УДК 511.11

ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ В ПЛАНІМЕТРІЇ

Осадча Вікторія Вадимівна

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, Волков Юрій Іванович

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті висвітлено застосування комплексних чисел в планіметрії. А саме розглянуто площину комплексних чисел, операція переходу до спряженого, їх додавання та віднімання. Показано геометричний зміст множення комплексних чисел. Та неведене використання комплексних чисел при доведенні прямої і кола Ейлера, в задачі Адамара та теоремі Птолемея.

Ключові слова: площина комплексних чисел, геометричний зміст комплексних чисел, пряма і коло Ейлера, задача Адамара, теорема Птолемея.

APPLICATION OF COMPLEX NUMBERS IN PLANIMETRY

Osadcha Victoria Vadimovna

Scientific supervisor: doctor of physical and mathematical sciences, Volkov Yuriy Ivanovich

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

The article covers the application of complex numbers in planimetry. Namely, the plane of complex numbers, the transition to the conjugate operation, their addition and subtraction are considered. The geometric content of multiplication of complex numbers is shown. However, the use of complex numbers in the proof of the Euler's straight line and circle, in the Hadamard problem, and Ptolemy's theorem.

Keywords: plane of complex numbers, geometric content of complex numbers, straight line and Euler circle, Hadamard's problem, Ptolemy's theorem.

Постановка проблеми. Відомо, наскільки широко використовуються комплексні числа в математиці і її додатках. Особливо часто застосовується функції комплексного змінного, зокрема, аналітичні функції. Їх вивчення цікаве саме по собі, крім того, вони використовуються в механіці, аеро- і гідродинаміці, в алгебраїчній і неевклідових геометріях, теорії чисел.

Разом з тим алгебру комплексних чисел можна успішно використовувати і в більш простих розділах математики - елементарної геометрії, тригонометрії, теорії рухів, афінних і кругових перетворень, а також в електротехніці і в різних механічних і фізичних задачах.

Аналіз досліджень та публікацій. Аналізуючи дослідження і публікації можна сказати, що метод комплексних чисел дозволяє вирішувати планіметричні задачі прямим обчисленням за готовим формулами. Вибір цих формул з очевидністю диктується умовою задачі та її вимогою. У цьому полягає надзвичайна простота цього методу в порівнянні з векторним і координатним методами, методом геометричних перетворень, конструктивно-синтетичним методом, які вимагають від вирішального часом чималої кмітливості і тривалих пошуків, хоча при цьому готове рішення може бути дуже коротким.

Мета статті. Мета цієї роботи показати основи методу комплексних чисел в застосуванні до завдань елементарної геометрії на площині та доведенню деяких основних планіметричних теорем.

Площина комплексних чисел. Задамо на площині прямокутну декартову систему координат *Oxy*. Тоді кожному комплексному числу *z*, яке представлене в алгебрагічній формі $z = x + iy$, де x, y – дійсні числа ; $i^2 = -1$, можна поставить у відповідність точу *M* з координатами *(x,y)* *(рис.1)*

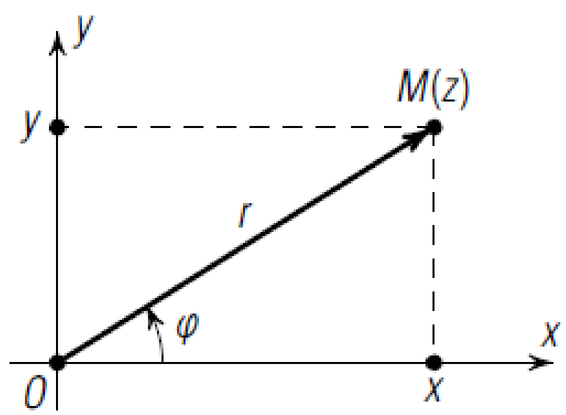

Рис. 1

Відстань від початкової точки *O* до точки *M(z)* називається модулем комплексного числа *z* і позначається символом $|z|$ або r:

$|z| = r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Якщо $\varphi -$ кут, то по означенню синуса та косинуса

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}; \cos\varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,$$

і тому

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$ **[1, 8]**

Операція переходу до спряженого. Якщо дано комплексне число $z = x + iy$, то комплексне число $\bar{z} = x - iy$ називається комплексно спряженим числу z. Тоді, очевидно, що і число *z* спряжене числу $\bar{z}$. Точки M(z) і $M_1(\bar{z})$ симетрично відноснi осі *Ox*. *(рис.2)*.

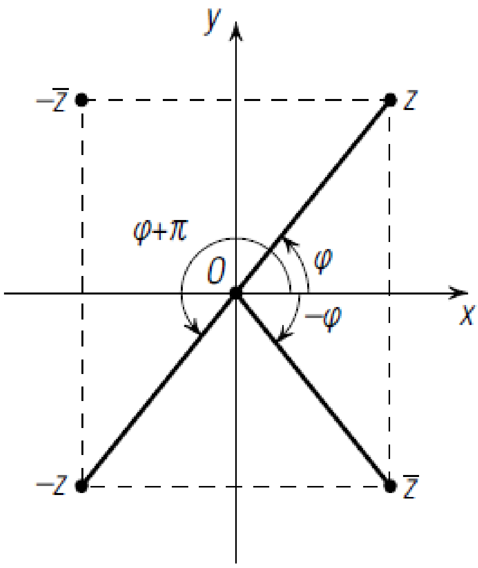

Рис. 2

Із рівності $z = \bar{z} \Rightarrow y = 0$. це означає, що числа, рівні своїм спряженим, являються дійсними. Точки з комплексними координатами *z* і –*z* симетричні відносно початку координат *O*. Отже, точки з комплексними координатами *z* і –*z* симетричні відносно осі *Oy*. Із рівності $z = \bar{z} \Rightarrow x = 0$. Тому умова $z = \overline{-z}$ являється критерієм приналежності числа до уявних чисел. Для будь-якого числа *z* очевидно:**[1,9]**

$$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |\overline{-z}|.$$

Операції переходу до спряжених чисел:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2};$$

$$\overline{z_1 * z_2} = \bar{z_1} * \bar{z_2};$$

$$\overline{z_1 : z_2} = \bar{z_1} : \bar{z_2}.$$

Векторне додавання та віднімання комплексних чисел. Кожній точці *M(z)* площині комплексних чисел відповідає вектор $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ з початком в точці *O*. Оскільки додавання та віднімання векторів виконується по тим же формулам, що і додавання та віднімання комплексних чисел, то додавання та віднімання комплексних чисел, записаних в алгебрагічній формі, відповідає додаванню та віднімання відповідних їм векторів. А саме, якщо *a* і *b* – комплексні координати точок *A* і *B*, то число $c = a + b$ являеться координатой точки *C* такій, що $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$. (рис.3). комплексному числу $d = a - b$ відповідає така точка *D*, що

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

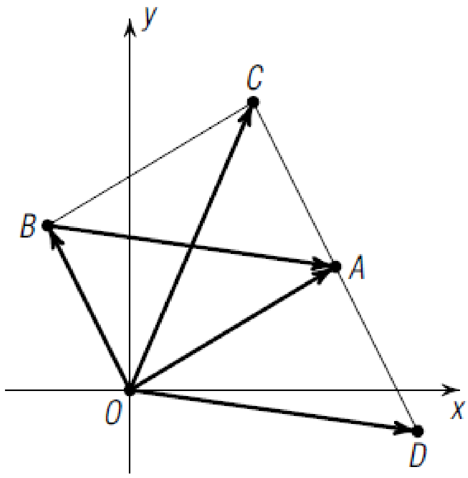

Рис. 3

Геометричний зміст множення комплексних чисел. Множення двох комплексних чисел $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha); b = \ |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$ виконується за формулою

$ab = |a||b|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$, тобто

$|ab| = |a||b|$ і $\arg(ab) = \arg a + \arg b$

Геометрично це означає, що точка *C(ab)* є образом точки *A(a)* при композиції повороту з центром *O* на кт $\beta = \arg b$ і гомотетією з центром *O* і коефіцієнтом $k = \ |b|$. (рис.4). Оскільки $ba = ab$, точка *C(ab)* буде також образом точки *B(b)* при композиції повороту з центром О на кут $\alpha = \arg a$ і гомотетією з центром *O* і коефіцієнтом |a|.

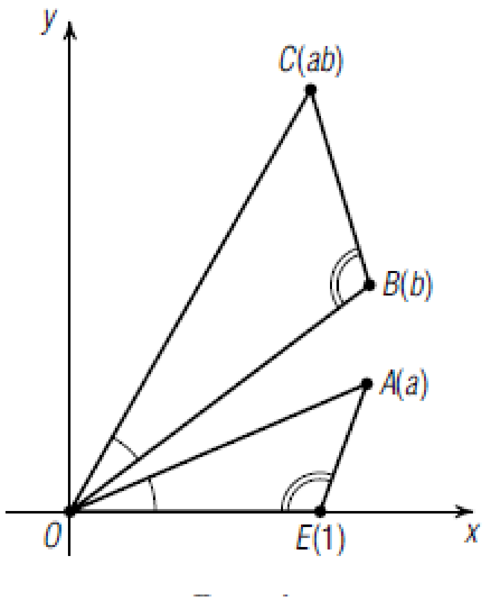

Рис. 4

Для побудови точки *C* зручно використати точку *E(1)*. Маємо:

$$\frac{|ab|}{|a|} = \frac{|b|}{1};\ \angle EOA = \angle BOC = \alpha \Rightarrow \Delta\, EOA \sim \Delta\, BOC,$$

Що дозволяє побудувати точку *C(ab)* по точкам *A(a), B(b), E(1)*.

Якщо комплексне число a постійне, а комплексне число z змінне, то формула (1) комутативна композиція повороту на кут $\alpha = \arg a$ і гомотетією з коефіцієнтом $|a|$ з загальним центром *O*. Таке перетворення називається *гомотетичним поворотом.*

$$z' = az \qquad (1)$$

Розглянемо більш цікавіший випадок використання комплексних чисел.

Пряма і коло Ейлера. Спочатку доведемо, що у довільному трикутнику ABC його висоти перетинаються в одній точці (ця точка називається ортоцентром трикутника).

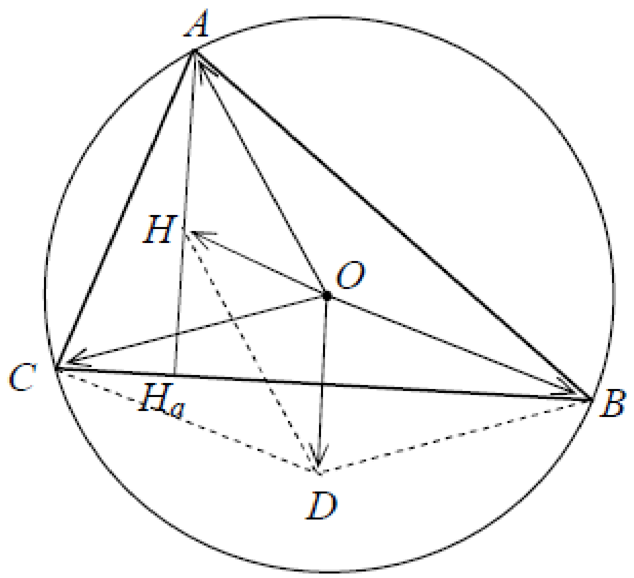

Рис. 5

Доведення. Помістимо трикутник ABC у комплексну площину так, що центр описаного кола співпадає з початком координат і проведемо висоту AH_a. Комплексному числу $b + c$ відповідає точка D, яка є вершиною ромба $OCDB$. Сумі векторів $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = a + b + c$відповідає точка H, яка лежить на відрізку AH_a, бо $OD \perp BC$. Як би ми провели такі ж міркування і відносно інших вершин, то отримали б для точки H той же результат, тобто $a + b + c$. Це означає, що всі висоти перетинаються в одній точці H і вона зображає комплексне число $a + b + c$. ☐

Наслідок. Точки перетину медіан, висот і центр описаного кола лежать на одній прямій. Дійсно, центр описаного кола це початок координат в комплексній площині, точка перетину медіан зображає число $\frac{1}{3}(a + b + c)$, а точка перетину висот зображає комплексне число $a + b + c$. Залишилося скористатися таким ***твердженням***: Нехай z довільне комплексне число, а t – дійсна стала, тоді точка tz лежить на прямій, яка проходить через початок координат і точку z.

Примітка. Пряма, про яку йде мова, називається прямою Ейлера.

Теорема. Нехай: точки M_a, M_b, M_c основи медіан довільного трикутника ABC, які проведені, відповідно, з вершин A, B, C; точки H_a, H_b, H_c – основи висот трикутника ABC, які проведені , відповідно, з вершин A, B, C; точки K_a, K_b, K_c – середини відрізків відповідних висот від вершин трикутника до точки перетину висот.

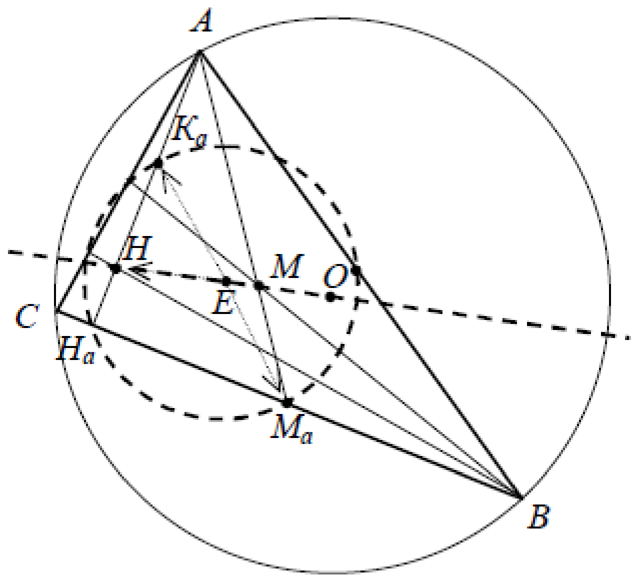

Рис. 6

Тоді всі ці дев'ять точок лежать на колі з центром в точці $E = \frac{1}{2}(a + b + c)$(якщо помістити центр описаного навколо ΔABC кола в початок координат) радіуса $\frac{1}{2}R$ (коло Ейлера), де R радіус кола, описанного навколо трикутника ABC.

Доведення.

Помістимо трикутник ABC у комплексну площину так, що центр O кола, описаного навколо трикутника, співпадає з початком координат. Тоді $|a| = |b| = |c| = R$ – радіус описаного кола. Через те, що точка H зображає комплексне число $a + b + c$, то точки K_a, K_b, K_c, зображають комплексні числа

$$\frac{1}{2}\big(a + (a + b + c)\big) = a + \frac{1}{2}(b + c);$$

$$\frac{1}{2}\big(b + (a + b + c)\big) = b + \frac{1}{2}(a + c);$$

$$\frac{1}{2}\big(c+(a+b+c)\big)=c+\frac{1}{2}(a+b)$$

Точки M_a, M_b, M_c зображають, відповідно, комплексні числа $\frac{1}{2}(b+c),\frac{1}{2}(a+c),\frac{1}{2}(a+b)$. Звідси вектору $\overrightarrow{K_aE}$ відповідає комплексне число $\frac{1}{2}(a+b+c)-a-\frac{1}{2}(b+c)=-\frac{a}{2}$, вектору $\overrightarrow{M_{aE}}$ відповідає комплексне число $\frac{1}{2}a+b+c)-\frac{1}{2}(b+c)=\frac{a}{2}$.

Аналогічно, вектору $\overrightarrow{K_bE}$ і $\overrightarrow{M_bE}$відповідають, відповідно, комплексні числа $-\frac{b}{2},\frac{b}{2}$, а векторам $\overrightarrow{K_cE}$ і $\overrightarrow{M_cE}$ відповідають, відповідно, комплексні числа $-\frac{c}{2},\frac{c}{2}$ (на малюнку точки K_b, K_c, M_b, M_c не зображені). Довжини всіх цих векторів однакові й дорівнюють $\frac{R}{2}$. Тому точки K_a, M_a, K_b, M_b, K_c, M_c лежать на одному колі радіуса $\frac{1}{2}R$з центром в точці $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Далі, через те що вектори $\overrightarrow{K_aE}$ і $\overrightarrow{M_aE}$ протилежні, то відрізок K_aM_a діаметр побудованого кола, а оскільки кут $K_aH_aM_a$ прямий (точка H_a – основа висоти), то точка H_a також буде лежати на нашому колі. Точно такі ж міркування приведуть нас до того, що і основи H_b і H_c висот ΔABC будуть лежати на побудованому колі. ☐

Примітка. Через те, що центр E кола Ейлера зображає комплексне число $\frac{1}{2}(a+b+c)$, то точка E також лежатиме на прямій Ейлера. Отже, чотири

точки O, M, E, H лежать на прямій Ейлера.

Розглянемо декілька задач. [2,22]

Задача 1. В результаті повороту на 90^0 навколо точки O відрізок $AB\to A_1B_1$. Довести, що медіана OM Δ OAB_1: $OM\perp A_1B$. (рис.7)

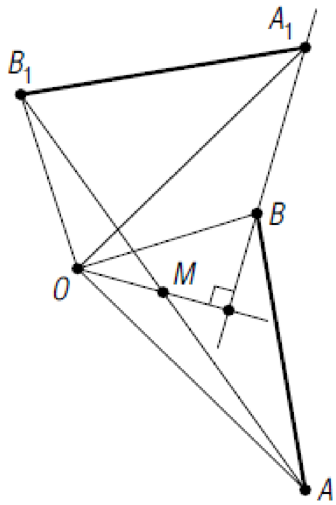

Рис. 7

Доведення. Нехай *O=0; A=1; B=b*. Тоді точки A_1, B_1 будуть мати координати $a_1 = i;\ b_1 = bi$, а середина *M* відрізка AB_1 – координату $m = \frac{1}{2}(1 + bi)$. Знаходимо:

$$\frac{a_1 - b}{m - 0} = \frac{i - b}{\frac{1}{2}(1 + bi)} = \frac{2i(i - b)}{(i - b)} = 2i$$

Це число уявне. На основі критерія перпендикулярності прямі $OM \perp A_1B$.[1,23]

Задача 2 (задача Адамара). Довести, що коли на сторонах *AB* і *AC* трикутника *ABC* побудувати квадрати і паралелограм *AEIG* (див. рис. 8), то

$$1)\ CD \perp BI, CD = BI; BF \perp CI, BF = CI.$$

$$2)\ AI \perp BC, AI = BC.$$

$$3)\ \text{Якщо } BK = KC, \text{то } AK \perp EG, AK = \frac{1}{2}EG.$$

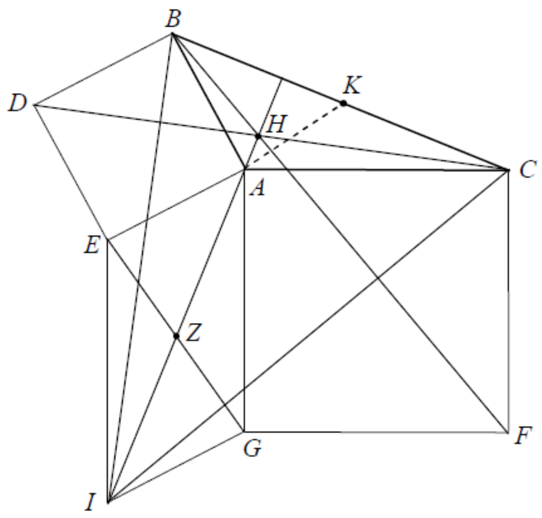

Рисунок 8

Доведення. Помістимо $\Delta\, ABC$ в комплексну площину, тоді:

$$E = a + (b-a)i, D = b + (b-a)i,$$

$$Z = a + \frac{1}{2}(b-c)i,$$

$$G = a + (a-c)i,$$

$$F = b + (a-c)i, K = \frac{1}{2}(b+c),$$

$$\overrightarrow{AE} = (b-a)i, \overrightarrow{AG} = (a-c)i, \qquad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG} = (b-c)i \Rightarrow I = a + (b-c)i$$

1)

$\overrightarrow{BI} = (a + (b-c)i) - b = a - b + (b-c)i, \overrightarrow{DC} = c - (b + (b-a)i) = c - b + (a-b)i \Rightarrow \overrightarrow{BI} * i = (a-b)i - (b-c) = \overrightarrow{DC},$

що доводить перше твердження. Аналогічно доводиться, що $\overrightarrow{IC} * i = \overrightarrow{FB}$.

2) $\overrightarrow{AI} = (b-c)i = \overrightarrow{CB} * i,$ що рівносильне другом твердженню.

Примітка. Якщо продовжити діагональ *AI* до перетину з *BC*, то вона пройде через точку *H* – точку перетину *DC* і *BF*, які перпендикулярні до сторін $\Delta\, IBC,$ бо висоти трикутника перетинаються в одній точці.

3) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(b+c) - a;$

$$\overrightarrow{EZ} = a + \frac{1}{2}(b-c)i - a - (b-a)i = \frac{1}{2}(b-c)i - (b-a)i \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{EZ} * i = -\frac{1}{2}(b-c)i + b - a = \frac{1}{2}(b+c) - a = \overrightarrow{AK}.$ [2, 10]

Задача 2. (Теорема Птоломея). Довести, що коли чотирикутник *ABCD* вписано в коло, то сума добутків його протилежних сторін дорівнює добутку його діагоналей.

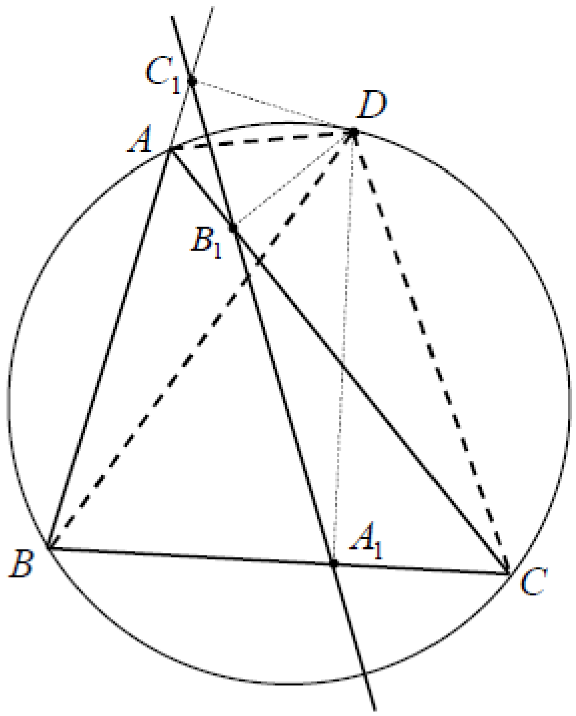

Рисунок 9

Доведення. Скористаємося рис. 8, вважаючи, що точка *D* вершина чотирикутника. Побудуємо пряму Сімпсона ΔABC відносно точки *D*. Маємо

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$$

$$A_1C_1 = |c_1 - a_1| = \frac{|c-a| * |b-d|}{|d|} = \frac{AB * BD}{|d|}$$

$$A_1B_1 = |b_1 - a_1| = \frac{|b-a| * |c-d|}{|d|} = \frac{AB * CD}{|d|}$$

$B_1C_1 = |c_1 - b_1| = \frac{|c-b| * |d-a|}{|d|} = \frac{BC * AD}{|d|} \Rightarrow$ теорема Плометея [2,12]

Висновки

У висновку можна зазначити, що використовуючи комплексні числа можна швидко розв'язати багато елементарних задач геометрії. Проте, значення комплексних чисел полягає не лише у стислості рішення завдань. Не менш важливо є і те, що в результаті застосування комплексних чисел при рішенні задач не рідко виявляються нові деталі, вдається зробити цікаві узагальнення і внести уточнення, які підказуються аналізом отриманих формул і співвідношень.

В роботі розглянуто теорію використання комплексних чисел. Наведено теореми та твердження, які використовують при розв'язання задач, а також наведені приклади використання комплексних чисел при розв'язуванні задач.

При детальному вивченні цієї теми можна сказати, що застосування комплексних чисел до розв'язування задач планіметрії може бути цікавим та корисним з точки зору поглиблення знань з математики, пізнання її багатогранності.

Іноді здається, що доведення геометричних теорем з використанням комплексних чисел має більш громіздкий вигляд переважно за рахунок алгебраїчних перетворень, але не можна не оцінити стрункість і гармонію, які вносить застосування комплексних чисел до розв'язання геометричної задачі.

Список літератури

1. Я. П. Понарин. Алгебра комплексних чисел в геометрических задачах – Москва, 2004 – 160 с.
2. Ю. І. Волков, Н. М. Войналович. Перлини планіметрії і комплексні числа – Наукові записки, випуск 69. Серія: математичні науки, - Кіровоград, 2010 – 14 с.