УДК 519.712

МАТЕМАТИЧНА СКЛАДОВА ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Зленко Юлія

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ізюмченко Л.В.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В. Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті йдеться про використання математичного апарату при плануванні багатокрокових керованих процесів та розглянуті зразки розв'язування прикладних задач.

Ключові слова: *динамічне програмування, оптимальне рішення, задача про рюкзак, задача відшукання найкоротшого шляху.*

MATHEMATICAL COMPONENT OF DYNAMIC PROGRAMMING PROBLEMS

Julia Zlenko

Scientific adviser: candidate of physical and mathematical sciences, associate professor Iziumchenko L.V.

Central Ukrainian State Pedagogical University named after V.Vynnychenko, Kropivnitsky, Ukraine

The article deals with the use of mathematical tools in the planning of multi-step controlled processes and examines examples of solving experimental problems.

Keywords*: dynamic programming, optimal solution, problem about a backpack, problem of finding the shortest path.*

Актуальність. Розвиток сучасного суспільства досяг того рівня, коли виникає нагальна потреба в розробці ефективних методів управління організаційними системами різного призначення та різних рівнів з метою відшукання найефективніших способів досягнення заданих результатів. Виконання безпосередніх емпіричних досліджень відповідних процесів та явищ є недоцільним з багатьох причин: вартість досліду, їх динамічність та унікальність тощо. З урахуванням цих обставин дослідження замінюються аналізом відповідних математичних моделей [1, с. 5].

Мета та завдання. Дослідити деякі типи задач динамічного програмування, зокрема, задачі про рюкзак та задачі відшукання найкоротшого шляху (т.зв. задача про капіталовкладення між підприємствами).

Основна частина. В економічних, виробничих, технологічних та інших процесах різних галузей виникають задачі, подібні за постановкою та мають ряд спільних ознак. Досить поширеною є задача про рюкзак, яка формулюється так: рюкзак (вагон, судно, літак) має обмежену вантажність. Потрібно так заповнити рюкзак, щоб отримати максимальний прибуток.

Широке застосування математичних методів в цілях вдосконалення виробництва та управління стимулювало дослідження в області математичного програмування. Задача пакування рюкзака є однією з 21 NP-повних задач Ричарда Карпа, викладених в його статті 1972 року. Інтенсивне дослідження проблеми почалось з середини XX століття, але відома згадка ще в 1897 році, в статті Джорджа Метьюза Балларда. Описання задачі досить просте, але розв’язання – складне. Існуючі алгоритми, на практиці, здатні розв'язати задачі досить великих розмірів. Однак унікальна структура задачі, а також той факт, що вона присутня як підзадача у більших, загальніших проблемах, робить є важливою для наукових досліджень. Проаналізуємо розв’язування задачі про рюкзак декількома методами, порівняємо їх за такими критеріями як швидкість виконання, оптимальність розв’язку та простота у використанні.

Задача 1. Нехай необхідно завантажити судно вантажністю G =35 тонн, якщо відомі такі дані (табл. 1):

Табл. 1

Тип речей, i	Кількість речей, x_i штук	Вага g_i, тонн	Вартість v_i, тис. грн.
1	x_1	5	10
2	x_2	10	23
3	x_3	15	28

Одним із точних методів є динамічне програмування, скористаємося ним для розв’язання цієї задачі. Математична модель задачі має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \to \max; \quad \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \le G; i = \overline{1,n}.$$

Для початку визначимо максимально можливу кількість завантаження судна лише однією річчю. Так $x_{i\max} = \left[\frac{G}{g_i}\right]$, тобто найбільше можливе x_1=5, x_2=3, а x_3=2. Процес завантаження судна розбивають на три етапи (кількість етапів визначається по кількості речей) [2, 160-161]. Згідно з принципом динамічного програмування, розрахунки починаються із становища, для якого рішення є відомим. тому перший етап складається із поступових завантажень судна лише першою річчю (табл. 2). Другий етап складається з чотирьох таблиць, які виконуються при зростаючому на одиницю значення x_2 та поступовим додаванням речей x_1 (табл. 3-6). За результатами цих таблиць складаємо підсумкову другого етапу (табл. 7).

Табл. 2

тонни	x_1	F_1
0..5	0	0
6..11	1	10
12..17	2	20
18..23	3	30
24..29	4	40
30..35	5	50

Табл. 3

тонни	x_1	x_2	F_{20}
0 .5	0	0	0
6..11	1	0	0
12..17	2	0	20
18..23	3	0	30
24..29	4	0	40
30..35	5	0	50

Табл. 4

тонни	x_1	x_2	F_{21}
0..5	0	0	0
6..11	0	1	23
12..17	1	1	33
18..23	2	1	43
24..29	3	1	53
30..35	4	1	63

Табл. 5

тонни	x_1	x_2	F_{22}
0..5	0	0	0
6..11	1	0	10
12..17	2	0	20
18..23	0	2	46

Табл. 6

тонни	x_1	x_2	F_{23}
0..5	0	0	0
6..11	1	0	10
12..17	2	0	20
18..23	3	0	30

24..29	1	2	56
30..35	2	2	66

24..29	4	0	40
30..35	0	3	69

Третій етап починається із завантаження судна при $x_3 = 0$, після цього приймається значення $x_3 = 1$ та $x_3 = 2$ (табл. 8-10).

Табл. 7

тонни	x_1	x_2	F
0..5	0	0	0
6..11	0	1	23
12..17	1	1	33
18..23	0	2	46
24..29	1	2	56
30..35	0	3	69

Табл. 8

тонни	x_1	x_2	x_3	F_{30}
0..5	0	0	0	0
6..11	0	1	0	23
12..17	1	1	0	33
18..23	0	2	0	46
24..29	1	2	0	56
30..35	0	3	0	69

Табл. 9

тонни	x_1	x_2	x_3	F_{31}
0..5	0	0	0	0
6. 11	0	1	0	23
12..17	0	0	1	28
18..23	1	0	1	38
24..29	0	1	1	51
30..35	0	2	1	74

Табл. 10

тонни	x_1	x_2	x_3	F_{32}
0..5	0	0	0	0
6..11	0	1	0	23
12..17	1	1	0	33
18..23	0	2	0	6
24..29	1	2	0	56
30..35	0	0	2	56

З таблиць 8-10 видно, що оптимальне завантаження судна здійснюється при $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ і максимальний прибуток складатиме 74 тис. грн.

Скористаємося для розв’язання цієї задачі можливостями Excel, а саме командою «Поиск решения». Для її використання необхідно побудувати математичну модель, використовуючи ті ж позначення маємо:

$$F = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \to \max ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i \le G; i = \overline{1,n}.$$

$$x_i \in Z\,,\ 0 \le x_i \le \left[\frac{G}{g_i}\right].$$

	A	B	C	D
1	G=	35		
2	xi	gi	vi	[G/gi]
3	0	6	10	5
4	2	10	23	3
5	1	15	28	2
6				
7	gi*xi=	35		
8	vi*xi=	74		

Рис. 1

У середовищі Excel заповнюємо наші вихідні дані, знаходимо всі невідомі з математичної моделі: $\sum_{i=1}^{n} g_i x_i$, $\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$. Тепер викликаємо команду «Поиск решения» та заповнюємо її поля, натискаємо «Выполнить». Маємо точний результат (рис. 1).

Розглянемо процес розв’язування цієї ж задачі наближеним методом, який носить назву жадібний. Його суть полягає в тому, щоб повністю завантажити судно спочатку предметами, що мають найбільшу вартість. Потім незаповнений об’єм доповнити тими предметами, які мають меншу вартість.

Тобто, товар, що має найбільшу вартість – це x_3, ми можемо ним завантажити судно лише на 30 тонн і при цьому отримати прибуток 56 тис. грн. Залишиться вільними на судні 5 тонн, але ніяким іншим товаром ми їх не можемо заповнити. Тому при використанні жадібного методу максимальний прибуток становить 56 тис. грн.

Задача 2 (відшукання найкоротшого шляху). Необхідно перевезти вантаж з міста A(1) в місто B(14). Мережа доріг, що зв’язує ці міста, наведена на рис. 2. Вартість перевезення вантажу проставлена над відповідними дугами мережі. Необхідно знайти маршрут між A та B, для якого сумарні витрати на перевезення вантажу були б найменшими (тобто знайти найкоротший шлях).

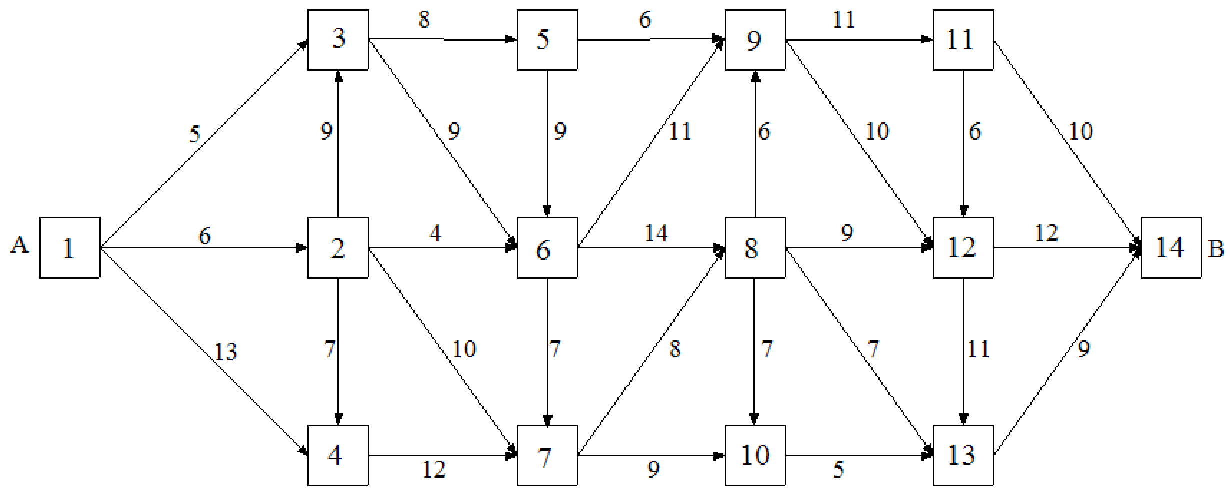

Рис. 2

На рис. 2 вершинам мережі поставлені у відповідність міста, а дугам транспортні магістралі. Згідно принципу оптимальності Беллмана, аналіз слід починати з кінцевого моменту.

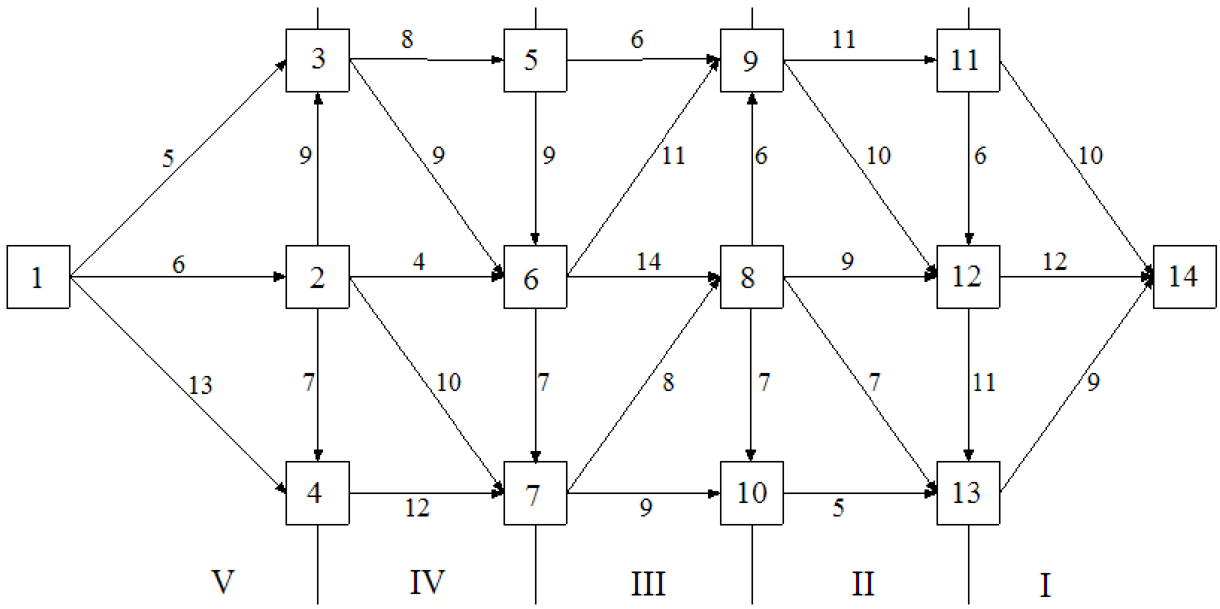

Рис. 3

Знайдемо оптимальні шляхи, що з'єднують пункт 14 з кожною точкою вертикалі з транспортною мережею. Таких точок перетину 3. Тобто на першому етапі приймається рішення, як в пункт 14 найоптимальніше потрапити з пунктів 11, 12 та 13. З пункту 11 до 14 можна дібратися трьома шляхами:

Табл. 11

Шлях	11→14	11→12→14	11→12→13→14
Вартість	10	6+12=18	6+11+9=26

З цих можливих шляхів треба обрати найдешевший. Тобто, найефективніший буде перший варіант, який коштуватиме 10 грошових одиниць (умовно оптимальний шлях замальовано в таблицях в інший колір).

До пункту 14 з пункту 12 можна дібратись двома способами:

Табл. 12

Шлях	12→14	12→13→14
Вартість	12	11+9=20

Умовним оптимумом буде шлях вартістю 12 грошових одиниць: 12→14.

З пункту 13 до пункту 14 один єдиний шлях, який і буде умовно оптимальним: 13→14, його вартість 9 гр. од.

Підіб'ємо підсумки першого етапу:

Табл. 13

Умовно оптимальний шлях	11→14	12→14	13→14
Вартість	10	12	9

Для другого етапу будемо шукати умовно оптимальні шляхи з пунктів 8, 9, 10 до 11, 12, 13.

Табл. 14

Шлях	9→11	9→12	9→11→12	9→11→12→13	9→12→13
Вартість	11	10	11+6=17	11+6+11=28	10+11=21

З пункту 8 до пункту 11 є єдиний шлях 8→9→11, який коштує 6+11=17 гр. од. З пункту 8 до пункту 12 є такі можливі шляхи:

Табл. 15

Шлях	8→12	8→9→12	8→9→11→12
Вартість	9	6+10=16	6+11+6=23

До пункту 13 з 8 можна потрапити так:

Табл. 16

Шлях	8→13	8→10→13	8→12→13	8→9→12→13	8→9→11→12→13

Вартість	7	7+5=12	9+11=20	6+10+11=27	6+11+6+11=33

З пункту 10 єдиний шлях до пункту 13, тобто він і буде умовно оптимальним та коштує 5 гр. од. (10→13).

Підіб'ємо підсумки етапу 2, використовуючи результати попереднього етапу: $8\xrightarrow{6}9\xrightarrow{11}11\xrightarrow{10}14\ (27)$; $8\xrightarrow{9}12\xrightarrow{12}14\ (21)$; $8\xrightarrow{7}13\xrightarrow{9}14\ (16)$. Оптимальний шлях з пункту 8 до 14 є шлях через пункт 13 (останній варіант) і коштує він 16 гр. од.:

$9\xrightarrow{11}11\xrightarrow{10}14\ (21)$; $9\xrightarrow{10}12\xrightarrow{12}14\ (22)$; $9\xrightarrow{10}12\xrightarrow{11}13\xrightarrow{9}14\ (30)$.

Умовно оптимальним для шляху з пункту 9 до 14 є перший варіант, який коштує 21 гр. од. З пункту 10 до 14 є єдиний варіант, тому він буде і оптимальним: $10\xrightarrow{5}13\xrightarrow{9}14\ (14)$.

На етапі 3 визначаємо умовно оптимальні шляхи від пунктів 5, 6, 7 до 8, 9, 10. В пункт 9 з пункту 5 можна потрапити чотирма шляхами (див. табл. 17):

Табл. 17

Шлях	5→9	5→6→9	5→6→8→9	5→6→7→8→9
Вартість	6	9+11=20	9+14+6=29	9+7+8+6=30

Визначимо умовно оптимальний шлях з пункту 5 до п. 8 (див. табл. 18):

Табл. 18

Шлях	5→6→8	5→6→7→8
Вартість	9+14=13	9+7+8=24

Аналогічні дії пророблюємо і для визначення умовно оптимальних шляхів з пункту 5 до пункту 10, а також з пунктів 6 та 7 до пунктів попереднього етапу (див. табл. 19-23):

Табл. 19

Шлях	5→6→8→10	5→6→7→10	5→6→7→8→10
Вартість	9+14+7=30	9+7+9=25	9+7+8+7=31

Табл. 20

Шлях	6→9	6→8→9

Вартість	11	14+6=20

Табл. 21

Шлях	6→8	6→7→8
Вартість	14	7+8=15

Табл. 22

Шлях	6→8→10	6→7→10	6→7→8→10
Вартість	14+7=21	7+9=16	7+8+7=22

Існують єдині шляхи з пункту 7 до пунктів 8, 9, а тому вони також і оптимальні: $7 \xrightarrow{8} 8\,(8)$; $7 \xrightarrow{8} 8 \xrightarrow{6} 9(14)$.

Табл. 23

Шлях	7→10	7→8→10
Вартість	9	8+7=15

Підіб'ємо підсумки 3 етапу, враховуючи результати попередніх етапів:

$5 \xrightarrow{6} 9 \xrightarrow{11} 11 \xrightarrow{10} 14\,(27)$; $5 \xrightarrow{9} 6 \xrightarrow{14} 8 \xrightarrow{7} 13 \xrightarrow{9} 14\,(39)$; $5 \xrightarrow{9} 6 \xrightarrow{7} 7 \xrightarrow{9} 10 \xrightarrow{5} 13 \xrightarrow{9} 14\,(39)$.

Оптимальним для шляху з пункту 5 до 14 є перший варіант.

$6 \xrightarrow{11} 9 \xrightarrow{11} 11 \xrightarrow{10} 14\,(32)$; $6 \xrightarrow{14} 8 \xrightarrow{7} 13 \xrightarrow{9} 14\,(30)$; $6 \xrightarrow{7} 7 \xrightarrow{9} 10 \xrightarrow{5} 13 \xrightarrow{9} 14\,(30)$.

Оптимальними одночасно є два останні варіанти.

$7 \xrightarrow{14} 9 \xrightarrow{11} 11 \xrightarrow{10} 14\,(35)$; $7 \xrightarrow{8} 8 \xrightarrow{7} 13 \xrightarrow{9} 14\,(24)$; $7 \xrightarrow{9} 10 \xrightarrow{5} 13 \xrightarrow{9} 14\,(23)$.

На четвертому етапі розв'язування задачі визначаємо умовно оптимальні шляхи з пунктів 2, 3, 4 до пунктів 5, 6, 7 (табл. 24-26).

Табл. 24

Шлях	3→5	3→5→6	3→6	3→5→6→7	3→6→7
Вартість	8	8+9=17	9	8+9+7=24	9+7=16

З пункту 2 єдиний шлях до пункту 5, вартість якого 17: $2 \xrightarrow{9} 3 \xrightarrow{8} 5$.

Табл. 25

Шлях	2→6	2→3→5→6	2→3→6

Вартість	4	9+8+9=26	9+9=18

Табл. 26

Шлях	2→7	2→4→7	2→6→7	2→3→6→7	2→3→5→6→7
Вартість	10	7+12=19	4+7=11	9+9+7=25	9+8+9+7=33

З пункту 4 взагалі єдиний шлях лише до пункту 7, який коштує 12 гр. од.

Підведемо підсумки етапу 4, враховуючи три попередні етапи:

$3 \xrightarrow{8} 5 \xrightarrow{6} 9 \xrightarrow{11} 11 \xrightarrow{10} 14\ (35)$; $3 \xrightarrow{9} 6 \xrightarrow{14} 8 \xrightarrow{7} 13 \xrightarrow{9} 14\ (39)$; $3 \xrightarrow{9} 6 \xrightarrow{7} 7 \xrightarrow{9} 10 \xrightarrow{5} 13 \xrightarrow{9} 14\ (39)$;

$3 \xrightarrow{9} 6 \xrightarrow{7} 7 \xrightarrow{9} 10 \xrightarrow{5} 13 \xrightarrow{9} 14\ (39)$.

Найефективніший перший шлях.

$2 \xrightarrow{9} 3 \xrightarrow{8} 5 \xrightarrow{6} 9 \xrightarrow{11} 11 \xrightarrow{10} 14\ (44)$; $2 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{14} 8 \xrightarrow{7} 13 \xrightarrow{9} 14\ (34)$; $2 \xrightarrow{10} 7 \xrightarrow{9} 10 \xrightarrow{5} 13 \xrightarrow{9} 14\ (33)$.

Останній шлях виявився умовно оптимальним шляхом з 2 до пункту 14, і коштує він 33 гр. од.

З четвертого пункту єдиний шлях до пункту 14: $4 \xrightarrow{12} 7 \xrightarrow{9} 10 \xrightarrow{5} 13 \xrightarrow{9} 14\ (35)$.

Завершальний етап включає визначення умовно оптимального шляху з початкового пункту 1 до пунктів 2, 3, 4 (табл. 27):

Табл. 27

Шлях	1→3	1→2→3	1→2	1→4	1→2→4
Вартість	5	6+9=15	6	13	6+7=13

Як видно, шлях до пункту 4 має два умовно оптимальні варіанти.

Визначимо розв’язок задачі, враховуючи всі етапи:

$1 \xrightarrow{6} 2 \xrightarrow{10} 7 \xrightarrow{9} 10 \xrightarrow{5} 13 \xrightarrow{9} 14\ (39)$; $1 \xrightarrow{5} 3 \xrightarrow{8} 5 \xrightarrow{6} 9 \xrightarrow{11} 11 \xrightarrow{10} 14\ (40)$; $1 \xrightarrow{13} 4 \xrightarrow{12} 7 \xrightarrow{9} 10 \xrightarrow{5} 13 \xrightarrow{9} 14\ (47)$.

Тобто, найефективніший маршрут між *A* та *B*, для якого сумарні витрати на перевезення вантажу були б найменшими: $1 \xrightarrow{6} 2 \xrightarrow{10} 7 \xrightarrow{9} 10 \xrightarrow{5} 13 \xrightarrow{9} 14\ (39)$.

Це і є відповідь до нашої задачі.

Слід відзначити, що у всіх наведених задачах використовується критерій адитивності, тобто критерій оптимізації суми значень, які отримуються на окремих етапах. Як правило, у більшості практичних задач, що розв’язуються методом динамічного програмування, критерій є адитивним.

Висновки. Безумовно, всі наведені методи мають як свої переваги, так і недоліки. Розв'язування задачі динамічним програмуванням займає більше часу, але дає точний результат і не потребує виконання складних операцій. Розв'язування задачі у середовищі Excel поєднує в собі переваги попередніх методів: займає мало часу, дає точний результат, але потребує побудови точної математичної моделі.

Список літератури:

1. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці. – Х., Гриф, 2002.– 580с.

2. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій: Навчальний посібник. – 2-ге видання, виправлене. – К.: ВД «Професіонал», 2005. – 264с.