УДК 378

# ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ КУРСУ «ТЕОРІЯ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛУ» СТУДЕНТАМИ МАТЕМАТИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ПЕДАГОГІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТІВ

**Кулик Оксана**

**Науковий керівник: канд.ф.-м. наук Гаєвський М.В.**

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

*В статті розглянуто особливості вивчення курсу теорії міри та інтеграла студентами математичних спеціальностей педагогічних університетів. Досліджено можливі фактори, що впливають на вивчення матеріалу студентами та наведено основні методики викладу матеріалу.*

*Ключові слова: міра, інтеграл Лебега, схема Даніеля, вчитель математики, університет.*

**Features of studying the course "The theory of measure and integral" by students of mathematical specialties of pedagogical universities**

**O. Kulyk**

**Scientific supervisor: Candidate of Physics and Mathematics Sciences Haievskyi M.V.**

*The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine*

*The article examines the peculiarities of studying the theory of measure and integral by pedagogical university students. Possible factors influencing student's study of material and the main methods of presentation of the material are presented.*

*Key words: measure, Lebesgue integral, Daniell integral, Mathematics teacher.*

**Постановка проблеми.** Однією з найважливіших математичних дисциплін, що викладаються студентам математичних факультетів педагогічних вузів, є курс математичного аналізу. Це пояснюється тим, що математичний аналіз лежить в основі диференціальної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, підводить фундамент в вивчення і викладання багатьох шкільних дисциплін і необхідний шкільному. В цьому курсі поєднуються формальні і наочні міркування, проводиться чітка грань між строгими міркуваннями та інтуїтивними припущеннями.

Разом з диференціальним численням фундаментом математичного аналізу без особливого перебільшення також є поняття міри і інтеграла. Саме поняття міри та її основні властивості зустрічаються ще у давніх греків, зараз поняття міри та інтеграла починають формуватися ще в шкільному курсі математики, саме тому при підготовці студентів математичних факультетів педагогічних вузів необхідно приділяти особливу увагу розділах аналізу і суміжних дисциплін, пов'язаних з теорією міри та інтеграла.

Курс теорії міри та інтеграла Лебега було розроблено на початку XX століття в зв'язку з потребами аналізу та теорії функцій (даний курс є основою теорії функцій дійсної змінної). Абстрактний варіант цієї теорії є математичною основою ряду теоретичних і прикладних розділів сучасної математики таких, як теорія ймовірностей, функціональний аналіз, теорія оптимізації, математичні методи економіки тощо. Курс «Теорія міри та інтегралу» (ТМіІ) є необхідною складовою частиною базової теоретичної підготовки математика та основою для подальшого вивчення спеціальних дисциплін.

Вивчення курсу ТМіІ має за мету ґрунтовну математичну підготовку спеціалістів та наукового обґрунтування ряду питань, перше уявлення про які одержано в шкільному курсі математики: поняття функції, границі, неперервності, похідної інтегралу. Вивчення матеріалу передбачає показ ролі наукових методів у пізнанні навколишнього світу. Саме тому велика увага має приділятися теорії і практиці, які приводять до основних понять математичного аналізу, а також висвітленню відомостей з історії розвитку математики.

**Аналіз досліджень і публікацій.** В роботах Казаріхіної Т.М. [1, 2] розглянуто особливості реалізації принципів професійно-орієнтованого навчання майбутніх вчителів на прикладі курсу «Міра та інтеграл», зокрема проблеми вивчення таких елементів курсу як «міра», «площа», «інтеграл» тощо студентами педагогічних університетів та учнями старших класів шкіл, а також автор розглядає основні типи проблем, що виникають, та можливості їх вирішення. М.В. Третяк [3] досліджує основні методичні концепції вивчення курсу ТМіІ у ВНЗ України – 1) класична; 2) неокласична; 3) модерна.

Розглянемо особливості викладання кожної з них для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

**Мета статті** – розглянути особливості кожної із наведених вище концепцій теорії міри та інтеграла при викладанні курсу для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

Класична концепція вивчення ТМіІ полягає в тому, що вивчення ТМіІ відбувається за схемою Лебега: Міра – Вимірні функції – Інтеграл.

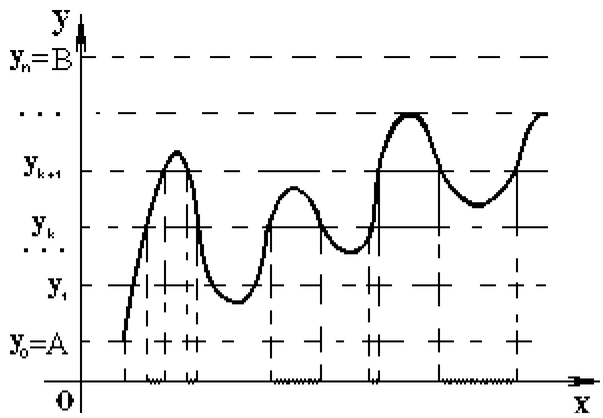


Рис. 1

Задавши через міру $\mu$ як звичну довжину відрізка та продовживши її на всі вимірні множини прямої можемо перейти до побудови інтеграла Лебега, означивши вимірну функцію за допомогою лебегових множин.

Її суть полягає в тому, щоб об'єднувати точки області визначення підінтегральної функції не за ознакою їх близькості на осі $Ox$, як в ріманових сумах, а за ознакою близькості відповідних значень функції. Така конструкція використовує обмежені вимірні (по Лебегу) функції і узагальнює конструкцію інтеграла Рімана.

Отже, нехай функція $f$ вимірна на обмеженій множині $E \subset R$ і нехай її значення містяться в інтервалі $A, B$. Нехай $T$ – розбиття цього інтервалу на частини точками $A = y_0 < y_1 < ... < y_n = B$. Величину $\lambda(T) = \max\limits_k |y_{k+1} - y_k|$ назвемо рангом розбиття. Поставимо кожному проміжку $y_k, y_{k+1}$ множину

$$e_k = E\ \ y_k \le f < y_{k+1}\ \ , k = 0,1,...,n .$$

Введемо нижню $s(T)=\sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu e_k$ та верхню $S(T)=\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \mu e_k$ суми Лебега. Ясно, що $s(T) \le S(T)$. Відмітимо, що властивості цих сум нагадують властивості сум Дарбу при побудові інтегралу Рімана. І далі аналогічно як при заданні інтеграла Рімана можемо означити інтегральні суми Лебега

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n-1} y_k^* \mu e_k \text{, де } y_k \le y_k^* < y_{k+1} \text{, звідки } (L)\int_E f d\mu = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n .$$

На даній концепції базується виклад теорії у підручниках таких авторів як І.П. Натансон [4], В.Д. Погрібний [5] та інші. Цей підхід дуже схожий до методики введення інтеграла Рімана в курсі математичного аналізу.

Вивчення курсу за неокласичною концепцією відбувається за такою схемою: Системи множин – Міра – Вимірні функції – Інтеграл Лебега

За цією схемою спочатку вивчаються наступні класи множин — півкільце, кільце, алгебра та їх $\sigma$-аналоги. Визначивши ці поняття можна перейти до міри як $\sigma$-адитивної невід'ємної функції множини, що задана на півкільці. Наступним кроком є розширення поняття міри з півкільця на $\sigma$-алгебру всіх вимірних множин, відмітимо, що тут ключовим є поняття зовнішньої міри. Означення вимірних функцій базується вже зазвичай є більш абстрактним і базується на вимірності прообразу відображення:

Нехай $X,S$ та $X',S'$ – вимірні простори. Тоді відображення $f: X \to X'$ називається $S/S'$-вимірним, якщо $\forall A' \in S' \quad f^{-1}(A') \in S$. При цьому, якщо $X'=R$, $S'=B(R)$, то $S/S'$-вимірне відображення називається $S$-вимірним.

Наступним є визначивши простих функцій та вказання їх зв'язку із простими функціями, тобто: для того щоб функція $f$ була вимірною необхідно та достатньо, щоб її можна було представити як границю рівномірно збіжної послідовності простих функцій.

Після цього задають поняття інтегралу Лебега: Нехай $E$ – довільна $\mu$-вимірна підмножина множини $X, E \subset X$. Тоді утворимо числовий ряд

$$\sum_k c_k \mu \quad E \cap E_k \tag{1}$$

Якщо ряд (1) абсолютно збігається, то проста $\mu$-вимірна (на $X$) функція $f$ називається інтегровною за Лебегом або сумовною ($\mu$-інтегровною або $L$-інтегровною) на множині $E$, а сума цього ряду називається інтегралом Лебега від функції $f$ по множині $E$ і позначається $\int_E f d\mu$, або $\int_E f(x) d\mu$, або $L \int_E f d\mu$, тобто $\int_E f d\mu := \sum_k c_k \mu \; E \cap E_k$ .

Перевагою цього підходу є те, що можна досить легко перейти до подвійних, потрійних інтегралів Лебега тощо. Дійсно можна розглядати одномірну (лінійну), двомірну (плоску) міри Лебега і т.д. Всі факти, які раніше були відмічені для міри, породженої зовнішньою мірою, яка породжена довільною мірою, визначеною на півкільці, справедливі зокрема і для міри Лебега в $R^m$.

На даній концепції базується виклад теорії у підручниках таких авторів як А.М. Колмогоров, С.В. Фомін [6], А.Я. Дороговцев [7], Ю.М. Березанський та інші [8] тощо. Також відмітимо реалізацію даного підходу, що запропоновано у книзі А.М. Ширяєва [9], де розглядається інтеграл Лебега як математичне сподівання випадкової величини.

Розглянемо тепер модерну концепцію: Елементарний інтеграл – Нуль множини – Інтеграл Даніеля – Вимірні множини

Одним з основних труднощів, що виникають при використанні інтеграла Лебега, це те, що перед його застосування слід розробити відповідну теорію міри. Підхід Даніеля (модерна концепція) до побудови інтеграла не має цього недоліку, а також має значні переваги при узагальненні на багатовимірні простори та при подальших узагальненнях.

Основна ідея модерної концепції полягає у використанні аксіоматичного методу при побудові інтеграла. Нехай $H$ – сімейство обмежених дійснозначних визначених на множині $X$ функцій, які назвемо елементарними функціями і які задовольняють наступні аксіоми:

1. $H$ – лінійний простір із звичайними операціями додавання і скалярного множення.

2. Якщо функція належить $H$ , то її модуль також належить $H$ .

Також у просторі елементарних функцій визначають додатний неперервний лінійний (адитивний та однорідний) функціонал $I$ , названий елементарний інтеграл.

Означивши елементарний інтеграл за допомогою послідовності неспадних невід'ємних елементарних функцій $h_n(x) \in H$ можемо визначити множину міри нуль. Множина $Z$ , що є підмножиною $X$ , має міру нуль, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує неспадна послідовність невід'ємних елементарних функцій $h_n(x) \in H$ така, що $Ih_n < \varepsilon$ та $\sup_n h_n(x) \geq 1$ на $Z$ .

Наступним кроком є зняття обмеження додатності функціоналу, а саме умова додатності функціоналу замінюється на умову існування додатної мажоранти: існує такий додатний лінійний функціонал $T$ , для якого $\forall f(x) \geq 0 : If \leq Tf$ .

Для так означеного інтегралу тепер можна довести всі теореми теорії інтеграла Лебега, наприклад теорема Лебега про збіжність, теореми Фубіні та Фату тощо. Його властивості такі ж, як і у звичайного інтеграла Лебега.

Взявши характеристичну функцію для деякої множини та побудувавши для неї інтеграл за схемою Даніеля отримаємо міру цієї множини. Причому так означена міра є еквівалентною класично означеній мірі за Лебегу.

Відмітимо, що така побудова узагальненого інтеграла має деякі переваги перед методом Лебега, особливо у функціональному аналізі. Конструкції Лебега і Даніеля еквівалентні, якщо розглядати як елементарні ступінчасті функції, проте при узагальненні поняття інтеграла на складніші об'єкти виникають істотні труднощі в побудові інтеграла за Лебегом.

Модерну концепцію інтеграла можна зустріти у підручниках таких авторів, як Ріс, Надь [10], Шилов, Гуревич [11], Ус [12]. Хоча схема Даніеля має найбільший рівень загальності, економності в часі при викладанні та універсальності, але широкого поширення вона не набула. Зокрема, як зазначено у [8] – підхід Даніеля є недоцільним, бо поняття міри та відповідних конструкцій є первинними, а техніка поводження з мірами та вироблення у студентів інтуїції є важливою задачею при вивченні цього розділу аналізу. Крім того, для студентів педагогічних спеціальностей фізико-математичних факультетів курс функціонального аналізу викладається на старших курсах, зокрема, у магістратурі, у багатьох студентів наявний недостатній рівень розвитку абстрактного мислення.

**Висновки**. На сьогоднішній день ТМіІ є невід'ємною складовою частиною навчальних планів і програм для математичних спеціальностей класичних та педагогічних університетів. І якщо із студентами-математиками класичних університетів все відносно зрозуміло стосовно змістового наповнення та і методики навчання ТМіІ, то при викладанні цього курсу для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів виникають певні труднощі, що пов'язані як і з рівнем абстрактності викладу матеріалу, так і з вибором науково-методичної концепції вивчення курсу ТМіІ. При виборі концепції для побудови навчального курсу ТМіІ слід врахувати не лише математичні переваги і недоліки, а й такі фактори:

1) цілі і завдання навчальної дисципліни;

2) рівень фактичних математичних знань студентів;

3) розвиток абстрактного та логічного мислення у студентів;

4) кількість часу, відведеного на вивчення курсу ТМіІ;

5) місце курсу ТМіІ в навчальному плані спеціальності (наприклад, курс передує функціональному аналізу або є частиною останнього, з деякими елементами курсу студенти знайомі при вивченні математичного аналізу тощо);

6) математико-культурний потенціал курсу при вибраній схемі викладу;

7) наявне навчально-методичне забезпечення.

При викладанні цього курсу викладачеві в першу чергу слід звертати увагу на наведені вище фактори і в залежності від них вже слід обрати методику викладу матеріалу, але пріоритетним має бути неокласичний підхід. Оскільки це дає можливість показати міжпредметні зв'язки між багатьма математичними дисциплінами.

**Список літератури**


1. Казарихина Т.Н. Принципы профессионально-ориентированного обучения математике будущих учителей / Т.Н. Казарихина // Ярославский педагогический вестник – 2011 – Т. 2, № 1. – с. 152-155.

2. Казарихина Т.Н. Психолого-педагогические основы изучения теории меры и интеграла будущими учителями математики / Т.Н. Казарихина // Наука и школа – 2011.– № 4. – с. 22-24.

3. Третяк М.В. Основні методичні концепції вивчення теорії міри і інтеграла в університетах України / М.В. Третяк // Вісник Черкаського університету: Педагогічні науки – 2015. – Т. 20, № 353 – с. 10-14.

4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон – М.: Наука, 1974. – 480 с.

5. Погребной В.Д. Теория функций действительной переменной: конспект лекций / В.Д. Погребной – Сумы : Сумский государственный университет, 2012. – 239 с.

6. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій та функціонального аналізу / А.М. Колмогоров, С.В. Фомін – К.: Наукова думка, 1977. – 578 с.

7. Дороговцев А.Я. Элементы общей теории меры и интеграла / А.Я. Дороговцев – К.: Факт, 2007. – 164 с.

8. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз / Ю.М. Березанський, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2014. – 559 с.

9. Ширяев А.Н. Вероятность / А.Н. Ширяев – М.: Наука, 1980. – 574 с.

10. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. 2-е издание, переработанное и дополненное / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь – Москва: Мир, 1979. – 587 с.

11. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная (общая теория) / Г.Е. Шилов, Б.Л. Гуревич – М: Наука, 1967. – 220 с.

12. Ус С.А. Функціональний аналіз. Навчальний посібник / С.А. Ус – Дніпропетровськ: НГУ, 2013. – 236 с.