорем. Нарешті, Саккері доводить, що будь-які дві прямі або перетинаються, або мають загальний перпендикуляр, по обидва боки від якого вони віддаляються один від одного, або ж віддаляються один від одного з одного боку і необмежено зближуються з іншого. У цьому місці Саккері робить несподіваний висновок: «гіпотеза гострого кута абсолютно помилкова, оскільки суперечить природі прямої лінії».

Мабуть, Саккері відчував необґрунтованість цього «доведення», тому що дослідження тривало. Він розглядає *еквідістанту – геометричне місце точок площини, рівновіддалених від прямої*; на відміну від своїх попередників, Саккері розуміє, що в даному випадку це зовсім не пряма. Однак, обчислюючи довжину її дуги, Саккері припускається помилки і приходить до реального протиріччя, після чого закінчує дослідження і з полегшенням заявляє, що він «вирвав цю шкідливу гіпотезу з коренем».

Ламберт першим виявив, що «геометрія тупого кута» реалізується на сфері, якщо під прямими розуміти великі кола. Він, як і Саккері, вивів з «гіпотези гострого кута» безліч наслідків, причому просунувся набагато далі Саккері; зокрема, він виявив, що додаток суми кутів трикутника до 180° пропорційний площі трикутника.

Ламберт не знайшов протиріччя в гіпотезі гострого кута і прийшов до висновку, що всі спроби довести V постулат безнадійні. Він не висловив жодних сумнівів у хибності «геометрії гострого кута», проте Ламберт розмірковував про можливу фізичну реальність неевклідової геометрії і про наслідки цього для науки.

Чудова робота Ламберта, як і книга Саккері, далеко випередила свій час і не викликала інтересу у тодішніх математиків. Та ж доля спіткала «астральну геометрію» німецьких математиків Ф.К. Швайкарт (1817) і Ф.А. Тауринус (1826), за ідеями близьку до побудованої Ламбертом [1].

У першій половині XIX століття по шляху, прокладеному Саккері, пішли К.Ф. Гаусс, Я. Бояї, М.І. Лобачевський і Ф.К. Швайкарт. Але мета у них була вже інша – не розглядати неевклідову геометрію як неможливу, а, навпаки, побудувати альтернативну геометрію і з'ясувати її можливу роль у реальному світі. На той момент це була абсолютно єретична ідея; ніхто з учених раніше не сумнівався, що фізичний простір евклідів [5, 60].

Лобачевський і Бояї незалежно один від одного опублікували виклад того, що зараз називається геометрією Лобачевського. Лобачевський просунувся в дослідженні нової геометрії найбільш далеко, і вона зараз носить його ім'я (1829–1830 роки, твір Лобачевського «Початки геометрії»). Але головна його заслуга не в цьому, а в тому, що він повірив у нову геометрію і мав мужність відстоювати своє переконання (він навіть запропонував експериментально перевірити V постулат, вимірявши суму кутів трикутника) [1].

Лобачевський будував свою геометрію, відштовхуючись від основних геометричних понять і своїми аксіоми, і доводив теореми геометричним методом, подібно до того, як це робиться в геометрії Евкліда. Основою служила теорія паралельних ліній, так як саме тут починається відмінність геометрії Лобачевського від геометрії Евкліда. Всі теореми, не залежні від аксіоми про паралельність, є загальними для обох геометрій; вони утворюють так звану абсолютну геометрію, до якої відносяться, наприклад, ознаки рівності трикутників. Слідом за теорією паралельності будувалися інші розділи, включаючи тригонометрію і початки аналітичної та диференціальної геометрії [3].

Геометрія Рімана (або еліптична геометрія) – одна з неевклідових геометрій постійної кривизни. Якщо геометрія Евкліда реалізується в просторі з нульовою гауссовою кривизною, Лобачевського – з від’ємною, то геометрія Рімана реалізується в просторі з постійною додатною кривизною (в двовимірному випадку – на сфері) [6, 80].

В геометрії Рімана пряма визначається двома точками, площина – трьома, дві площини перетинаються по прямій і т. д., але через дану точку не можна провести до прямої жодної паралельної. В геометрії Рімана, як і в сферичній геометрії, справедливим є твердження: сума кутів трикутника більше двох прямих, має місце формула:

$$\Sigma = \pi + \frac{S}{R^2}$$

де $\sum$ – сума кутів трикутника; R – радіус сфери, на якій реалізовано геометрію.

Геометрія Рімана схожа на сферичну геометрію, але відрізняється тим, що будь-які дві прямі мають не дві точки перетину, як в сферичної, а тільки одну. Тому іноді геометрію Рімана називають геометрію на сфері, в якій протилежні точки ототожнені; таким чином зі сфери виходить проективна площина [4].

Висновок. Таким чином, неевклідова геометрія – будь-яка геометрична система, яка відрізняється від геометрії Евкліда; проте традиційно термін «неевклідова геометрія» застосовується в більш вузькому сенсі і відноситься тільки до двох геометричним системам: геометрії Лобачевського і сферичної геометрії

Відкриття неевклідової геометрії зробило переворот не тільки в геометрії і навіть не тільки в математиці, але можна сказати, в розвитку людського мислення взагалі. І те, що евклідова геометрія не є єдино можливою, доведене Гауссом, Лобачевским і Бояї, вплинуло на світогляд людства. Однак мало кому відомо, що неевклідова геометрія, поряд з евклідової, є одним з робочих інструментів математики, незважаючи на те що «простір, в якому ми живемо», в доступних нашому розумінню межах є скоріше евклідовим, ніж неевклідовим.

У першій половині XIX століття К.Ф Гаусс, Я. Бояї, М.І. Лобачевський і Ф.К. Швайкарт поставили за мету не розглядати неевклідову геометрію як неможливу, а, навпаки, побудувати альтернативну геометрію і з'ясувати її можливу роль у реальному світі. На той момент це була абсолютно єретична ідея; ніхто з учених раніше не сумнівався, що фізичний простір евклідів.

Але опублікували свої роботи, майже одночасно і не залежно один від одного, тільки Лобачевський і Бояї (Лобачевський – в доповіді 1826 року і публікації 1829–1830 року; Бояї – в листі 1831 року і публікації 1832 роки), опублікували виклад того, що зараз називається геометрією Лобачевського. Лобачевський будував свою геометрію, відштовхуючись від основних геометричних понять і своєї аксіоми, і доводив теореми геометричним методом, подібно до того, як це робиться в геометрії Евкліда. Основою служила теорія паралельних ліній, так як саме тут починається відмінність геометрії Лобачевського від геометрії Евкліда.

Отже, відкриття неевклідової геометрії довело, що не має абсолютного уявлення про простір, що «вживана» (як назвав Лобачевський геометрію Евкліда) геометрія не є єдино можливою. Однак це не підірвало непорушність геометрії Евкліда. В основі геометрії Евкліда лежать не апріорні, вроджені розумові поняття і аксіоми, а такі поняття, які пов'язані з діяльністю людини, з людською практикою. Тільки практика може вирішити питання про те, яка геометрія вірніше викладає властивості фізичного простору. Відкриття неевклідової геометрії дало вирішальний поштовх грандіозного розвитку науки, сприяло і понині сприяє більш глибокому розумінню навколишнього нас матеріального світу.

Список літератури

1. Аксіома паралельності Евкліда. Вікіпедія. [Електронний ресурс] Назва з екрана: *https://uk.wikipedia.org/wiki/Аксіома_паралельності_Евкліда*.

2. Александров П.С. Что такое неэвклидовая геометрия. Москва, 1950.

3. Геометрія Лобачевського. Вікіпедія. [Електронний ресурс] Назва з екрана: *https://uk.wikipedia.org/wiki/Геометрія_Лобачевського*

4. Ріманова геометрія. Вікіпедія. [Електронний ресурс] Назва з екрана: *https://uk.wikipedia.org/wiki/Ріманова_геометрія.*

5. Ефимов Н.В., Высшая геометрия. Москва, Наука, 1971.

6. Ефимов Н.В., Высшая геометрия. Москва, Наука, 1978.

7. Історія математики. Вікіпедія. [Електронний ресурс] Назва з екрана: *https://uk.wikipedia.org/wiki/Історія_математики*

8. Клейн Ф. Неэвклидовая геометрия. Москва, 1936.

9. Неевклідова геометрія. Вікіпедія. [Електронний ресурс] Назва з екрана: https://uk.wikipedia.org/wiki/Неевклідова_геометрія.

10. Ріжняк Р.Я. Розвиток інформатики та інформаційних технологій у вищих навчальних закладах України у другій половині ХХ – на початку ХХІ століття. Кіровоград, Видавництво «Код», 2014, 436 с.