УДК 519.615

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

Харченко Діана

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент Ізюмченко Л. В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглянуті трансцендентні рівняння, що містять логарифмічні, ірраціональні, тригонометричні та показникові функції. Основна увага приділена розв’язанню трансцендентних рівнянь такими чисельними методами: методом поділу відрізка навпіл, методом Ньютона, методом січних, методом хорд та методом ітерацій. Також на етапі відокремлення коренів розглянуто графічний метод. Стаття буде корисна викладачам та студентам, які цікавляться наближеними обчисленнями, прикладною математикою, та вчителям, які ведуть гуртки з математики та інформатики.

Ключові слова: *рівняння, система рівнянь,наближення, корінь рівняння, функція, точність, ітераційний процес.*

Numerical methods for solving transcendental equations

D. Kharchenko

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor Iziumchenko L.V.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article deals with transcendental equations containing logarithmic, irrational, and trigonometric and index functions. The main attention is paid to the solution of transcendental equations by such numerical methods: the method of dividing the segment in half, the Newton method, the method of the cut, the chord method and the iteration method. Also, at the stage of separation of the roots a graphical method is considered. The article will be useful for teachers and students interested in approximate calculations, applied mathematics, and teachers leading math and computer science groups.

Key words: *equation, system of equations, approximation, root of equation, function, accuracy, iterative process.*

Постановка проблеми. Переважна кількість практично важливих задач зводиться до складання нелінійних рівнянь, або їх систем. Крім знаходження коренів алгебраїчних рівнянь, значні труднощі викликає задача знаходження коренів трансцендентних рівнянь виду $f(x)=0$. Трансцендентними називаються рівняння, які містять ірраціональні, показникові, тригонометричні, логарифмічні функції тощо. Оскільки до таких рівнянь аналітичні методи застосуватипрактично неможливо, тому для їх розв'язання використовують чисельні методи.

Аналіз досліджень і публікацій. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь та їх систем досліджували математики Буката Л. М., Вакалюк Т. А., Вержбицький В. М., Возняк Л.С., Гаєвський М. В., Дмитрієва О. А., Задачин В.М., Ізюмченко Л.В., Ісаханов Г.В., Конюшенко І. Г., Кривонос О. М., Ляшенко Б. М., Піддубний Г. В., Петренко А. І.,Трофименко О. Г., Фельдман Л. П., Шаповаленко В. А. та ін.

Метою роботи є дослідження та розв'язання трансцендентних рівнянь чисельними методами.

На етапі відокремлення коренів для трансцендентних рівнянь зручніше використовувати графічний метод.

Розв'яжемо декілька трансцендентних рівнянь різних типів, використовуючи чисельні методи.

Задача 1.Розв'язати трансцендентне рівняння $tg(0,85x+0,1)-x^2=0$ методом поділу відрізка навпіл з точністю $\varepsilon=0.001$.

Перепишемо рівняння $f(x)=0$ у вигляді $tg(0,85x+0,1)=x^2$ та побудуємо в одній системі координат два графіка $\begin{cases} y=x^2, \\ y=tg(0,85x+0,1). \end{cases}$

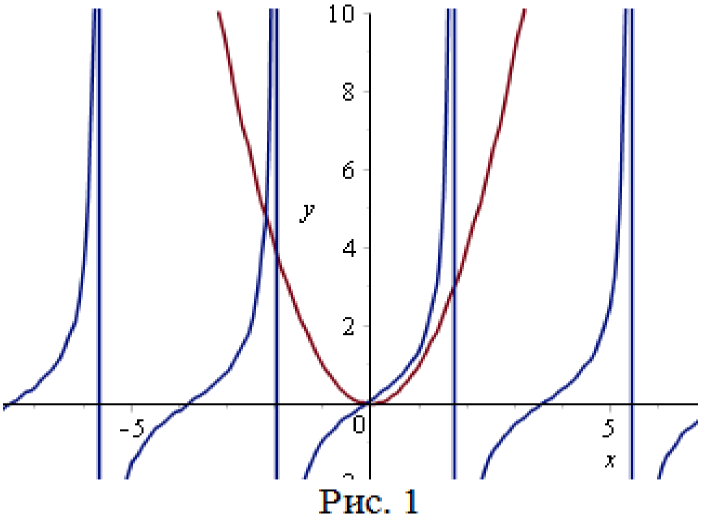

Рис. 1

Графіки мають безліч точок перетину, уточнимо один з коренів, який знаходиться на проміжку $x_1\in(-0,3;0)$.

Знайдемо значення функції $f(x)=tg(0,85x+0,1)-x^2$ на кінцях відрізка та в його середині, отримаємо перше наближення:

$$f(-0,3)=tg(0,85(-0,3)+0,1)-(-0,3)^2\approx -0,24625,$$

$$f(0)=tg(0,1)-0^2\approx 0,100335,\ c_1=\frac{-0,3+0}{2}=-0,15,$$

$$f(-0,15)=tg(0,85(-0,15)+0,1)-(-0,15)^2\approx -0,015001$$

На новому відрізку функція повинна приймати різні знаки. Оскільки $f(-0,15)f(-0,3)>0$ та $f(-0,15)f(0)<0$, то $a_2=c_1, b_2=b_1$. Наступним відрізком буде відрізок $[-0,15;0]$. Ті самі дії повторюємо для нового відрізка. Процес завершується при виконанні умови: $|a-b|<\varepsilon$, $x^*\approx -0,105$ при $\varepsilon=0,001$.

Усі обчислення представлені в таблиці 1.

N	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$\varepsilon>\lvert a-b\rvert$
0	-0,3	0	-0,15	-0,246253	0,100335	-0,05001	0,3
1	-0,15	0	-0,075	-0,050007	0,100335	0,030641	0,15
2	-0,15	-0,075	-0,1125	-0,050007	0,030641	-0,00828	0,075
3	-0,1125	-0,075	-0,09375	-0,008281	0,030641	0,011526	0,0375
4	-0,1125	-0,09375	-0,103125	-0,008281	0,011526	0,00171	0,01875
5	-0,1125	-0,103125	-0,1078125	-0,008281	0,00171	-0,00326	0,00937
6	-0,107813	-0,103125	-0,1054688	-0,003264	0,00171	-0,00077	0,00469
7	-0,105469	-0,103125	-0,1042969	-0,000772	0,00171	0,00047	0,00234
8	-0,105469	-0,104297	-0,1048828	-0,000772	0,00047	-0,00015	0,00117
9	-0,104883	-0,104297	**-0,1045898**	-0,00015	0,00047	0,00016	0,00059

Таблиця 1. Уточнення кореня методом поділу відрізка навпіл.

Задача 2. Уточнити один з коренів рівняння $\sin(2x)-x^2+6=0$ методом хорд з точністю $\varepsilon=0.001$.

Перепишемо наше рівняння $f(x)=0$ у вигляді $\sin(2x)=x^2-6$ та побудуємо в одній системі координат два графіка $\begin{cases} y=\sin(2x), \\ y=x^2-6. \end{cases}$

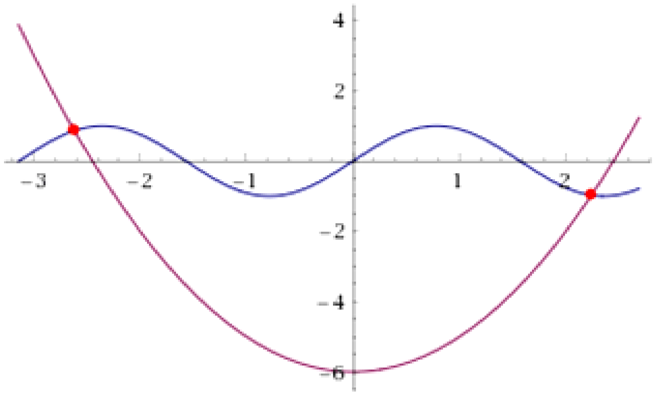

Рис.2.

Графіки перетинаються в двох точках (рис. 2). Уточнимо додатний корінь, який належить проміжку $(2;2,5)$.

Знайдемо першу та другу похідні функції $f(x)=\sin(2x)-x^2+6$ та значення цих похідних на кінцях відрізка:

$$f'(x)=-2x+2\cos(2x),\ f''(x)=-2-4\sin(2x),$$

$$f'(2)=-4+2\cos(4)\approx-5,30729,\ f''(2)=-2-4\sin(4)\approx1,02721,$$

$$f'(2,5)=-5+2\cos(5)\approx-4,43268,\ f''(2,5)=-2-4\sin(5)\approx1,835697.$$

Визначимо умову зупинки ітераційного процесу. Найменше m_1 і найбільше M_1 значення модуля першої похідної маємо на кінцях відрізка: $m_1 = f'(2)=1,02721$, $M_1 = f'(2,5)=1,835697$, а тому умова зупинки ітераційного процесу: $|x_n-x_{n-1}|\le\dfrac{m_1}{M_1-m_1}\cdot\varepsilon$, $|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon<1,271\cdot\varepsilon$.

Знайдемо значення функції на кінцях відрізка:

$$f(2)=\sin(2\cdot2)-2^2+6\approx1,2431975,$$

$$f(2,5)=\sin(2\cdot2,5)-2,5^2+6\approx-1,20892.$$

Оскільки $f(2,5)f''(2,5)<0$ та $f(2)f''(2)>0$, то нерухомою точкою буде $c=2$. Отже, усі наближення ми будемо знаходити з боку кінця «b» (з надлишком), а нерухомим кінцем буде початок «a». Послідовність $\{x_k\}$ обчислюємо за формулою: $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)\cdot(x_k-c)}{f(x_k)-f(c)}$, де $k=0,1,2,....$, $c=2$, $x_0=2,5$. Усі обчислення представлені у таблиці 2. $x^*\approx2,242$ при $\varepsilon=0,001$.

N	x	$f(x)$	$f(c)$	c	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
1	2,5	-1,20892	1,243198	2	-
2	2,25349424	-0,05722	1,243198	2	0,246505758
3	2,24234098	-0,00228	1,243198	2	0,011153259
4	**2,24189741**	-9E-05	1,243198	2	0,000443571

Таблиця 2. Уточнення кореня методом хорд.

Задача 3. Розв'язати трансцендентне рівняння $\ln x-(x-1)^2+0{,}15=0$ методом Ньютона з точністю $\varepsilon=0.001$.

Перепишемо наше рівняння $f(x)=0$ у вигляді $\ln x=(x-1)^2-0{,}15$ та побудуємо в одній системі координат два графіка $\begin{cases} y=\ln x, \\ y=(x-1)^2-0{,}15. \end{cases}$ Графіки перетинаються в двох точках (рис. 3).

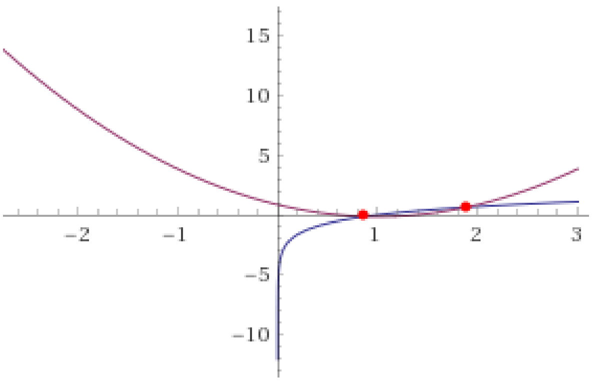

Рис.3.

Уточнимо перший корінь, який належить проміжку $(0{,}5;1{,}3)$.

Знайдемо другу похідну функції $f(x)$: $f''(x)=-2-\dfrac{1}{x^2}$. Очевидно, друга похідна менша за нуль для усіх допустимих значеннях змінної. Знайдемо значення функції на кінцях відрізка:

$$f(0{,}5)=\ln(0{,}5)-(0{,}5-1)^2+0{,}15\approx-0{,}79315,$$

$$f(1{,}3)=\ln(1{,}3)-(1{,}3-1)^2+0{,}15\approx0{,}322364.$$

Перша і друга похідні зберігають сталий знак на проміжку. Оскільки $f(0{,}5)f''(0{,}5)>0$, то за початкове наближення беремо точку $x_0=0{,}5$.

Ітераційний процес виконуємо за формулою: $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k=0,1,2,...$

Обчислимо перше наближення: $x_1=0{,}5-\dfrac{f(0{,}5)}{f'(0{,}5)}=0{,}5-\dfrac{-0{,}79315}{3}\approx0{,}76438.$

Процес завершується при виконанні умови: $\left|\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right| < \varepsilon$.

Розрахунки наведені в нижче в таблиці 3.

N	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\left\|\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right\|$
1	0,5	-0,79315	3	0,264382
2	0,764382	-0,1742	1,779481	0,097895
3	0,862278	-0,01715	1,435164	0,011947
4	0,874224	-0,00024	1,395423	0,00017
5	**0,874395**	-4,8E-08	1,394859	3,44E-08

Таблиця 3. Уточнення кореня методом Ньютона.

Для співпадання трьох знаків після коми нам довелося виконати п'ять ітераційних процесів.

$x^* \approx 0,874$ при $\varepsilon = 0,001$.

Задача 4. Розв'язати рівняння $((x-2)^2-1)2^x = 1$ методом ітерацій з точністю $\varepsilon = 0.001$.

Перепишемо наше рівняння $((x-2)^2-1)2^x = 1$ у вигляді $(x-2)^2 - 1 = \dfrac{1}{2^x}$ та побудуємо в одній системі координат два графіка

$$\begin{cases} y = (x-2)^2 - 1, \\ y = 2^{-x}. \end{cases}$$

Графіки перетинаються у трьох точках (рис. 4).

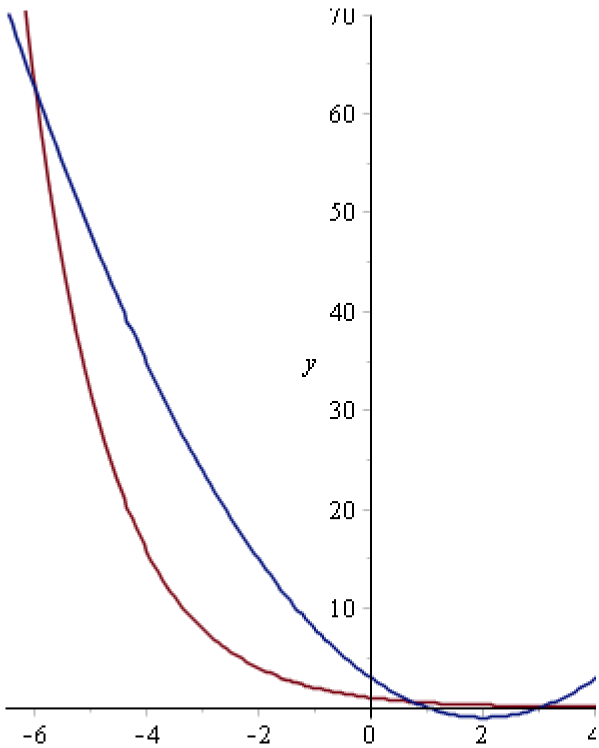

Рис. 4.

Уточнимо більший корінь, який належить проміжку $(2,5;3,5)$.

Знайдемо похідну нашої функції:

$$f'(x) = ((x-2)^2 - 1)2^x - 1 = ((x-2)^2-1)'2^x + ((x-2)^2-1)(2^x)' =$$

$$= 2(x-2)2^x + ((x-2)^2-1)2^x \ln(2) = 2^x(2(x-2) + ((x-2)^2-1)\ln(2))$$

Знайдемо її найбільше за модулем значення – досить знайти значення на кінцях проміжку. Знайдемо значення похідної на кінцях відрізка:

$$f'(2,5) = 2^{2,5}(2(2,5-2) + ((2,5-2)^2-1)\ln(2)) \approx 2,71608,$$

$$f'(3,5) = 2^{3,5}(2(3,5-2) + ((3,5-2)^2-1)\ln(2)) \approx 43,74371.$$

Функція $f'(x)$ монотонно зростає на вказаному проміжку.

Знайдемо тепер λ:

$$\lambda \le \frac{2}{43,74371} \approx 0,04572$$

Оберемо $\lambda = 0,04$. Тоді рівняння $f(x) = 0$ перепишеться $x = \varphi(x)$, $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ або $x = x - 0,04(((x-2)^2-1)2^x - 1)$, де $\varphi(x) = x - 0,4(((x-2)^2-1)2^x - 1)$.

Ітераційні формули мають вигляд: $x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k = 0,1,\ldots$.

N	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_n - x_{n+1}\rvert$
0	2,5	2,7097056	-
1	2,709706	2,8795797	0,1698741
2	2,87958	2,9862083	0,1066285
3	2,986208	3,0348907	0,0486824
4	3,034891	3,0516149	0,0167242
5	3,051615	3,0564946	0,0048796
6	3,056495	3,057832	0,0013374
7	**3,057832**	3,0581917	0,0003597

Таблиця 4. Уточнення кореня методом ітерацій.

Для співпадання трьох знаків після коми нам довелося виконати сім ітераційних кроків.

$x^* \approx 3,058$ при $\varepsilon = 0,001$.

Задача 5. Уточнити корінь рівняння $\sqrt{3}x^3 + 2\sqrt{3}x^2 - \sqrt{6x+3} = 0$ комбінованим методом на проміжку $0,5;1$ з точністю $\varepsilon = 0.001$.

Перепишемо наше рівняння у вигляді $\sqrt{3}x^3 + 2\sqrt{3}x^2 = \sqrt{6x+3}$ та побудуємо в одній системі координат два графіка $\begin{cases} y = \sqrt{3}x^3 + 2\sqrt{3}x^2, \\ y = \sqrt{6x+3}. \end{cases}$ Графіки перетинаються в двох точках (рис. 5).

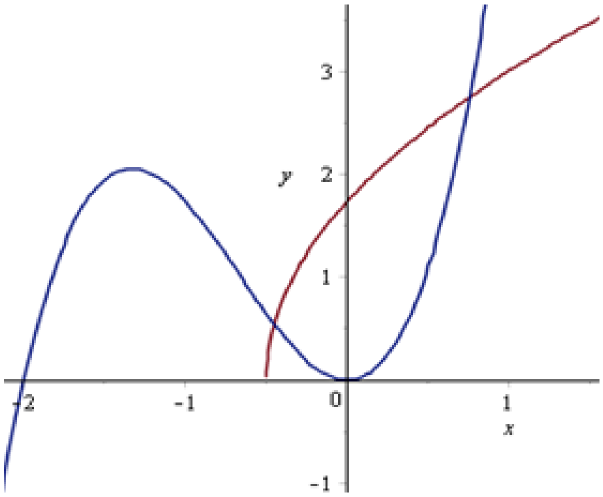

Рис. 5.

Уточнимо другий корінь, який належить проміжку $(0,5;1)$.

Для того, щоб правильно обрати початкові наближення b_0 і a_0, знайдемо значення функції та її другої похідної на кінцях проміжку $0,5;1$:

$$f'(x) = 3\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{3}x - \frac{3}{\sqrt{6x+3}}, \quad f''(x) = 6\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} + \frac{9}{\sqrt{(6x+3)^3}},$$

$$f(0,5) = \sqrt{3}(0,5)^3 + 2\sqrt{3}(0,5)^2 - \sqrt{6(0,5)+3} \approx -1,36696,$$

$$f(1) = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6+3} \approx 2,196152,$$

$$f''(0,5) = 0,5 \cdot 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \frac{9}{\sqrt{(6 \cdot 0,5+3)^3}} \approx 12,7367281,$$

$$f''(1) = 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \frac{9}{\sqrt{(6+3)^3}} \approx 17,65384141.$$

У точці 1 значення функції та її другої похідної мають однакові знаки, тому $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Процес завершується при виконанні умови: $|a_k - b_k| < \varepsilon$.Ітераційні формули мають вигляд:

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}, k = 0,1,2,\ldots, \quad b_{k+1} = b_k - \frac{f(b_k)(b_k - a_{k+1})}{f(b_k) - f(a_{k+1})}, k = 0,1,2,\ldots .$$

N	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f'(a_k)$	$\lvert a_k - b_k \rvert$
1	1	0,5	2,196152	-1,36696	11,12436	0,5
2	0,802582	0,743573	0,33116	-0,10417	7,834376	0,059008
3	0,760311	0,758343	0,013884	-0,00022	7,180396	0,001969
4	0,758378	0,758374	2,85E-05	-9,4E-10	7,150903	3,99E-06

Таблиця 5. Уточнення кореня комбінованим методом.

$x^* \approx 0{,}758$ при $\varepsilon = 0{,}001$.

Задача 6. Уточнити корінь трансцендентного рівняння $9 - x^2 - e^x = 0$ методом січних на проміжку $1;2$ з точністю $\varepsilon = 0.001$.

За перші два наближення візьмемо точки: $x_{k+1} = 1$, $x_k = 2$. Ітераційний процес виконуємо за формулою:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, k = 0,1,2,...$$

Процес завершується при виконанні умови: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

Обчислення кореня $x^* = 1{,}7696 \pm 0{,}0005$ наведені у таблиці 6:

N	x_{k+1}	x_k	$f(x_{k+1})$	$f(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	1	2	5,281718172	-2,389056099	1
2	1,688551	1	0,737163243	5,281718172	0,68855
3	1,800239	1,688551	-0,291957069	0,737163243	0,11169
4	1,768554	1,800239	0,009848601	-0,291957069	0,03169
5	1,769588	1,768554	0,000125612	0,009848601	0,00103
6	1,769601	1,769588	-5,50262E-08	0,000125612	1,3E-05

Таблиця 6. Уточнення кореня методом січних.

Висновки. У статті були розглянуті трансцендентні рівняння, що містять логарифмічні, тригонометричні, показникові та ірраціональні функції. Зокрема, наведено розв’язання цих рівнянь наступними методами:

- методом поділу відрізка навпіл,

- методом хорд,
- методом Ньютона (дотичних),
- методом ітерацій,
- методом січних,
- комбінованим методом дотичних і хорд.

Відокремлення коренів було здійснено графічним методом.

Робота може бути корисною для студентів фізико-математичних спеціальностей, для викладачів математичних гуртків загальноосвітніх навчальних закладів, та для тих, хто цікавиться чисельними методами.

Список літератури

1. Вержбицкий В. М. Основы численных методов (Учебник для вузов) / В. М. Вержбицкий / Москва: Высш. шк., 2002. – 840 с.
2. Возняк Л.С. Чисельні методи (Методичний посібник для студентів природничих спеціальностей) / Л.С. Возняк, С.В. Шарин. / Івано-Франківськ: Плай, 2001. - 66 с.
3. Ісаханов Г.В. Чисельні методи розв’язування задач будівництва / Г.В. Ісаханов, С.М. Чорний. / К .: Вища школа, 1995. – 376 с.
4. Шаповаленко В. А. Чисельні методи та моделювання на ЕОМ (навчальний посібник) / В. А. Шаповаленко, Л. М. Буката, О. Г. Трофименко. / О.: ВЦОАНЗ, 2010. – Ч.1. – 88 с.
5. Ізюмченко Л. В., Гаєвський М. В. Методи обчислень. Частина І. Чисельні методи алгебри: Навчальний посібник. – Кіровоград: КДПУ імені В. Винниченка, 2008. – 84 с.