УДК 517.518.12

ІСТОРІЯ СТВОРЕННЯ ТА РОЗВИТКУ ІНТЕГРАЛУ

Жук Юрій

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Ренат Ярославович

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті подано основні періоди розвитку поняття інтеграл: від першого його застосування до сучасного стану. Вагомий внесок у розвиток інтегралу зробили Лейбніц, брати Бернуллі, Ейлер, Ньютон, Коші, Ріман, Лебег та їх послідовники Лузін, Хінчін та інші. Сучасний символ інтегралу був введений Лейбніцом в 1675 році, який був утворений з букви S – скорочення слова сума (від лат. summa). Сам термін «інтеграл» був запропонований Иоганом Бернуллі, учнем Лейбніца. Символ визначеного інтегралу вперше використав Жан Батіст Жозеф Фур'є, приблизно в 1819-1920 рр.

Ключові слова: інтеграл, історія, Лейбніц, Ейлер, Коші, Ріман.

History of creation and development of integral

Y. Zhuk

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, professor Rizhniak R.Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

In an article the basic periods of development of concept are given integral: from his first appendix to the modern state. A ponderable contribution to development an integral was done Leybnic, to take Bernulli, Euler, Newton, Koshi, Riman, Lebesgue and their followers of Luzin, Khinchin et al. Modern character to the integral was entered Leybnicom in 1675 year, which was formed from the letter of S – reduction of word sum (from lat. summa). The term "integral" was proposed by Johann Bernoulli, a student of Leibniz. Character certain first Jean Batistutillized an integral Joseph Fourier, approximately in 1819-1920.

Key words: integral, history, Leybnic, Euler, Koshi, Riman.

Постановка проблеми. Поняття інтеграла пронизує всю сучасну математику. Крім того, в науках фізичного і технічного циклів знаходять застосування різні варіації інтеграла. Варто розкрити будь-яку книгу, що відноситься до точних наук, як зустрінеться знак інтеграла і речення, складовою частиною яких буде слово «інтеграл». Більш того, останнім часом увійшли до ужитку такі терміни, як, наприклад, «інтегральна схема», «економічна інтеграція», які прямого відношення до інтеграла не мають, але смислове навантаження зберігають і знаходять широке розповсюдження в літературі і розмовній мові.

У скарбниці науки і культури є ідеї, які, виникнувши в глибокій старовині, розвиваючись і удосконалюючись, пройшли через віки і успішно служать людству зараз. До них безумовно слід віднести ідею інтеграла в математиці.

Аналіз досліджень і публікацій. Початки інтегральних методів простежуються в працях Архімеда, що користувався ними при вирішенні багатьох геометричних завдань і доведенні теорем. У книгах з історії математики відповідні розділи так і називаються – «Інтегральні методи Архімеда». Вдосконалення методів Архімеда, створення інтегрального числення та його розвиток здійснювалися в роботах Кеплера, Кавальєрі, Торрічеллі. Паскаля, Ферма, Валліса, Роберваля, Барроу, Ньютона, Лейбніца, братів Якоба і Іоганна Бернуллі, Ейлера, Коші, Рімана.

У певний період свого розвитку математика підійшла до такого рубежу, коли назріла необхідність вирішення насущних завдань, пов'язаних з фундаментальними відкриттями. Одними і тими ж завданнями займалися часто багато математиків, і встановити пріоритет, вказати, хто перший зробив те або інше відкриття, скрутно.

Актуальність даної теми зумовлена тим, що тільки глибоке дослідження історичного розвитку теми уможливлює її найкраще осмислення, усвідомлення [5].

Метою статті стало визначення основних періодів інтенсивного розвитку, визначення вчених, чий вклад у розвиток інтегрального числення приніс потужні результати. У процесі досягнення мети ми розв’язували такі завдання: дослідження та аналіз джерел інформації; визначення вчених, які досліджували та розвивали цю сферу математики; визначення основних періодів розвитку поняття інтеграл.

Інтегрування простежується ще в давньому Єгипті, приблизно в 1800 році до н. е., Московський математичний папірус демонструє знання формули об'єму зрізаної піраміди. Першим відомим методом для розрахунку інтегралів є метод вичерпання Евдокса (приблизно 370 до н. э.), який намагався знайти площі і об'єми, розриваючи їх на нескінченну безліч частин, для яких площа або об'єм вже відомі.

Архімед удосконалив метод вичерпання Евдокса і успішно користувався ним при доведенні багатьох теорем. За допомогою методу вичерпання Архімед оримав, наприклад, такі найважливіші результати: площа сегменту параболи рівна 4/3 площі вписаного в нього трикутника; об'єм кулі рівний збільшеному учетверо об'єму конуса, у якого основою служить великий круг кулі, а висотою його радіус; площа поверхні кулі рівна збільшеній учетверо площі великого круга. Архімед застосовував метод вичерпання не тільки для встановлення нових фактів, а і обґрунтування відомих раніше, але не доведених.

Далі Архімед повідомив, що він опублікує цей метод, бажаючи здійснити колишні згадки про нього і з метою допомогти сучасним і майбутнім математикам в нових відкриттях.

У праці «Про квадратуру параболи» Архімед при обчисленні площі параболічного сегменту розглядав його і відповідний трикутник як «суми відрізків», а об'єми — як «суми площ» Він встановив об'єми кулі і кульового сегменту, еліпсоїда обертання, параболоїда обертання, центрів тяжіння фігур і тіл; розглянув задачу про знаходження об'єму «циліндрового копита» — тіла, отриманого при перетині циліндра площиною, що проходить через діаметр основи, і «монастирського зведення» — частини простору, що висікається двома рівними циліндрами, осі яких перпендикулярні. Об'єм «циліндрового копита» Архімед знаходив за допомогою принципу важеля, після чого проводив геометричне доведення.

Дуже важливим для становлення інтегрального числення було удосконалення Архімедом ідеї Демокріта про розбиття плоских фігур на елементарні смужки, що «заповнюють» фігури, і тіла на шари, що заповнюють їх. Таких елементарних частин могла бути нескінченна множина або скінченне число. Цими діями Архімед передував ідеям Кеплера і Кавальєрі у визначенні числових характеристик різних геометричних об'єктів. У Кавальєрі навіть деякі вирази співпадають з тими, які вживав Архімед: обидва говорили про всі лінії, що заповнюють плоску фігуру, і про всі плоскі перерізи, що заповнюють об'єм.

Метод інтегральних сум розроблений Архімедом і застосований до обчислення площ і об'ємів в його творах «Про кулі та циліндри», «Про коноїди та сфероїди», «Про спіралі». У XIX книзі «Про коноїди та сфероїди» він видозмінив лему Евдокса і цією формою користувався згодом: «Якщо дано сегмент якогось із коноїдів, відсічений перпендикулярною до осі площиною, або ж сегмент якогось із сфероїдів, не більший половини цього сфероїда і точно так же відсічений, то можна вписати в нього тілесну фігуру і описати навколо нього іншу, що складається з циліндрів, які мають однакову висоту, і до того ж так, щоб описана фігура була більше вписаною на величину, меншу будь-якої заданої тілесної величини» [1, 195].

Отже, вперше ідею інтегрування ми знаходимо в працях Архімеда. Вона виникла з потреб практики і ніяк не була вільним творінням розуму.

У XVII ст. велика група математиків займалася такими основними завданнями: проведенням дотичної до кривої, що привело до виникнення диференціального числення, і обчисленням квадратури, що спричинило виникнення інтегрального числення. Заслуга Ньютона і Лейбніца полягала у відшуканні внутрішнього зв'язку між цими задачами, синтез яких і був основою для створення могутнього знаряддя науки і наукового природознавства. Користування теоремою про взаємну оберненість операцій диференціювання і інтегрування і знання похідних багатьох функцій дали Ньютону можливість за флюксіями отримувати флюєнти (функції), тобто інтегрувати.

У «Методі флюксій» Ньютон помістив дві таблиці невизначених інтегралів; у одній з них містяться інтеграли, що алгебраїчно виражаються в кінцевому вигляді, в іншій – інтеграли, що виражаються через відомі. У «Роздумах про квадратуру кривих» Ньютон навів «Таблицю простих кривих, порівнянних з гіперболою і еліпсом», де вказав випадки інтегралів, раціональних відносно x і $\sqrt{e+fx+gx^2}$ (або що приводяться до них при $x=2^n$). Умови інтегровності диференціального бінома $x^m(a+bx^n)^p dx$ він повідомив Лейбніцу в листі 24 жовтня 1676 року, вказавши, що $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ виражається алгебраїчно, коли $(m+1)/n$, або $\frac{m+1}{n}+p$ або p – цілі невід’ємні числа.

Спрямлення кривих Ньютон здійснював приведенням до квадратури. У «Аналізі за допомогою рівнянь» він розглянув інтеграл $\int\frac{\sqrt{1+ax^2}dx}{\sqrt{1-bx^2}}$, який, за його словами, «дає довжину еліпса». Це – перший випадок еліптичного інтеграла. Для його обчислення Ньютон розклав чисельник і знаменник в ряди, розділив чистильник на знаменник і проінтегрував ряд почленно. Це дало вираз еліптичного інтеграла у вигляді ряду:

$$\int\frac{\sqrt{1+ax^2}dx}{\sqrt{1-bx^2}}=x+\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{6}\right)x^3+\cdots$$

Ньютон широко користувався також прийомом звернення рядів, тобто отриманням з ряду для y по степенях x ряду для x по степенях y. З цією метою він застосовував метод невизначених коефіцієнтів і послідовних наближень. Ньютон застосовував свої методи до обчислення площ, до спрямлення кривих, до кубатур, до обчислення координат центрів тяжіння; він чітко уявляв, що всі ці операції здійснюються за єдиним загальним принципом.

Необхідно відзначити, що ні у Ньютона, ні у Лейбніца не було формули:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),\ \text{де}\ F'(x)=f(x),$$

званою зараз формулою Ньютона – Лейбніца. Але це правило вони знали. Ньютон писав: «...для отримання належного значення площі, прилеглої до деякої частини абсциси, цю площу завжди слід брати рівній різниці значень z, відповідних частинам абсцис, обмеженим початком і кінцем площі».

Інтеграл Лейбніц розумів як суму нескінченного числа доданків – як визначений інтеграл. У одному з рукописів є запис $\int dx=x$. Це означає, що взаємна оберненість дій диференціювання і інтегрування у Лейбніца виступали на оперативному рівні. Лейбніц замість слова «інтеграл» вживав «сума»; термін «інтеграл» ввів І. Бернуллі.

Восени 1675 року Лейбніц сформулював основні поняття диференціального і інтегрального числення. Він дав загальні правила розв’язання задач на квадратуру і дотичні, встановив зв'язок між задачами диференціювання і інтегрування, ввів символіку обох операцій, що збереглася понині.

Дві роботи (1701 і 1703 рр.) Лейбніц присвятив інтегруванню раціональних дробів. Для інтегрування раціонального дробу він виділяв з нього цілу частину, після чого правильний раціональний дріб представляв у вигляді суми простіших. У зв’язку з інтегруванням раціональних дробів в аналіз увійшли комплексні числа і виникла суперечка про логарифми від’ємних чисел.

Відкриття Ньютона і Лейбніца зробило переворот в математиці. Якщо раніше вона була доступна лише вузькому кругу фахівців, які розв’язували кожне окреме завдання придуманими ними методами, то після створення алгоритму диференціального і інтегрального числення, застосовного до широкого кола задач, математика стала інструментом в руках дослідників, які не володіють достатньо глибокими математичними знаннями.

Творчість Коші і Романа протікало тоді, коли в суспільному житті, природознавстві і математиці відбулися істотні зміни, зросла роль математики в системі наук. Дослідженню спеціальних інтегралів присвятили свої праці Лагранж, Лаплас, Пуассон, Коші.

Питання існування інтегралів в творчості Коші вперше обговорювалися в його мемуарі 1814 р., в якому були відмічені парадоксальні властивості деяких подвійних інтегралів. Таким чином, розвиток математики висував необхідність перегляду концепції інтеграла, і це було виконано Коші.

Виходячи із визначення інтеграла і неперервності функцій Коші довів наступні властивості визначених інтегралів:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$,

2) $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$,

3) ${}_{a}^{b} f\ \ x \pm \alpha\ \ dx = {}_{a\pm\alpha}^{b\pm\alpha} f\ \ x\ \ dx,$

4) ${}_{a}^{b} f\ \ x\ \ dx = \ b - a\ \ f\ \ a + \theta\ \ b - a\ \ \ , 0 \leq \theta \leq 1,$

5) ${}_{a}^{b}\ \ \ c_i f_i\ \ x\ \ \ dx = \ \ c_i\ {}_{a}^{b} f_i\ \ x\ \ dx,$

6) ${}_{a}^{b} f\ \ x\ \ dx = \ \ {}_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f\ \ x\ \ dx, a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b,$

7) коли функція $\varphi\ \ x$ зберігає знак на $\ a; b\ \ $, буде ${}_{a}^{b} \varphi\ \ x\ \ \psi\ \ x\ \ dx = \varphi\ \ \xi\ \ \ {}_{a}^{b} \psi\ \ x\ \ dx, a \leq \xi \leq b.$

Невизначений інтеграл Коші вів як частинний випадок визначеного, при змінній верхній межі. Він довів неперервність такого інтеграла по верхній межі і теорему про те, що похідна його по верхній межі рівна підінтегральній функції. Коші довів також справедливість формули Ньютона-Лейбніца. Він висловив положення, пов'язані з диференціюванням і інтегруванням по параметру.

Здається, зовсім мало часу пройшло після введення Коші визначеного інтеграла, але знову виникають мотиви, що вимушують переглядати, уточнювати це поняття, і знову наполегливо працює розум математиків. І поставити останню крапку про «пригоди» ідеї інтеграла випало Ріману. Тільки не слід думати, що розвиток поняття інтеграла закінчився з роботами Рімана. Його творчістю завершився шлях до інтеграла і почався шлях інтеграла, не менш цікавий і істотний для науки.

Як видно з попереднього, різні причини спонукали математиків займатися інтегралом. Для Рімана таким джерелом були тригонометричні ряди: визначений інтеграл з'явився у нього при розв’язанні задачі про розкладання довільної функції в тригонометричний ряд. Отже, ось перше питання: що потрібно розуміти під знаком ${}_{a}^{b} f\ \ x\ \ dx$?

Побудова інтеграла Рімана така. Розглянемо функцію $f\ \ x$ на проміжку $\ a; b\ $. Розіб'ємо проміжок довільним чином точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$на частини. Позначимо найбільшу з різниць $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$через λ. На кожному з часткових проміжків $\ x_i, x_{i+1}\ $ виберемо довільно точки $x = \xi_i$ і обчислимо значення функції $f(\xi_i)$ у цих точках. Складемо тепер суму $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Її називають рімановою, частіше інтегральною.

Кінцева границя інтегральної суми при $\lambda \to 0$ називається визначеним інтегралом від $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ і позначається $\int_a^b f(x)dx$. Коли така границя існує, функція називається інтегрованою на $[a;b]$. Ріман встановив необхідний і достатній критерій інтегрованості функції.

Дослідження інтеграла після Рімана не припинилися, а пішли прискореним темпом. Якби перерахувати лише математиків, що зробили значний внесок в теорію інтеграла в другій половині XIX і в XX ст., то це зайняло б багато місця. І книга, присвячена шляху інтеграла від Рімана, скажімо, до середини XX ст., вийшла б значною. Інтеграл був, є і буде стрижньовим поняттям в математиці.

Для подальших узагальнень інтеграла усередині самої математики повинні були дозріти умови, що допускають це. Такі умови створила розроблена в кінці XIX ст. і початку XX ст. теорія множин, з найважливішим поняттям міри множини. Виникло нове поняття – інтеграл Лебега, узагальнений інтеграл Рімана. Лебег ввів дескриптивне визначення інтеграла: сформулював його властивості. Він дав також конструктивне визначення інтеграла – аналітичне і геометричне.

Роботи Лебега послужили значним імпульсом для подальших досліджень в математиці. Теорія міри і інтеграл Лебега служать теоретичним інструментом в сучасній теорії диференціальних рівнянь, теоретичній і математичній фізиці, теорії узагальнених функцій, теорії лінійних операторів і спектральної теорії, теорії ймовірності, теорії випадкових процесів і інших розділах математики.

Майже одночасно з Лебегом при рішенні задачі про розподіл маси $\varphi(x)$ на інтервалі $[0,x)$ узагальнення інтеграла Рімана здійснив Т. Стілтьєс. Введення інтеграла Стілтьєса (1856-1894) також привело до нових робіт, присвяченим його властивостям, різним застосуванням, з'ясуванню зв'язку інтеграла Стілтьєса з інтегралами Рімана і Лебега.

У 1912 році з'явилося узагальнення інтеграла Лебега – інтеграл А. Данжуа (1884-1973), що викликав новий потік досліджень. У 1930 р. А.І. Колмогоров (р. 1903) опублікував роботу, в якій охоплені всі інтеграли як границі різних інтегральні сум. Інтеграл Колмогорова знайшов застосування в математичній фізиці, при математичному обґрунтуванні квантової механіки.

У розвиток поняття інтеграла, окрім Колмогорова, внесли великий внесок і інші вітчизняні математики. Вони зробили першочергової важливості відкриття. Це П.Л. Чебишов, А.А. Марков (1856-1922), А.М. Ляпунов, II.Н. Лузін (1883-1950), А.Я. Хінчін (1894-1959). У теорії функцій А.Я. Хінчін одночасно з Данжуа створив теорію апроксимативних похідних і узагальнив поняття інтеграла.

Свої дослідження з асимптотичних похідних Хінчін використовував (1916 р.) для узагальнення інтеграла Данжуа. Він знайшов необхідну і достатню умови для того, щоб інтеграл Данжуа був первісною функцією, а також зняв обмеження, накладене Данжуа на застосування свого інтегрального процесу, і в результаті отримав інтеграл, що дозволяє відновлювати елементарну функцію по її асимптотичній похідній. Трохи згодом сам Данжуа опублікував таке ж узагальнення, але пріоритет належить Хінчину, хоча в світовій літературі цей інтеграл носить ім'я Данжуа – Хінчина [2, 442].

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження

1. Розглянуто основні етапи розвитку поняття інтеграл та визначені вирішальні умови його виникнення та розвитку;
2. Детально описані найперші способи інтегрального числення: метод Евдокса та механічний метод Архімеда;
3. З’ясовано походження символу інтеграла, його перше вживання в літературі;
4. Описано основні ідеї та здобутки вчених в області інтегрального числення, що стали вирішальними та значущими для подальших досліджень;
5. Робота може бути корисною для учнів старших класів при вивченні теми «Інтеграл», для студентів фізико-математичного факультету при вивченні курсу «Історія математики», «Історія сучасної математики», для викладачів ВНЗ.

Список використаної літератури

1. Архимед. Сочинения // Нор., ст. и коммент. И. Н. Веселевского. Москва, Физматгиз, 1962, с. 213.
2. История отечественной математики. Київ, Наукова думка, 1967, Т. 2, с. 616.
3. В. А. Никифоровский. Путь к интегралу. Москва, Наука, 1985, 192 с.
4. Інтеграл [Електронний ресурс] Назва з екрана: *https://uk.wikipedia.org/wiki/Інтегралhttps://uk.wikipedia.org/wiki/Інтеграл*
5. Ріжняк Р.Я. Розвиток інформатики та інформаційних технологій у вищих навчальних закладах України у другій половині XX – на початку XXI століття. Кіровоград, Видавництво «Код», 2014, 436 с.