УДК 371.512

АНАЛІЗ СХЕМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРОМ

Фільнюк Марина

Науковий керівник: доктор історичних наук, професор Ріжняк Р. Я.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті розглядається аналіз різних схем розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром.

Ключові слова: рівняння, нерівності, параметр, алгебра, метод.

ANALYSIS OF THE SCHEMES FOR SOLVING EQUATIONS AND INEQUALITIES WITH THE PARAMETER

Filniuk Marina

Scientific supervisor: Doctor of historical sciences, Professor Rizhniak R. Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article deals with analysis of the different schemes for solving equations and inequalities with the parameter.

Key words: equations, inequality, parameter, algebra, method.

Постановка проблеми. Сучасний стан розвитку шкільної освіти в Україні передбачає активне впровадження практичної складової математики як наріжного каменю формування успішної людини. А на практиці ми все частіше стикаємося з тим, що учнів навчають робити все за заданим алгоритмом, не показуючи, що вся краса математики криється у творчості, у креативному підході до розв'язування певних видів завдань. А саме до таких і відносяться рівняння та нерівності з параметрами. У задачах з параметрами немає чіткого алгоритму розв'язування, а є лише необхідний базис знань з курсу алгебри та творчість самого учня.

Аналіз досліджень і публікацій. Аналізуючи різні публікації та вивчаючи відповідні джерела, можна прослідковувати закономірність, що розв'язанню задач із параметрами в шкільній програмі приділяється недостатньо уваги. Основні труднощі при розв'язуванні задач із параметрами обумовлені тим, що наявність параметра змушує вирішувати задачу не за шаблоном, а розглядати різні випадки, при кожному з яких методи розв'язання суттєво відрізняються один від одного [8], [9]. Різні підходити до вирішення таких задач розглядають у своїх працях Крамор В.С., Дьячков А.К., Мочалов В.В. та інші.

Метою статті є вивчення та аналіз різних схем розв’язування систем та нерівностей з параметром для подальшого з’ясування доцільності використання таких завдань у роботах ЗНО.

Виклад основного матеріалу дослідження. Різноманітність задач із параметрами охоплює весь курс шкільної математики. Володіння прийомами розв'язання задач із параметрами можна вважати критерієм знань основних розділів шкільної математики, рівня математичного й логічного мислення.

У ході вивчення нерівностей у шкільній програмі широко використовується метод інтервалів, наочно-графічний метод і функціональний метод. Наочно-графічний метод застосовують, якщо нерівність не можна розв'язати аналітично. Під функціональним методом розв'язання нерівностей розуміють метод розв'язання, що спирається на використання властивостей функцій, які входять до нерівності.

1) Аналітичний метод розв'язання задач із параметром є найважчим способом, що вимагає високої грамотності та найбільших зусиль в оволодінні ним [3].

Приклад 1. Розв'язати рівняння $ax\,(a-1) = a-1$.

Розв'язання. Перед нами лінійне рівняння, що має зміст при всіх допустимих значеннях a. Будемо розв’язувати його «як звичайно»: ділимо обидві частини рівняння на коефіцієнт при невідомому. Доведеться розглянути окремо випадок, коли коефіцієнт при невідомому рівний 0.

1. $a = 1$, тоді рівняння прийме вид $0 \cdot x = 0$, де x – будь-яке число;
2. $a = 0$, тоді $0 \cdot x = -1$ – рівняння коренів не має;

3. $a \neq 0$, $a \neq 1$, тоді $a\,(a - 1)\cdot x = a - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{a-1}{a(a-1)} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{a}$.

Відповідь: 1) якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$, то $x = 1/a$;

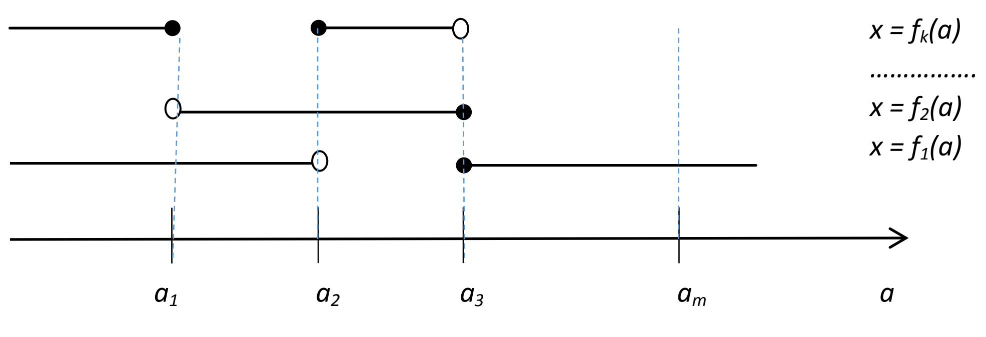
2) якщо $a = 1$, то x – будь-яке число;

3) якщо $a = 0$, то коренів немає.

Отже, на прикладах розглянуто основні поняття рівнянь із параметрами: область допустимих значень; область визначення; загальні розв'язки; контрольні значення параметрів; типи окремих рівнянь.

На основі введених понять визначимо загальну схему розв'язання будь-якого рівняння $F(a; x) = 0$ з параметром a (для випадку двох параметрів схема аналогічна):

- визначається область допустимих значень параметра та область визначення;
- визначаються контрольні значення параметра, що розбивають область допустимих значень параметра на області однорідності окремих рівнянь;
- для контрольних значень параметра відповідні рівняння досліджуються окремо;
- знаходяться загальні розв'язки $x = f_1(a), \ldots, f_k(a)$ рівняння $F(a;x) = 0$ на відповідних множинах $A_{f1}, \ldots\ldots, A_{fk}$ значень параметра;
- складається модель загальних розв'язків, контрольних значень параметра в наступному вигляді;



- на моделі виділяються проміжки значень параметра з однаковими розв'язками (області однорідності);

- для контрольних значень параметра та виділених областей однорідності записуються характеристики всіх типів окремих розв'язків.

2) Графічний метод

Залежно від задачі (із змінною *x* і параметром *a*) розглядаються графіки або в координатній площині x*0y*, або в координатній площині *x0a*. Можна виділити два різновиди застосування графічного методу при розв'язанні рівняння *f* (*x*) = *f* (*a*):

1) На площині x*0y* розглядаються графік *y = f (x)* і множина графіків *y* = *f*(*a*). Сюди ж відносяться задачі, що розв'язуються за допомогою «пучка прямих». Цей спосіб виявляється зручним у задачах із двома невідомими й одним параметром.

2) На площині *x0a* (яку називають також фазовою) розглядаються графіки, у яких *x* – аргумент, а *a* – значення функції. Цей спосіб зазвичай застосовується в задачах, де фігурують лише одна змінна та один параметр (або, що зводяться до таких) [2].

Приклад 2. При яких значеннях параметра *a* рівняння $3-\sqrt{\;x-2\;^{2}}=a$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Записуємо дане рівняння у вигляді $3-|x-2|=a$. Побудуємо графічне зображення обох частин рівняння (рис. 1). Ліва частина являє собою «прямий кут», вершина (2;3). Права частина являє собою множину прямих, паралельних осі абсцис. За графіком видно, що єдиний розв'язок можливий при $a=3$.

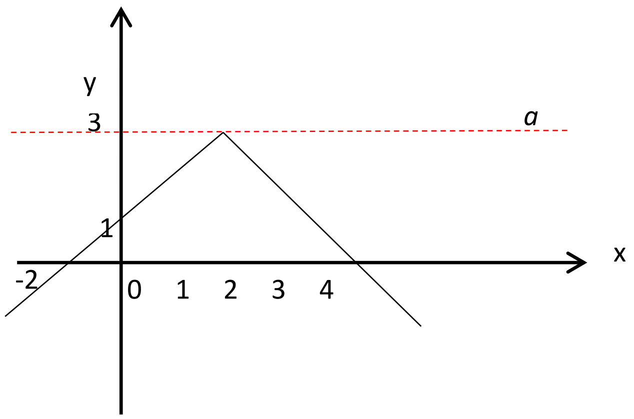


Рис.1 Рисунок до прикладу 2

Відповідь: $a = 3$

При розв'язанні деяких нерівностей з параметрами графічний метод застосовується в комбінації з методом областей, що узагальнюють метод інтервалів [4].

Задачу з параметром будемо розглядати як функцію $f\ x;a\ = 0$.

1. Будуємо графічне зображення.
2. Перетинаємо отримане зображення прямими, паралельними осі абсцис.
3. Зчитуємо потрібну інформацію.

Приклади графічної інтерпретації розв'язання завдань із параметром на основі дослідження властивостей графіків досить відомих найпростіших рівнянь таких геометричних фігур, як пряма, коло, парабола, синусоїда, квадрат, ламана, кут показують, що розв'язки стають абсолютно наочними, природніми та досить простими. Якщо рівняння однієї з фігур не залежить від змінного параметра, то графік цієї фігури нерухомий відносно системи координат. Якщо в рівняння іншої фігури входить параметр, то від його зміни залежить розміщення й, навіть, форма графіка. Тоді суть розв'язання рівняння полягає у визначенні кількості точок перетину графіків побудованих рівнянь, тобто у визначенні кількості можливих розв'язків залежно від конкретних числових значень параметра [1].

3) Метод розв'язання відносно параметра

При розв'язанні цим методом змінні x і a приймаються рівноправними та обирається та змінна, щодо якої аналітичне розв'язання визнається більш простим. Після звичайних спрощень повертаємося до вихідного змісту змінних x і a та закінчуємо розв'язання [2].

Частіше задане рівняння або нерівність розв’язується не відносно змінної, а відносно параметра. Як правило, цей метод застосовується, коли задане рівняння або нерівність є лінійним або квадратним відносно параметра. Нехай рівняння відносно змінної x, що містить параметр a, за допомогою елементарних дій приводиться до виду

$f(x) = g(a)$ (1)

зокрема до виду $f(x) = a$, де $f(x)$, $g(a)$ – певні функції. Якщо потрібно знайти значення параметра a, при яких рівняння можна розв'язати (тобто є хоча б один корінь), то треба знайти множину (область) значень $E(f)$ функції $f(x)$, коли x пробігає область визначення функції, і вимагати, щоб значення $g(a)$ належали цій множині: $g(a) \in E(f)$. Наприклад, якщо $E(f) = (A;B)$, то рівняння (2.1) розв'язується для тих значень параметра a, які задовольняють нерівності

$A < g(a) \leq B$. Зрозуміло, для всіх інших значень a рівняння (1) не має розв'язків. У загальному випадку, множина значень функції $f(x)$ може складатися з декількох проміжків, а також містити окремі точки. Крім того, якщо область визначення функції $f(x)$ містить проміжки $(-\infty;\alpha;)$ і/або $[\beta;+\infty)$, то при знаходженні множини значень функції треба врахувати ще її граничні значення при $x \to -\infty, x \to a$ та/або $x \to +\infty$.

Аналогічно можна робити й у випадку нерівностей, що зводяться елементарними діями до одного з видів

$f(x) < g(a),\ f(x) \leq g(a),\ f(x) > g(a),\ f(x) \geq g(a)$ (2)

Приклад 3. Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому рівняння $|x^2 - 3|x| - 4| = a$ має тільки чотири корені..

Розв'язання:

Побудуємо графік функції $y = |x^2 - 3|x| - 4|$ (рис. 2) і розглянемо, коли він буде мати рівно 4 точки перетину з прямою $y=a$.

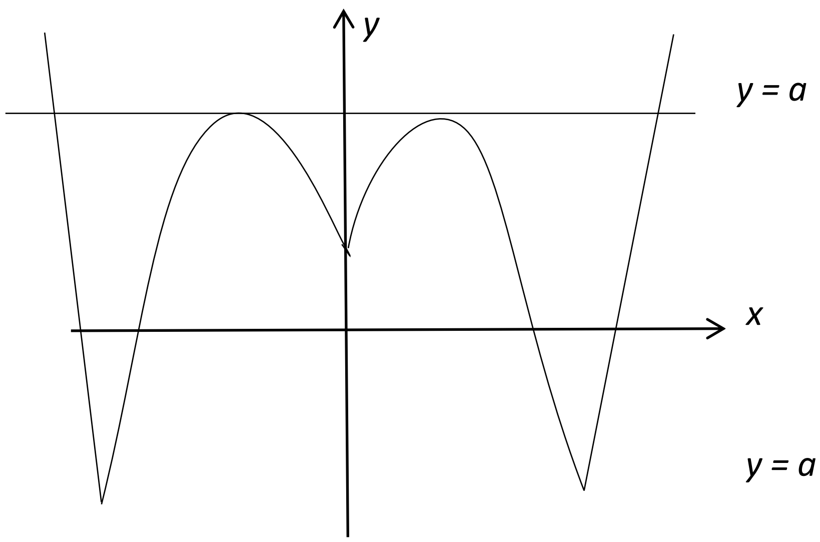


Рис. 2 Рисунок до прикладу 3

Бачимо, що при $a < 0$ точок перетину не існує, при $a = 0$ їх буде дві, потім – чотири, при $a = 5$ точок перетину буде 6, та при деякому значенні a їх знову стане чотири. Знайти це значення легко, якщо згадати, що даний графік був отриманий з параболи $y=x^2 - 3|x| - 4$ відображенням від осі Оу та згинанням через вісь Ох. Отже, координата y_0 вершини параболи перейде саме в потрібне значення параметра a.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2},$$

$$y_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\frac{3}{2} - 4 = -6{,}25,$$

Тобто $a = |y_0| = 6{,}25.$

Відповідь: 6,25.

З часу введення в систему оцінювання знань випускників навчальних закладів ЗНО в тестах з математики майже кожного року були завдання з параметрами. Не мали таких завдань лише тести 2009, 2010 (окрім пробного) та 2015 (окрім базового рівня) років.

Метою таких завдань є забезпечення якісного розподілу учасників тестування з достатнім та високим рівнем навчальних досягнень. Завдання із параметрами вимагають не тільки глибоких знань програмного матеріалу та їх систематизації, а й вмінь використовувати ці знання у нестандартних задачах, навичок робити логічні креативні міркування, які в деяких завданнях допоможуть прийти до висновку, що розв’язувати завдання зовсім не потрібно, а достатньо лише проаналізувати умову і дати відповідь.

Розглянемо задачу з параметром, що була представлена на ЗНО 2017. Це система рівнянь. Її розв’язання виконуємо аналітичним способом, що є чи не найскладнішим способом, адже для її розв’язання необхідно якісно володіти різних тем алгебри.

$$x - y \ = |x - a|$$
$$\lg \ y - a \ = \lg \ 4a^2 + x - x^2$$

Скориставшись властивостями модуля, тобто |a|=|b|, якщо a=b, або a=-b і, що логарифмічне рівняння рівносильне системі $\begin{matrix} f \ x \ = g \ x \ , \\ f \ x \ > 0 \end{matrix}$

Тому дана система рівносильна сукупності 2-х систем

$$\begin{matrix} y > a \\ x - y = x - a \\ x - y = 4a^2 + x - x^2 \\ y > a \\ x - y = a - x \\ x - y = 4a^2 + x - x^2 \end{matrix}$$

Перша система несумісна, так як y=a, що неможливо. Розв'яжемо другу систему:

$$\begin{matrix} y > a \\ x - y = a - x \\ x - y = 4a^2 + x - x^2 \end{matrix}$$

Маємо $\begin{matrix} y > a \\ 2x = a + y \\ x - y = 4a^2 + x - x^2 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} y > a \\ y = 2x - a \\ x - y = 4a^2 + x - x^2 \end{matrix}$$

Підставимо знайдене значення y в друге рівняння системи і розв'яжемо його:

$$2x - a - a = 4a^2 + x - x^2$$

$$2x - 2a = 4a^2 + x - x^2$$

$$x^2 - x - 4a^2 + 2x - 2a = 0$$

$$x^2 + x - 4a^2 - 2a = 0$$

$$x^2 + x - (4a^2 + 2a) = 0$$

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння відносно x:

$$D = 1 + 4 \cdot \ 4a^2 + 2a \ = 1 + 16a^2 + 8a = (4a + 1)^2$$

Якщо $D = 0$, тобто $4a + 1 = 0, a = -\frac{1}{4}$, то $x = -\frac{1}{2}, y = 2x - a = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

Але дана пара не є розв'язком системи, так як $-\frac{3}{4} < -\frac{1}{4}$, тобто $y<a$.

Якщо $a \neq -\frac{1}{4}$, то рівняння має два корені: $x_1 = \frac{-1-4a-1}{2} = \frac{-2-4a}{2} = -1 - 2a$

$$x_2 = \frac{-1 + 4a + 1}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$$

Знайдемо $y_1 = 2 \cdot (-1 - 2a) - a = -2 - 4a - a = -2 - 5a$

Але $y>a$, тому маємо $-2 - 5a > a$, тобто $-6a > 2; a < -\frac{1}{3}$

Отже, маємо перший розв'язок системи, якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$, то $(-1 - 2a; -2 - 5a)$

Знайдемо $y_2 = 2 \cdot 2a - 2 = 3a$

Але $y>a$, тому маємо $3a > a$, тобто $2a > 0; a > 0$

Отже, маємо другий розв'язок системи: якщо $a \in (0; \infty)$, то $(2a; 3a)$

Відповідь: якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$, то $(-1 - 2a; -2 - 5a)$

якщо $a \in [-\frac{1}{3}; 0]$, то розв'язків немає

якщо $a \in (0; \infty)$, то $(2a; 3a)$.

Бачимо, що розв'язання включає багато різних умов, які треба врахувати, щоб правильно розв'язати задачу.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. У статті розглянуто типи задач із параметрами, розкрито сутність аналітичного, графічного методу, а також методу розв'язання відносно параметра, які використовуються для розв'язання рівнянь і нерівностей з параметрами. Також подано приклади розв'язання типових рівнянь і нерівностей.

У дослідженні подано розв'язок задачі з параметрів із тесту ЗНО-2017. Зрозуміло, що задачі з параметром – це специфічний тип завдань, для розв'язання яких треба бути не лише добре обізнаним із основними принципами та схемами розв'язування, а й вміти творчо підходити до їх вирішення, мати розвинене логічне та критичне мислення. Актуальним залишається питання, чи потрібні такі завдання на ЗНО? І якщо так, то як саме варто підбирати такі завдання? Питання лишається відкритим і в подальших дослідженнях ми спробуємо дати відповідь на нього.

Список використаної літератури

1. Дьячков А.К. Функционально-графический подход к решению задач с параметрами [Текст]: учебно-методическое пособие для учителей и учащихся. Челябинск, 2010, 33 с.
2. Емельянова Н.В. Презентация на тему «Уравнения и неравенства с параметрами» [Електронний ресурс] Режим доступу: http://www.myshared.ru/slide/623083/
3. Козко А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи. Москва, МЦНМО, 2007, 296 с.
4. Крамор В. С. Задачі з параметрами і методи їх розв'язання. Тернопіль, Навчальна книга – Богдан, 2011, 416 с.
5. Мочалов В.В. Уравнения и неравенства с параметрами. – Москва, 2006, 192 с.
6. Ромашко В. Д. Решение уравнений и неравенств с параметрами [Електронний ресурс] Режим доступу: http://parametry.narod.ru/reshenie2.html
7. Фалилеева М.В. Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами // Фундаментальные исследования. 2013. № 4 (часть 5). С. 1230–235.
8. Ріжняк Р.Я., Кушнір В.А. Лабораторний практикум з методики навчання математики // Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Тернопіль, Навчальна книга – Богдан, 2013, 224 с.
9. Ріжняк Р.Я., Кушнір В.А. Системне моделювання процесу розв'язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // ПостМетодика. 2009. № 4 (88). С. 22-27.