УДК 378.147

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Костенко Денис, Ключник Інна

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

До сучасних випускників пред'являються високі вимоги щодо змісту знань, умінь і навичок, що визначає конкуретну спроможність фахівця на сучасному ринку праці. При вивчені математики розглядаються задачі, для розв'язання яких потрібно не лише знання шкільної програми, а й творче застосування цих знань, зокрема при розв'язуванні ірраціональних рівннянь. Це питання досить актуальне, тому що задачі такого типу зустрічаються в завданнях шкільних олімпіад з математики, у завданнях для державної підсумкової атестації з математики, ЗНО.

В даній статті розгялядаються різні методи розв'язування ірраціональних рівнянь. Розв'язування таких задач сприяє інтелектуальному розвитку, розвитку логічного мислення та є гарним матеріалом для відпрацювання навиків.

Ключові слова: ірраціональні рівняння, допустимі значення, методи розв'язання.

Some features of teaching irrational equations

Kostenko Denis, Kliuchnyk Inna

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

To modern graduates meet the high requirements regarding the content of the knowledge, abilities and skills, which determines the capacity of the specialist to compete on the modern labour market. Teach mathematics addresses the problem, for which you need not only knowledge of school curriculum, but also the creative application of this knowledge, in particular when starting of irrational equations. This issue is quite relevant, because the problem of this type found in the tasks of school, district math olympiads, tasks for the State final certification in mathematics, EIT.

In this article different methods of starting of irrational equations. Solving such problems contributes to intellectual development, the development of logical thinking and is a good material for the development of skills.

Key words: irrational equations, allowable values, methods of starting.

Постановка проблеми. У сучасних соціально-економічних умовах розвитку нашого суспільства гострою стає потреба в ініціативній і діяльній особистості, здатній безперервно поповнювати запаси професійних знань і умінь, грамотно ставити цілі своєї професійної діяльності і досягати їх, творчо підходити до своєї справи. Ці якості особистості починають формуватися в учнів в школі. Цьому, зокрема, сприяє розвиваюча система освіти школярів. Роль математики виняткова в розумовому вихованні. Математичне мислення – це своєрідний підхід до дійсності, метод дослідження фактів і явищ природи, суспільного життя, праці, спосіб аналіз причинно-наслідкових зв’язків між явищами. Звичайно, тема “Ірраціональні рівняння” є достатньо складною для розуміння але, безумовно, ця тема є дуже важливою для розвитку всіх видів мислення учнів та їх розумового виховання. Дбайливий вчитель навчить і виховає, виростить дітей, що понесуть ці знання в доросле життя. Особливістю даної теми є те, що вона знаходить своє застосування при вивченні кожної чергової теми чи розділу програми: вчитель заздалегідь продумує, в якій послідовності і в який спосіб використовуватимуться відповідні типи уроків, щоб процес, кожен його етап спланувати найбільш раціонально [1].

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри в шкм.

Предметом дослідження є різні види ірраціональних рівнянь і методи їх вирішення.

Мета статті. Розкрити особливості вивчення та методи викладання теми ірраціональні рівняння в шкільному курсі математики.

Виклад основного матеріалу. Знайомство з цим матеріалом має здійснюватись через актуалізацію опорних знань, набутих учнями в молодших класах. При вивченні ірраціональних рівнянь паралельно на уроці розглядаються й інші рівняння, для того, щоб учні чітко бачили різницю в процедурі розв’язування. Тут діє метод укрупнення дидактичних одиниць. Особливу увагу необхідно звернути при вивченні степеневої функції та показникової. Звичайно під розв'язуванням ірраціональних рівнянь розуміють розв'язування їх в полі дійсних чисел. Тому розв'язками ірраціонального рівняння можуть бути такі дійсні числа, при яких жодний ірраціональний вираз рівняння не буде позбавлений змісту в полі дійсних чисел. Отже, на початку розв'язування будь-якого ірраціонального рівняння необхідно встановити границі допустимих значень його коренів. Особливістю викладання даної теми в ШКМ є те, що для розв'язування майже не використовуються вправи, де показник кореня вище третього порядку. Зазвичай такі приклади не розглядаються взагалі і в спеціалізованих класах, хоча, на нашу думку при поглибленому вивченні математики необхідно принаймні навести декілька подібних прикладів та підказати учням літературу, де вони зможуть ознайомитись з таким видом рівнянь і нерівностей більш глибоко. Але слід пояснити учням, що знаходження області визначення потрібне далеко не для кожного ірраціонального рівняння. Знаходження множини значень для більшості функцій задача складна або зовсім неможлива. Тобто можна використати властивості відповідних функцій при розв'язуванні ірраціональних рівнянь (область визначення, область значень, парність, монотонність, періодичність тощо). Слід звернути увагу учнів, що при виконанні над функціями арифметичних операцій їх слід виконувати на спільній частині областей визначення.

Приклад [2]. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x^2}=2$

Область визначення цього рівняння включає лише одне число 1,але 1 не є коренем данного рівняння.Тож учні, самостійно можуть дійти висновку, що рівняння не має коренів. Отже в данному рівнянні знаходження області визначень є доцільним. Відповідь: $x \in \varnothing$.

Приклад. Розв’яжіть рівняння: $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=x^2+3$

Область визначення цього рівняння визначається з таких умов

$$\begin{cases} \sqrt{x-5} > \sqrt{2x-1}, \\ x \geq 5, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} x-5 > 2x-1, \\ x \geq 5, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x < -4, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Очевидно, рівняння не має розв’язків. Відповідь: $x \in \varnothing$.

Приклад. Розв’язати рівняння: $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{9-3x}=3\sqrt{2x-2}+\sqrt{24}$

Знайдемо область визначення:

$$\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0, \\ 9-3x\ge 0, \\ 2x-2\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty), \\ x\le 3, \\ x\ge 1; \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{1;3\}.$$

Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що число 3 не є, а 1 є коренем рівняння. Відповідь: $x\in\{1\}$.

У приведених прикладах знаходження області визначення доцільне. Розв'язуючи рівняння, учні підносять обидві частини деяких рівнянь до квадрату, мають усувати протилежні вирази, скорочувати дробові вирази, тобто виконувати операції, які дозволяють звільнитися від радикалів та спростити рівняння. Але під час виконання таких операцій можуть з'явитися сторонні корені, тобто корені, що не задовольняють вихідне рівняння. Поява таких коренів відбувається за таких причин:

1) під час виконання однієї із зазначених вище операцій може розширитись ОДЗ вихідного рівняння.

Приклад. $\sqrt{x}+x^2=\sqrt{x}+4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x\in\{-2;2\}$. Але $x=-2$ сторонній корінь. Причиною його появи є усунення виразу $\sqrt{x}$ при спрощенні вихідного рівняння. Ця операція призвела до розширення ОДЗ цього рівняння. Так, ОДЗ вихідного рівняння $x\in[0;+\infty)$, а ОДЗ його рівняння - наслідку $x\in R$.

2) Під час піднесення обох частин рівняння, які набувають протилежних значень при одному й тому ж значенні змінної, до парного степеня.

Приклад. $\sqrt{x}=x-2\Rightarrow x=(x-2)^2\Leftrightarrow x\in\{1;4\}$. Але $x=1$ - сторонній корінь. Причиною появи його є те, що при $x=1$ ліва частина вихідного рівняння набуває значення 1, а права - (-1). А після піднесення до квадрата рівність стає вірною.

В рівнянні $\sqrt{x^3-x+1}=1-x$ область визначення учням знайти важко. Але це і непотрібно. Слід підказати учням скористатись тим, що рівняння $\sqrt{f(x)}=g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Тобто $\begin{cases} x^3 - x + 1 = (1 - x)^2, \\ 1 - x \geq 0. \end{cases}$ Оскільки права частина рівняння за цих умов невід'ємна, то учням нескладно буде побачити розв’язок x= 0.

Приклад [3]. Розв’язати рівняння $\frac{\sqrt{x+5}\sqrt{x-1}}{x-3} = 2$.

Дане рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} x + 5 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0, \\ x \neq 3, \\ \sqrt{x-5}\sqrt{x-1} = 2x - 6. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1;+\infty) \setminus \{3\}, \\ 2x - 6 \geq 0, \\ x^2 + 4x - 5 = 4x^2 - 24x + 36, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3;+\infty), \\ 3x^2 - 28x + 41 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3;+\infty), \\ x = \frac{14 \pm \sqrt{73}}{3}. \end{cases}$ Відповідь: $x \in \left\{\frac{14 + \sqrt{73}}{3}\right\}$.

При розв’язуванні ірраціональних рівнянь корисно окремо розглянути рівняння типу $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, що рівносильне будь-якій з систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Приклад [2]. Рівняння $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$ рівносильне рівнянню

$$\sqrt{3x-5} = (1 + \sqrt{4-x})^2$$

права частина якого додатня. Легко знаходяться корені останнього рівняння $x = 3$ та $x = 1{,}75$ з яких лише 3 буде коренем даного рівняння.

Приклад. Рівняння $\sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-7} = 2$ рівносильне рівнянню $\sqrt{x^2+9} = 2 - \sqrt{x^2-7}$, яке, в свою чергу, рівносильне наступній системі:

$$\begin{cases} x^2 + 9 = 25, \\ x^2 \leq -7. \end{cases}$$

Учні легко бачать, що остання система не має розв’язків. Відповідь: $x \in \varnothing$

При розв'язуванні останнього рівняння був застосований найбільш поширений метод розв'язування ірраціональних рівнянь – послідовне піднесення до степеня.

На рівняннях, що розв'язуються послідовним піднесенням до квадрату, не загострюємо уваги, оскільки вони досить легко розв'язуються, головне, не забувати робити перевірку.

Також виокремлюють рівняння вигляду: $g(x)\sqrt{f(x)}=0$ та $\dfrac{g(x)}{\sqrt{f(x)}}=0$

$$g(x)\sqrt{f(x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)=0, \\ x\in D(g(x)); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)=0, \\ f(x)\ge 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

та

$$\frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)=0. \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати рівняння: $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0.$

$$(9-x^2)\sqrt{2-x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x=0, \\ \begin{cases} 9-x^2=0, \\ 2-x\ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\{2\}, \\ \begin{cases} x\in\{-3;3\}, \\ x\in(-\infty;2]. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-3;2\}.$$

Відповідь: $x\in\{-3;2\}.$

Приклад. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^3-x^2-2x}{\sqrt{2x+1}}=0.$

$$\frac{x^3-x^2-2x}{\sqrt{2x+1}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1>0, \\ x^3-x^2-2x=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2}, \\ x(x-2)(x+1)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2}, \\ x\in\{0;-1;2\}. \end{cases}$$

Відповідь: $x\in\{0;2\}.$

Один із поширених способів розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=h(x)$ або $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)}$ полягає у піднесенні обох частин рівняння до куба. При цьому використовують формули куба суми і куба різниці двох чисел.

Приклад [3]. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до куба. Отримаємо:

$$2x-1+x-1+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1.$$

Вираз $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$ тому зведемо рівняння до вигляду:

$$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1-x..$$

Піднесемо обидві частини одержаного рівняння до куба. Отримаємо корені $x_1=1$ або $x_2=0$. Часто учні записують у відповідь обидва знайдені значення змінної x, пояснюючи це так: оскільки обидві частини рівняння були піднесені до непарного степеня, то одержане в результаті такої операції нове рівняння рівносильне даному. Але безпосередня перевірка показує, що лише $x=1$ є коренем вихідного рівняння. Справа в тому, що піднісши обидві частини рівняння до куба, ми справді одержуємо рівняння, рівносильне даному, але після заміни виразу в дужках правою частиною вихідного рівняння, приходимо до рівняння-наслідку, яке, не рівносильне попередньому. Відповідь $x=1$.

Не слід забувати і про графічні методи розв'язування таких рівнянь.

Приклад . Розв'язати рівняння $x^2-x+2=2\cdot\sqrt[4]{2x-1}$.

Нехай $f(x)=x^2-x+2$, а $\varphi(x)=2\cdot\sqrt[4]{2x-1}.\Rightarrow D(f)=R, D(\varphi): x\geq\frac{1}{2}$. Спільна частина областей визначення є $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. Будуємо графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ в одній системі координат, з якого видно, що рівняння має один корінь $x=1$. Перевірка підтверджує цей висновок.

Комплексне використання традиційних форм і видів роботи з комп'ютерною підтримкою дасть можливість максимально диференціювати та індивідуалізувати навчання, зробити процес творчим, і, навіть, дослідницьким. Використання комп'ютера підчас вивчення математики дає наочні уявлення про досліджувані поняття, закономірності, функції, геометричні фігури що сприяє образному мисленню учнів [4]. Дуже цікавим буде проведення узагальнення даної теми провести і комп’ютерному класі, наприклад з використанням таких програмних засобів, як Maple, Matlab чи інших математичних програм, побудувавши графіки, не лише визначити корені рівняння, знайти їх кількість, а й переконатись, що корені на множині дійсних чисел взагалі існують. І вже потім можна знайти ці корені аналітичним шляхом, розв’язати рівняння разом на дошці, а потім переконатись в правильності розв’язування. Аналогічно, розв’язуючи такі задачі дома, якщо корені рівняння не співпадають з коренями на екрані монітора, учень знаходить помилку, аналізує причини, що призвели до неї , і фіксує їх на полях зошита. Потім, перевіряючи зошити, вчитель може дізнатись де саме в того чи іншого учня виникли питання чи проблеми.

Висновок. В статті показані різні методи розв’язування ірраціональних рівнянь, в тому числі приведена можливість використання ІКТ для пошуку розв’язків цих рівнянь. Ці програми виконуватимуть роль навчального тренажера, за допомогою яких учні працюватимуть більш свідомо та зможуть збільшити кількість розв’язаних за урок завдань.

Список літератури

1. Слепкань З.І. Методи навчання математики : підручник / З. І. Слєпкань . – *2*-е вид., доп. і перероб . – Київ : Вища школа, 2006 . – 582 с.
2. Горделадзе Ш.Г . Збірник конкурсних задач з математики / Ш. Г Горделадзе., М. М. Кухарчук, Ф. П. Яремчук. – Навч. Посібник.-К.:Вища шк., 1988.-328с.
3. Дорофеев Г.В. Пособие по математике для поступающих в вузы / М. К. Потапов, Н. Х. Розов - М.: Наука, 1976.-638с.
4. Ключник І.Г. Застосування сучасних технологій при вивчені фізико – математичних дисциплін / І.Г. Ключник. - Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. - Кіровоград. - 2015. - Вип. 7., Ч. 3. – С. 56 – 61