УДК 37.091.322:519.6

ІНТЕГРАТИВНИЙ ПІДХІД У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ»

Шевчук Марія, Нічишина Вікторія

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті проілюстровано тенденції до змін у навчанні молодого покоління. Якщо до недавнього часу більшість кадрів в науці і в народному господарстві складали фахівці вузького профілю, то на сучасному етапі розвитку суспільства представники різноманітних галузей матеріальної і пізнавальної діяльності дедалі частіше стикаються з необхідністю долати вузькі межі спеціалізації, змінювати стиль мислення і оволодівати інструментарієм та мовою суміжних наук, відшукуючи на шляху інтегрування нові, невідомі раніше, потужні резерви для розв'язування поставлених розвитком пізнання завдань. Тому останнім часом все більшим попитом користуються фахівці широкого профілю, які могли б відповідати потребам здійснення інтегративних тенденцій у всіх сферах людської діяльності, поєднувати декілька спеціальностей, суміщати виконавську, управлінську та творчу діяльність, враховувати інтегративні зміни в інструментарії, які могли б здійснювати комплексні дослідження, долати межі між різними сферами людської діяльності, розглядати складні об'єкти буття як цілісні явища. Предметна відокремленість дедалі гостріше стає однією з причин фрагментарності світогляду, що спричиняє труднощі і недоліки в організації ефективного вивчення програмного матеріалу, а саме: дублювання та розрізненість споріднених понять у суміжних навчальних дисциплінах. Це, в свою чергу, є причиною відсутності мотивації до вивчення навчальних дисциплін.

Ключові слова: інтеграція, інтегративний підхід, факультатив, факультативний курс, метод математичної індукції.

Integrated approach in studing theme "mathematical induction method"

M. Shevchuk, V. Nichyshyna

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

The next article illustrates the tendencies for changes in teaching young generation. Most of the human resources in science and national economy used to be narrow profile specialists, however, nowadays the society on its present stage of development represents various branches of material and cognitive activity are increasingly faced with the need to overcome the narrow boundaries of specialization, in order to change the style of thinking and master the tools and

language of related sciences,to look for a way to integrate new, previously unknown, powerful reserves for solving the challenges posed by the development of knowledge. So, in recent years, broad profile specialists of a who are able to meet the needs for implementing integrated tendencies in all spheres of human activity, combine several specialties, combine executive, managerial and creative activities, take into account integrated changes in the tools that could carry out comprehensive research, to overcome the boundaries between different spheres of human activity, to consider complex objects of being as integral phenomena. Subject separation becomes more and more becoming one of the reasons for the fragmentation of the worldview, which causes difficulties and disadvantages in organizing an effective study of the program material, namely, the duplication and differentiation of related concepts in related disciplines. That is the reason for the lack of motivation to study the disciplines.

Key words: integration, integrative approach, elective, elective course, mathematical induction method.

В основі будь-якого математичного дослідження лежать дедуктивний і індуктивний методи. Дедуктивный метод міркувань – це міркування від загального до окремого, тобто, міркування, вихідним моментом якого є загальний результат, а заключним моментом – частковий результат. Індукція застосовується під час переходу від часткових результатів до загальних, тобто, є методом, протилежним дедуктивному.

Метод математичної індукції можна порівняти з прогресом. Розпочинаючи з нижчого, внаслідок логічного мислення доходимо до вищого. Людина завжди жадала прогресу, уміння розвивати свою думку логічно, отже, сама природа визначила їй розмірковувати індуктивно.

Інтегративні тенденції, які спостерігаються в усіх сферах розвитку суспільства зумовилюють зміну стратегії системи освіти.

Основним недоліком, що пов’язаний з труднощами реалізації у школі цілеспрямованого формування цілісної системи знань в учнів, є формальна роздрібненість споріднених дисциплін в навчальних планах загальноосвітніх навчальних закладів освіти, недостатнє використання міжпредметних зв’язків в навчальному процесі. Це призводить до того, що синтез пропонованої навчальної інформації стихійно покладається на самих учнів, і, якщо навіть вони його здійснюють, то ефект буває незначним [4, 20].

Відсутність цілісного розуміння суб’єктами учіння предметів і явищ, на думку М. Г. Іванчук [2, 14], зумовлена науковим підходом, який традиційно склався у нашій пізнавальній культурі. Наука, прагнучи пізнати глибинні закони та закономірності навколишнього світу, змушена диференціюватися, розділяючи окремі предмети пізнання. Вона подрібнює цілісний світ, вихоплює одну із його сторін, і, абстрагуючись від інших, досліджує її. Такий методологічний підхід був перенесений у побудову освітнього процесу. Певним наукам однозначно відповідають фундаментальні навчальні дисципліни. При цьому будь-який предмет як цілісне утворення розривається на окремі “шматки” (властивості), які не узгоджуються й ізольовано вивчаються у різних навчальних курсах так і залишаючись розрізненими знаннями, які інтегрувати в систему учень об’єктивно не може.

Вважається, що поняття "інтеграція" було впроваджено в науку в 1957 році англійським вченим Спенсером і розуміння його було в механічному об'єднанні і комбінації роз'єднаних елементів [5, 16].

Поняття “інтеграція” на сьогоднішній день є предметом дослідження багатьох вчених: філософів, психологів, педагогів.

Слід зазначити, що у вивченій літературі сутність поняття “інтеграція” визначається у контексті явищ, для позначення яких вживаються поняття “єдність”, “цілісність”, “синтез”, “система”.

Визначальними для нашого дослідження вважаємо такі аспекти поняття «інтеграція»:

– встановлення єдності різноманітного, тобто всебічний розгляд процесів і явищ, які вивчаються спорідненими навчальними предметами;

– структурування навчального матеріалу споріднених навчальних предметів в узагальнені комплекси знань із встановленням істотних зв’язків;

– реалізація принципу доповнення в навчальному пізнанні.

Ще в кінці XIX і початку XX ст. деякі педагоги зрозуміли, що викладання в загальноосвітній школі будь-якого предмета за обов'язковою єдиною загальнодержавною програмою стає більш успішним, якщо його доповнити циклом необов’язкових для учнів, призначених тільки для бажаючих, позапрограмних групових занять.

Такі заняття повинні були насамперед враховувати «місцеві умови», а саме: реальні потенційні запити й інтереси конкретного колективу учнів даного класу, реальні можливості конкретного учителя викликати і розвити інтерес учнів до важливих аспектів даного предмета, неохоплених обов'язковою програмою. Так виникла ідея факультативних занять в школі.

З тлумачного словника Д.І. Ушакова: факультативний – необов'язковий, наданий власному виборові.

Організація факультативних занять є одним з основних питань методики, рішення якого повинно йти від змісту курсу і від мети профорієнтаційної роботи з урахуванням таких аспектів, як індивідуалізація навчання, стимулювання навчальної діяльності школярів, контроль знань учнів, що випереджають дослідження з конструювання нових методичних підходів до навчання [5, 45].

Разом з тим основним завданням на факультативі залишається завдання виховання. Важливо, щоб на факультативних заняттях була створена атмосфера, що виводить учня зі звичних і, деякою мірою, рамок типового, що приїлися, школярства. Конкретними методичними рішеннями проблеми стимулювання навчальної діяльності школяра можуть стати: оцінка діяльності тільки при гарній успішності, організація заліків учнів по цілих темах у вигляді виконання навчальної задачі, підготовка рефератів тощо.

При виборі методів і прийомів навчання на факультативних заняттях необхідно враховувати зміст факультативного курсу, рівень розвитку і підготовленості учнів, їх інтерес до тих чи інших розділів програми. Одна з найголовніших вимог до методів навчання полягає в активізації мислення учнів, розвитку самостійності в різних формах її прояву.

Слід передбачити також у необхідних місцях виклад проблемних задач, цикли для самостійного розв’язування, задачі для закріплення і формування навичок, задачі на дослідження.

Добре відомо, що цікавий виклад допомагає розкрити зміст складних наукових понять і проблем. Цікавість допоможе школярам освоїти факультативний курс, ідеї і методи математичної науки, які містяться в ньому, логіку і прийоми творчої діяльності. У цьому відношенні мета вчителя – домогтися розуміння учнями того, що вони підготовлені до роботи над складними проблемами, однак для цього необхідні зацікавленість предметом, оволодіння навичками організації своєї роботи.

Метод математичної індукції відіграє істотну роль у вищій математиці, будучи сильним знаряддям у математичних доведеннях і при розв'язуванні різноманітних задач. Також метод математичної індукції часто застосовується для розв'язання алгебраїчних, арифметичних і геометричних задач, саме він дозволяє коротко і строго довести багато теорем.

Індукцією називається будь-яке припущення, яке містить перехід від часткових тверджень до загальних, справедливість яких доводиться із справедливості часткових тверджень. Метод математичної індукції є особливим методом математичного доведення, який дозволяє на основі часткових спостережень робити висновки про відповідні загальні закономірності. Ідею цього метода найкраще можна зрозуміти на прикладах [1, 26].

Метод математичної індукції у вирішенні завдань на подільність

<u>Приклад</u>. Якщо n натуральне число, то число $n^2 - n$ парне.

Розв'язання:

При n=1 наше твердження істинне: $1^2 - 1 = 0$ - парне число. Припустимо, що $k^2 - k$ - парне число. Оскільки $(k+1)^2 - (k+1) - (k^2 - k) = 2k$, а 2k - парне число, то і $(k+1)^2 - (k+1)$ парне. Отже, парність доведена при n=1, з парності $k^2 - k$ виведена парність $(k+1)^2 - (k+1)$. Тобто, $n^2 - n$ парне при всіх натуральних значеннях n.

Застосування методу математичної індукції до сумування рядів

<u>Приклад.</u> Довести формулу

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$, n – натуральне число.

Розв'язання:

При n=1 обидві частини рівності обертаються в одиницю і, відповідно, перша умова принципу математичної індукції виконана.

Припустимо, що формула вірна при n=k, тобто

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Додамо до обох частин цієї рівності $(k+1)^3$ і перетворимо праву частину. Тоді отримаємо

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=$$

$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2(k^2+4k+4)=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Таким чином, з того, що формула вірна при n=k, випливає, що вона справедлива і при n=k+1. Це твердження справедливе при будь-якому натуральному значенні k. Отже, друга умова принципу математичної індукції теж виконана. Формула доведена.

Застосування методу математичної індукції до доведення нерівностей

<u>Приклад.</u> Довести, що при будь-якому натуральному n>1,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

Розв'язання:

Позначимо ліву частину нерівності через S_n.

$S_2=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$, тобто, при n=2 нерівність справедлива.

Нехай $S_k>\frac{13}{24}$ при деякому k. Доведемо, що тоді і $S_{k+1}>\frac{13}{24}$. Маємо

$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}$, $S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+..+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$.

Порівнюючи S_k і S_{k+1}, маємо $S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$, тобто

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

При будь-якому натуральному k права частина останньої рівності правильна. Тому $S_{k+1} > S_k$. Але $S_k > \frac{13}{24}$, отже $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

Обчислення за індукцією

<u>Приклад.</u> Обчислити сторону a_{2^n} правильного 2^n - кутника, вписаного в коло радіуса R.

Доведення:

1°. При $n=2$ правильний 2^n - кутник являється квадратом, його сторона $a_4 = R\sqrt{2}$. Далі згідно формули подвоєння

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}}$$

знаходимо, що сторона восьмикутника $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, сторона правильного шістнадцятикутника $a_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, сторона правильного тридцятидвокутника $a_{32} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. Саме тому можна припустити, що сторона правильного вписаного 2^n - кутника при будь-якому $n \ge 2$ рівна

$$a_{2^n} = R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2 двійок}}$$

2°. Припустимо, що сторона правильного вписаного 2^n-кутника виражається формулой $a_{2^n} = R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2 двійок}}$. В такому випадку за формулою подвоєння

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - R^2\frac{\underbrace{2-\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}_{n-2 двійок}}{4}}} = R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-1 двійок}},$$ звідки

випливає, що формула справедлива для всіх n.

Із формули $a_{2^n} = R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2\,двійок}}$ випливає, що довжина $C = 2\pi R$ круга радіуса R рівна границі виразу $2^n R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2\,двійок}}$ при нескінченому зростанні n, а отже $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{n-1}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2\,двійок}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2\,двійок}}$.

Метод математичної індукції при розв’язуванні геометричних задач

<u>Приклад.</u> Довести, що, якщо a та b – катети, c – гіпотенуза прямокутного трикутника, то для всіх натуральних n ≥ 2 має місце нерівність:

$$a^n + b^n \leq c^n.$$

Доведення:

Якщо n = 2, то $a^2 + b^2 \leq c^2$– правильна нерівність (бо виконується рівність $a^2 + b^2 = c^2$, що виражає теорему Піфагора).

Припустимо, що правильною є нерівність: $a^k + b^k \leq c^k$.

Доведемо, що правильною буде нерівність $a^{k+1} + b^{k+1} \leq c^{k+1}$.

Оскільки a та b – катети, c – гіпотенуза прямокутного трикутника, то a < c, b < c.

Звідси $a \cdot a^k < c \cdot a^k$, $b \cdot b^k < c \cdot b^k$.

Додамо останні дві нерівності $a \cdot a^k + b \cdot b^k < c \cdot a^k + c \cdot b^k$.

$$a^{k+1} + b^{k+1} = a \cdot a^k + b \cdot b^k < c \cdot a^k + c \cdot b^k = (a^k + b^k)c \leq c^{k+1}.$$

Згідно принципу математичної індукції можна зробити висновок про те, що нерівність $a^n + b^n \leq c^n$ правильна $\forall$ n ≥ 2, n $\in$ N; a, b – катети, c – гіпотенуза прямокутного трикутника.

Отже, метод математичної індукції є інтегруючим математичним методом, за допомогою якого можна розв’язувати як алгебраїчні, так і геометричні завдання. А це, в свою чергу, дає можливість розглядати метод математичної індукції як системний, комплексний математичний метод.

Список літератури

1. Горделадзе Ш.Г. и др., Збірник конкурсних задач з математики. – К.: Вища школа, 1976.

2. Іванчук М.Г. Інтегроване навчання: сутність та виховний потенціал.–Чернівці: Рута, 2004.–360 с.

3. Комар О.А. Підвищення ефективності уроків математики через інтегрування змісту навчання /Уманськ.держ.пед.ун-т ім.П.Тичини.-К.:Знання, 1998.–96 с.

4. Семенюк Г.Ф. Диференціація та інтеграція змісту освіти //Постметодика.-1994.-№2.-С. 12–16.

5. Федосеев П.Н. Философия и интеграция знания //Вопросы философии.-1987.-№7.