УДК 514.13.132

«МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ»

Горевич Олександр Андрійович

Науковий керівник: Доктор фізико-математичних наук, професор Волков Юрій Іванович

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

В статті велика увага приділена введенню елементів математичного аналізу в шкільну програму, різні методи, форми, а також погляди різних фахівців. Розглядаються також такі поняття як границя функції, первісна, інтеграл, похідна. І разом з цим увага приділена методичній частині. Також показано формулу Ньютона – Лейбніца, оскільки на даний час вона є обов’язковою для вивчення у шкільному курсі математики. За допомогою вказаних початкових формул, понять, теорем і аксіом, діти у старшій школі мають змогу вирішувати задачі, приклади. І досить важливим є те, що діти отримують фундаментальну частину знань, які вона зможе застосувати у своєму подальшому навчанні.

Ключові слова: інтеграл, похідна, первісна, функція, формула Ньютона – Лейбніца, диференціювання, нескінченно велика, нескінченно мала.

«METHODS OF SOLVING THE PROBLEM OF ELEMENTAL MATHEMATICS BY MATHEMATICAL ANALYSIS»

Gorevich Alexander Andreyevich

Scientific supervisor: Doctor of Physics and Mathematics, Professor Volkov Yuri Ivanovich.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

In the article, great attention is paid to the introduction of elements of mathematical analysis in the school curriculum, different methods, forms, as well as the views of various specialists. Considered also such concepts as the boundary of function, primitive, integral, derivative. And with it attention is paid to the methodical part. The Newton-Leibniz formula is also shown, since at the present time it is compulsory for study at the school's mathematics course. With the help of these initial formulas, concepts, theorems, and axioms, children in high *school have the opportunity to solve problems and examples. And it is very important that children receive the fundamental part of the knowledge that she can apply in her further education.*

Key words: integral, derivative, primitive, function, Newton-Leibniz formula, differentiation, infinitely large, infinitesimal.

Постановка проблеми.

Введення елементів математичного аналізу в шкільний курс математики досі викликає суперечки між методистами. Одні вважають, що математичний аналіз досить вивчати тільки в вузі, інші вважають введення елементів аналізу необхідним в школі. Більшість фахівців вважають, що все ж таки вивчення математичного аналізу необхідне в шкільній програмі опираючись на методичну систему підготовки учнів до вступу до вищих навчальних закладів. Але є все ж ті фахівці, які стверджують, що математичний аналіз, учні повинні вивчати в вищих навчальних закладах. Незалежно від цих розбіжностей вчитель стоїть перед необхідністю навчати дітей елементам аналізу. Пропедевтика математичного аналізу починається в середній школі, а ключові поняття математичного аналізу «інтеграл», «первісна» вводяться в курсі середньої школи. У профільних класах елементи математичного аналізу розглядаються набагато глибше, тут рівень знань учнів ближче до рівня 1 курсу математичних і технічних спеціальностей вузів. У своїй статті я звертаю увагу до підготовки старшокласників не профільних класів, так званого «базового» рівня. Всі вищевикладені протиріччя між фахівцями, зокрема, пов'язані зі складнощами учнів в вивченні і засвоєнні понять математичного аналізу. Для того щоб оволодіти похідною і інтегралом учням необхідно мати хороші уявлення про нескінченно малі і нескінченно великі величини, границі, збільшенні функції, диференціюванні та ін.

***Аналіз досліджень і публікацій*.**

При вивченні даного питання основна увага у статті звертається на програму вивчення математичного аналізу в школі, методичні вказівки, підручники та інше. Важливим також є тенденції, що склалися в навчанні елементів математичного аналізу в старшій школі і виробленні методичних матеріалів, що сприяють допомогти учням, вчителю в підготовці та здачі зовнішнього незалежного оцінювання.

***Мета статті*.**

Важливим є той факт, що при вивченні математичного аналізу в школі учням потрібно детально пояснити навіщо їм вивчати таку складну дисципліну в школі і показати актуальність даного питання. Стосовно математичного аналізу, то програма пропонує вивчення таких питань Похідна і її властивості. Методика вивчення похідної в шкільному курсі математики. Також важливим є навчити дітей застосовувати свої знання на практиці для вирішення різних видів задач. Оскільки в шкільному курсі є вище згаданий термін як «похідна» то очевидним є той факт що учні повинні мати розуміння про «первісну» і «інтеграл» і в подальшому також застосовувати свої знання на практиці.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження.

Розглянемо похідну і її властивості. З історії розвитку математичного аналізу відомо, що до відкриття похідної прийшли незалежно один від одного Г. Лейбніц і І. Ньютон (1643-1727), перший - розв'язуючи геометричну задачу про знаходження положення дотичної до кривої у певній точці, а другий - розв'язуючи задачу механіки про визначення миттєвої швидкості. У вузівських курсах математичного аналізу для підведення студентів до означення похідної здебільшого розв'язують обидві задачі. У шкільному курсі через обмеженість часу найчастіше докладно розглядають одну з цих задач. Перевагу слід віддати задачі про миттєву швидкість, оскільки з нею учні вже ознайомились в курсі фізики, а на цьому етапі навчання доцільно оформити її розв'язання в термінах і символах математичного аналізу (приріст аргументу, приріст функції, границя функції). При цьому варто в процесі розв'язування чітко виділити чотири кроки, які розкривають зміст похідної і які доцільно виконувати надалі при виведенні формул і доведенні основних теорем про похідні [1,116].

Розглядаючи задачу про миттєву швидкість, треба звернути увагу учнів на те, що середня швидкість нерівномірного прямолінійного руху певною мірою характеризує його, проте вона часто не задовольняє потреб практики. Наприклад, диспетчерові автобусної станції досить знати середню швидкість, з якою автобус рухається від станції відправлення до кінцевого пункту, а автоінспекторові, який стежить за безпекою руху, важливо знати, з якою швидкістю рухався автобус у момент перетину залізничного переїзду, де не можна перевищувати швидкість. Отже, виникає потреба вміти визначати швидкість у певний момент часу t0. Щоб учні неформально сприйняли означення миттєвої швидкості, варто на прикладі конкретної задачі з числовими даними показати, що значення середньої швидкості прямує до певної границі, яку природно вважати числовим значенням швидкості в даний момент часу t0, тобто значенням миттєвої швидкості. Тепер потрібно ввести означення похідної. Похідною функції $y = f(x)$ в точці х0 називається границя відношення приросту Δy функції до приросту Δx аргументу за умови, що приріст Δx аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Зауважимо, що перш ніж вводити поняття похідної, варто привчити учнів до трьох різних символів, що стосуються приросту функції і відношень її до приросту аргументу. Кроки 1) -4) фактично задають правило відшукання похідної. Після введення означення доцільно знайти за його допомогою, виконуючи чотири кроки, похідні функцій $y = x^2, y = \frac{1}{x}, y = c$, де c - стала. Однак перед цим важливо наголосити, що коли похідну шукають у певній точці x_0, то вона як границя є певним числом. Коли ж функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці x інтервалу (a;b), то кожному значенню x відповідає певне значення похідної. Отже, в такому разі похідна функції $y = f(x)$ на інтервалі (a;b) є теж функцією, яку позначають символом f' або $y' = f'(x)$ Коли функцію задано формулою, наприклад, $y = x^2$, то похідну позначають і символом $\left(x^2\right)'$. [2,55]

Для більш глибокого усвідомлення учнями означення похідної доцільно зразу ж з'ясувати її механічний і геометричний зміст. Механічний зміст похідної випливає з розглянутої задачі Про миттєву швидкість. Учні самі здатні зробити висновок, що похідна дорівнює миттєвій швидкості нерівномірного руху. Цим самим з'ясовується механічний зміст похідної. Геометричний зміст похідної випливає із задачі про дотичну до кривої у певній точці: похідна в точці х0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої з додатним напрямком осі х у точці з абсцисою х0. З метою закріплення означення і алгоритму відшукання похідної за означенням (послідовним виконанням чотирьох кроків) корисно запропонувати учням у класі і як домашнє завдання обчислити похідні функцій у = 5х2 -2х, у = х, у = сх у загальному вигляді і за певних значень аргументу х.

Основні правила диференціювання функції:

1) якщо $f(x) = C\_\forall x \in (a,b), mo\_f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$, тобто похідна від сталої функції дорівнює нулю ($C' = 0$);

2) похідна незалежної змінної х дорівнює 1: $x' = 1$;

3) якщо функція f(x) диференційована в т. x, то і функція $C \cdot f(x)$, де C – стале число, також диференційовна в т. x, причому $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$, тобто сталий множник можна виносити за знак похідної;

4) якщо функції f(x) і φ(x) диференційовні в точці x, то і їх сума, різниця, добуток і частка також будуть диференційовні в точці x, причому

$$(f(x) \pm \varphi(x))' = f'(x) \pm \varphi'(x),$$
$$(f(x) \cdot \varphi(x))' = f'(x) \cdot \varphi(x) + \varphi'(x) \cdot f(x),$$
$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot \varphi(x) - \varphi'(x) \cdot f(x)}{\varphi^2(x)}, де\_\varphi(x) \neq 0$$

Основні теореми про похідні. До таких слід віднести теореми: Про неперервність диференційованої в точці функції, про похідну суми функцій, про похідну добутку функцій, про похідну частки двох функцій, про похідну степеневої функції, про похідну складної функції. Остання теорема дає можливість розширити системи вправ на обчислення похідних і застосування похідної до різноманітних задач. Перша із зазначених теорем стверджує достатню умову неперервності функції в точці і використовується при доведенні теорем про похідну добутку і частки двох функцій [3,4].

Відомі різноманітні застосування похідної. В алгебрі - застосування до дослідження функцій і побудови їх графіків. В геометрії - для знаходження рівняння дотичної. Похідна використовується в наближених обчисленнях, для наближеного розв'язування рівнянь, дослідження і відокремлення коренів рівнянь, спрощення виразів, доведення тотожностей і нерівностей, знаходження біноміальних коефіцієнтів і доведення формули бінома Ньютона. У фізиці похідною послуговуються, обчислюючи швидкість і прискорення, досліджуючи різні фізичні явища, наприклад явища резонансу. Застосування похідної для знаходження найбільших і найменших значень функцій на певному відрізку [a; b] дає змогу розв'язати широкий клас прикладних задач. У таких задачах функція не задається в готовому вигляді, а за умовою задачі треба скласти співвідношення, яке зв'язує функцію з тими змінними, від яких залежить її найбільше чи найменше значення. Дослідження функцій на монотонність. Шкільна практика показує, що при введенні ознак зростання (спадання) функцій доцільно почати з графічних ілюстрацій відомих учням найпростіших функцій $y = x^2$ і $y = x^3$. Справді, з графіка параболи $y = x^2$ бачимо, що на проміжку (0; + ∞), де функція зростає, дотична до графіка в будь-якій точці утворює гострий кут з додатним напрямом осі x. Це означає, що похідна $f'(x)$ у цих точках додатна. На проміжку ж (–∞; 0), де функція спадає, дотична до параболи утворює тупий кут з додатним напрямом осі х, тобто похідна $f'(x)$ на цьому проміжку від'ємна. Функція у = x^3 зростає на всій області визначення, тобто на проміжку (–∞; + ∞). Дотичні до графіка цієї функції у всіх точках, крім однієї (початок координат), утворюють гострі кути з додатним напрямом осі х. Це означає, що похідна даної функції в усіх точках, крім х = 0, додатна. Лише при х = 0 вона дорівнює нулю. На основі розглянутих прикладів учні самостійно сформулюють зазначені достатні умови. Треба звернути їхню увагу на те, що достатні умови є оберненими твердженнями щодо помічених на графіках у =x^2 і у =x^3 властивостей функцій та їх похідних. На прикладі дослідження однієї-двох функцій можна сформулювати відповідний алгоритм: для того щоб знайти проміжки зростання (спадання) функції, треба:

1) знайти область визначення функції і точки розриву;
2) знайти похідну;
3) записати і розв'язати нерівність $f'(x) > 0$ і вибрати з множини її розв'язків проміжки, де функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками зростання функції;
4) записати нерівність $f'(x) < 0$ і вибрати з множини її розв'язків проміжки, де функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками спадання функції. Дослідження функцій на максимуми, мінімуми, найбільші та найменші значення. Спочатку треба ввести ряд нових для учнів понять: точка максимуму функції, точка мінімуму функції, точка екстремуму, максимум функції, мінімум функції, екстремуми функції. Досвід показує, що деякі учні плутають поняття «точка максимуму функції» і «максимум функції», «точки екстремуму функції» і «екстремум функції». Слід спеціально підкреслити, що коли йдеться про точки максимуму (мінімуму), точки екстремуму функції, то мається на увазі значення аргументу, а в разі вживання понять максимум (мінімум), екстремум йдеться про значення функції. Важливо також наголосити на тому, що максимум і мінімум (екстремуми) характеризують поведінку функції в як завгодно малому околі точки x_0, а не на всій області визначення чи на відрізку області, де визначений максимум функції в певній точці може виявитись меншим від мінімуму в іншій точці. При введенні понять найбільшого і найменшого значень функції треба ще раз підкреслити, що останні два поняття характеризують поведінку функції на певному відрізку [a; b]. При введенні поняття «критичні точки функції» особливу увагу треба звернути на ті критичні точки, де похідна не існує, проілюструвавши їх відповідним графіком. Доцільно після вивчення достатніх ознак сформулювати алгоритм дослідження функцій на екстремум. Щоб дослідити функцію на екстремум, треба: По-перше, знайти критичні точки: прирівняти до нуля похідну $f'(x)$, розв'язати одержане рівняння і приєднати до коренів рівняння $f'(x) = 0$ точки, при яких похідна не існує;

По-друге розмістити критичні точки на координатній прямій в порядку їх зростання; По-третє дослідити знак похідної $f'(x)$ спочатку ліворуч, а потім праворуч від кожної критичної точки. Якщо при переході х через критичну точку похідна змінює знак з плюса на мінус, то в цій критичній точці функція y=f(x) має максимум; якщо знак $f'(x)$змінюється з мінуса на плюс, то в цій точці функція $y = f(x)$ має мінімум. Якщо при переході х через критичну точку похідна $f'(x)$не змінює знака, то в цій критичній точці функція не має ні максимуму, ні мінімуму; І останнє обчислити максимуми і мінімуми функції, підставивши в формулу $y = f(x)$ значення точок максимуму і точок мінімуму[4,15].

Оскільки задачі на знаходження проміжків зростання , спадання і екстремумів функцій пов'язані між собою, то можна сформулювати алгоритм одночасного розв'язання цих обох задач, який зручно використовувати при загальному дослідженні функцій і побудові їх графіків: щоб знайти проміжки зростання, спадання і екстремуми функції, треба:

1) Знайти область визначення функції;
2) Знайти критичні (стаціонарні) точки функції, розмістити їх в порядку зростання і занести до таблиці разом з проміжками, де функція визначена;
3) по контрольних точках знайти знак похідної на кожному з одержаних проміжків;
4) визначити за знаком похідної характер зміни (зростання чи спадання) на кожному з проміжків;
5) виявити наявність екстремуму в кожній критичній)стаціонарній) точці і обчислити його.

Розв'язуючи вправи на відшукання найбільшого і найменшого значень функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ також доцільно виділити алгоритм, який складається з трьох кроків: 1)знайти всі стаціонарні (критичні) точки функції на відрізку $[a;b]$; 2)обчислити значення функції в усіх стаціонарних точках і на кінцях a і b відрізка; 3)з одержаних чисел вибрати найбільше і найменше. Розв'язання текстових задач на знаходження найбільших і найменших значень При обчисленні найбільших і найменших значень в задачах з конкретним практичним змістом корисно дати учням правило-орієнтир розв'язання таких задач: 1)проаналізувати формулювання задачі, з'ясувавши, найбільше (найменше) значення якої величини треба знайти; вибрати незалежну змінну (аргумент) х і записати цю величину у вигляді формули, що задає відповідну функцію; 2)знайти найбільше і найменше значення цієї функції.

Темі "Первісна та інтеграл" передує тема "Похідна та її застосування". Така послідовність вивчення матеріалу створює передумови для: Розуміння учнями взаємозв'язку між операціями диференціювання та інтегрування функцій, а також основної ідеї методу диференціального й інтегрального числень; Усвідомлення учнями того факту, що апарат похідної та інтеграла - основа методу математичного аналізу [5,43].

В якості основних завдань, вирішених у процесі вивчення теми, можна виділити наступні: Введення понять первісної та інтеграла; Ознайомлення учнів з основними властивостями первісних і правилами знаходження первісних; Розкриття змісту операції інтегрування як операції, зворотної по відношенню до операції диференціювання заданої функції: Провести класифікацію типів завдань (знаходження площі криволінійної трапеції, знаходження об'єму тіла, завдання з фізичним змістом), показати, яким чином реалізується метод інтегрального числення.

Теоретичний матеріал включає в себе поняття первісної та її основна властивість поняття інтеграла функції; зв'язок між поняттями "інтеграл" і "первісна", яка встановлюється за допомогою формули Ньютона-Лейбніца; формула Ньютона-Лейбніца, як апарат обчислення інтеграла даної функції. Перераховані поняття вводяться на дедуктивній основі, дається ілюстрація використання визначення основного поняття, його властивостей за допомогою конкретних прикладів. Завдання, крім використання їх як засобу ілюстрації вводиться в розгляд теоретичного матеріалу, служать засобом його закріплення, про що свідчать і їхні формулювання, наприклад: "Знайти таку первісну функцію, графік якої проходить через дану точку".
Функція $F(x)$ зветься первісною функції $f(x)$ на деякому інтервалі дійсних, якщо $f(x)$ - похідна функції $F(x)$ на цьому інтервалі, тобто в усіх внутрішніх точках інтервалу виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Можна довести, що у будь-якої <u>неперервної</u> на інтервалі функції $f(x)$ існує первісна, яка також є неперервною функцією на цьому інтервалі. Якщо $F(x)$ — будь-яка первісна функція $f(x)$, то $F(x) + C$, де С - довільна стала, також первісна цієї функції і "невизначений інтеграл функції $f(x)$" посилається до множини $\{F(x) + C | C \in \mathbb{R}\}$, яка складається з усіх первісних функції $f(x)$, де C — довільна константа. Якщо у функції $f(x)$ існує <u>первісна</u> $F(x)$, то $I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Ця формула називається формулою Ньютона - Лейбніца, або основною формулою інтегрального числення.

Висновок.

Математичний аналіз важлива тема у шкільному курсі математики, вона застосовується при вирішенні різноманітних задач і при цьому застосовуються різні методи. Учні під час навчання повинні здобути фундаментальні знання, оскільки всі поняття, теореми, аксіоми вище згадані, допоможуть їм у подальшому навчанні. Важливість вивчення учнями математичного аналізу проявляється не лише в алгебрі, але ще в геометрії і фізиці. Важливу роль вирішення задач елементарної математики методами математичного аналізу відіграє у написанні екзаменів, а також зовнішнього незалежного тестування. Вивчення даної теми є корисним для учнів (абітурієнтів) котрі планують навчатися на технічних, фізико – математичних, кібернетичних факультетах і не лише для них, адже математичний аналіз зустрічається у програмі вищих навчальних закладів на різноманітних факультетах і спеціальностях.

***Список* літератури**

1. Логачевська С.П. Диференціація у звичайному класі : посібн. для вчителів, методистів, студ. / С.П. Логачевська. — К., 1998. — 288 с.

2. Митник О.Я. Як навчити дитину мистецтва мислення. Педагогічна психологія : навч. посіб. для слухачів курсів підвищення кваліфікації педагогічних працівників у системі післядипломної освіти / О.Я. Митник. — К. : Початкова школа, 2006. — 104 с.

3.Семенець С.П. Навчальне моделювання методів доведення в шкільному курсі математики //Математика в школі. – 2006. – №9. – С. 12-16.

4.Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-12 класи. – Київ, 2005. – 64 с.

5.Семенець С.П. Елементарна математика. Навчальна програма (розроблена на основі концепції розвивальної освіти). – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І.Франка, 2008. – 88 с.