УДК 519.115+372.851

Н.М. Войналович, Ю.І. Волков

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

ПРО МЕТОДИ ПІДРАХУНКУ КОМБІНАТОРНИХ ОБ'ЄКТІВ

На конкретних прикладах показано як застосовуються шість базових правил і три основних методи комбінаторики для розв'язування різних перелічених проблем.

Ключові слова: *бієкція, рекурентність, генератриса, правила комбінаторики.*

Постановка проблеми. Розвиток інформаційних технологій сприяв активізації комбінаторних обчислень та їх практичному застосуванні. За останні десятиліття об'єм таких підрахунків різко зріс і продовжує збільшуватись, бо за виключенням традиційних чисельних методів, які використовуються для розв'язування фізичних задач, в багатьох галузях науки та техніки все частіше використовуються методи й результати дискретної математики. Все це змушує переглядати навчальні плани для вивчення математичних дисциплін у навчальних закладах різного профілю у бік збільшення кількості годин для вивчення дисциплін дискретної математики й скорочення кількості годин на вивчення традиційних розділів математичного аналізу. Отже, виникає проблема розробки методики навчання тих, чи інших розділів дискретної математики (цим питанням, в певній мірі, була присвячена робота одного з авторів цієї статті, див. [1]).

Аналіз раніше опублікованих праць. В даній статті увага приділяється перелічувальним задачам комбінаторики як основного розділу дискретної математики. В україномовній літературі не так багато робіт, присвячених цим питанням. Відмітимо тільки декілька: це книга «Елементи комбінаторики» ([6], автори Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й.), яка видана в 1972 році у серії «Бібліотека фізико-математичної школи»; це навчальний посібник «Елементи дискретної математики» ([3], автори Волков Ю.І., Войналович Н.М., виданий у 2000 році); це навчалиий посібник «Дискретна математика» ([11], автор Ядренко М.Й., виданий у 2004 році).

Виклад основного матеріалу. Фундаментом комбінаторики є правила, або принципи комбінаторики. Випишемо їх і проілюструємо на конкретних прикладах методику розв'язування перелічувальних задач комбінаторики, використовуючи ці правила.

Правило суми. Якщо дію A можна виконати m способами, а дію B можна виконати n способами, то або дію A, або дію B можна виконати $m+n$ способами.

Корисним є більш формальний варіант формулювання цього правила: нехай скінченні множини X та Y не перетинаються. Тоді

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|.$$

(Символом $|M|$ позначається кількість елементів множини M).

Зрозуміло, що це правило автоматично поширюється більше, ніж на дві множини.

Правило добутку. Якщо дію A можна виконати m способами, а дію B можна виконати n способами, то дію A, а за нею B можна виконати $m\times n$ способами.

Корисним є більш формальний варіант формулювання цього правила: нехай X та Y довільні скінченні множини .Тоді

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

(Символом $X \times Y$ позначається декартів добуток множин X та Y).

Зрозуміло, що це правило автоматично поширюється більше, ніж на дві множини.

Наведемо ще декілька правил, на які в навчальній літературі не завжди ставиться відповідний наголос.

Правило різниці. Нехай *X* довільна скінченна множин, а *Y* яка-небудь її підмножина. Тоді

$$|X \setminus Y| = |X| - |Y|.$$

(Символом $X \setminus Y$ позначається різниця множин *X* та *Y*).

Це правило формулюють ще й так: нехай *X* довільна скінченна множина і нехай деякі елементи цієї множини мають якусь властивість, яку позначатимемо буквою *a.* Тоді

$$|X(\bar{a})| = |X| - |X(a)|,$$

де символом *X*(*a*) позначається множина тих елементів множини *X*, які мають властивість *a*, а символом $X(\bar{a})$ позначається множина тих елементів множини *X*, які не мають властивості *a*.

Правило частки. Нехай множина *X* є об'єднанням *n* різних підмножин кожна з яких має по *m* елементів. Тоді $n = \frac{|X|}{m}$.

Це правило формулюють на мові функцій ще й так: Нехай *X* і *Y* скінченні множини, а функція $f : X \to Y$ така, що прообразом кожного $y \in Y$ буде *m* різних елементів множини *X*. Тоді $|Y| = \frac{|X|}{m}$.

Принцип Діріхле. Якщо *k*+1 предмет розмістити в *k* ящиках, то знайдеться яшик, у якому буде знаходитись принаймні два предмети.

При розв'язуванні задач часто використовується узагальнення цього принципу: якщо *n* об'єктів розмістити в *k* ящиках, то знайдеться принаймні один яшик, у якому буде знаходитись принаймні [n/k]+1 об'єктів.

Примітка. В англомовній літературі цей принцип часто називають принципом голубиних гнізд (the Pigeonhole Principle).

В комбінаториці детально розглядається узагалнення правила різниці: **принцип включення і виключення**, який формулюється в різних формах.

Позначемо буквами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ властивості елементів якоїсь множин, а символами $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ позначатимемо відсутність відповідних властивостей. Нехай ще $N(a_1, a_2, \ldots)$ означає кількість елементів досліджуваної множини, які мають відповідні властивості, а *N* це кількість всіх елементів множени. Тоді

$$N(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) = N - N(a_1) - \cdots - N(a_n) + N(a_1, a_2) + \cdots + N(a_{n-1}, a_n) - N(a_1, a_2, a_3) - \cdots - N(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) + \cdots + (-1)^n N(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

На практиці використовується ще й такий варіант принципа включення і виключення:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_1| - |A_1 \cap A_2| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap A_n| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Для підрахунку кількості комбінаторних обєктів, які мають ті чи інші властивості, використовуються такі методи: *метод бієкції, метод рекурентностей, метод генератрис.*

Суть методу бієкції полягає в наступному: будуємо множину, відмінну від заданої, але яка має таку ж кількість елементів як і задана. Тоді, якщо вдається знайти взаємно однозначну відповідність між елементами цих множин і знайти кількість елементів допоміжної множини, то таку ж кількість елементів матиме й задана множина.

Суть методу рекурентностей полягає в наступному: нехай потрібно підрахувати кількість елементів множини, яка має просте комбінаторне визначення й деяку додаткову структуру. Ця кількість є деякою функцією від натуральних аргументів. Відшукується рекурентне співвідношення, якому задовольняє невідома функція. Для цього задану множину подають у вигляді об’єднання декількох множин, які не мають спільних елементів, а потім використовується правило суми. Паралельно з цим використовується й правило добутку.

Суть методу генератрис полягає в наступному: отримане рекурентне співвідношення дозволяє відшукати генератрису потрібної послідовності, розкладаємо генератрису в степеневий ряд, тоді коефіцієнти ряду дають необхідну послідовність.

Ціль даної статті продемонструвати на конкретних прикладах методику застосування розглядуваних теоретичних положень, які тут розглядаються.

Часто в різноманітних комбінаторних задачах зустрічаються біноміальні коефіцієнти $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, комбінаторний смисл яких полягає в тому, що це число k-елементних підмножин (комбінацій) n-елементної множини..

Приклад 1. Довести, що $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

Нехай $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ множина з якої вибираються підмножини по k елементів. Розіб’ємо множину всіх цих підмножини на два класи: до першого класу віднесемо всі підмножини, в які не входить елемент u_1, а до другого – всі підмножини з цим елементом. Підмножин першого класу буде $\binom{n-1}{k-1}$, а підмножини другого класу буде $\binom{n-1}{k}$. Через те, що класи не перетинаються, то за *правилом суми* отримаємо потрібне співвідношення, яке обгрунтовує схему (трикутник Паскаля) для знаходження біноміальних коефіцієнтів (щоб отримати число, яке стоїть в n-тому рядку і в k -тій колонці потрібно піднятись на один рядок вище і скласти числа, які стоять в k-тій колонці і в сусідній зліва).

Приклад 2. Скільки існує n–значних двійкових чисел у запису яких є рівно k одиничок? Розглянемо рядок з n кліток і виберемо серед них які-небудь k кліток. Тоді між такими вибірками і потрібними нам числами встановлюється взаємно-однозначна відповідніcь, отже, згідно *методу бієкції* шуканих чисел буде $\binom{n}{k}$.

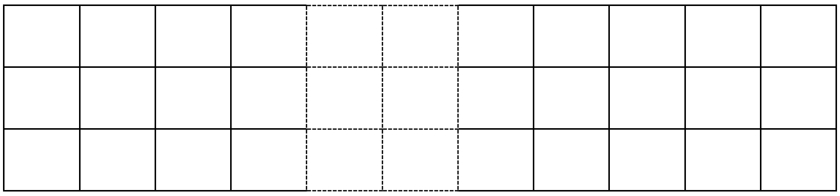
Приклад 3. Скільки існує n-значних двійкових чисел, у запису яких не зустрічаються два нулі поруч?

Розв’язання. Розіб’ємо множину всіх таких чисел на два класи: до першого класу віднесемо всі числа, які починаються з одиниці, а до другого – всі числа, які починаються з нуля. Якщо через y_n позначити кількість шуканих чисел, то в першому класі буде y_{n-1} чисел, а в другому – y_{n-2} чисел, а через те, що класи не перетинаються, то за *правилом суми* матимемо $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$, тобто, отримуються числа Фібоначчі.

При розв'язуванні перелічувальних задач часто отримуються рекурентні співвідношення, які бажано розв'язати. Якщо ці рекурентності лінійні, то добре відомі методи їх розв'язування (див., наприклад, [2], розділ III). Так, розв'язок рекурентністі, яка зустрічалася в прикладі 3, запису.ться у вигляді знаменитої формули Біне для чисел Фібоначчі

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Приклад 4. Візьмемо «шахову» дошку розміром 3×*n*:



Скількома способами можна замостити цю дошку брусками розміром 1×3, або 3×1. Нехай y_n шукане число. Тоді $y_0 := 1, y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 2$. Знайдемо рекурентне співвідношення, якому задовольняють числа y_n. Для цього множину всіх способів замощення розіб'ємо на дві підмножини: до першої з них віднесемо всі замощення, які починаються бруском розміром 3×1, а до другого класу віднесемо всі замощення, які починаються трьома брусками розміром 1×3. Замощень 1-го класу буде y_{n-1}, замощень 2-го класу буде y_{n-3}..Тому, згідно *правила суми,* $y_n = y_{n-1} + y_{n-3}$. Для розв'язування цієї рекурентності потрібно знайти корені характеристичного рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$. Це рівняння має один дійсний корінь $\lambda = \sqrt[3]{\frac{29}{54} - \frac{\sqrt{93}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{29}{54} + \frac{\sqrt{93}}{18}} + \frac{1}{3} \approx 1.46556\cdots$ і два комплексно спряжених кореня $\rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, де ρ і φ , відповідно, модуль і аргумент комплексного числа. Обчислення дають $\rho \approx 0{,}826029\cdots, \varphi \approx 1.85647\cdots$. Тоді загальний розв'язок рекурентності буде таким

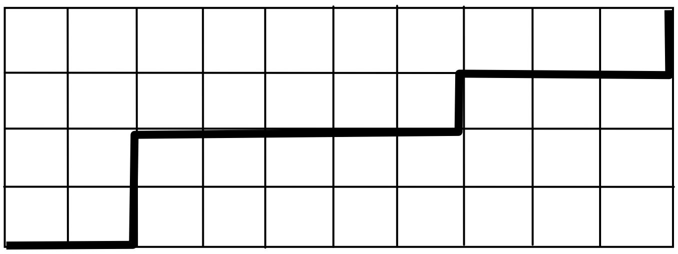
$$y_n = C_1\lambda^n + \rho^n(C_2\cos n\varphi + C_3\sin n\varphi),$$

де C_1, C_2, C_3 довільні сталі. Потрібні значення цих сталих для нашого випадку можна знайти, якщо скористатись початковими значеннями шуканої послідовності. Обчислення дають $C_1 \approx 0.611497,\ C_2 \approx 0.388502,\ C_3 \approx 0.245092$.

Через те, що $\rho \approx 0{,}826029\cdots < 1$, то y_n буде дорівнювати найближ-чому цілому числу до числа $C_1\lambda^n$.

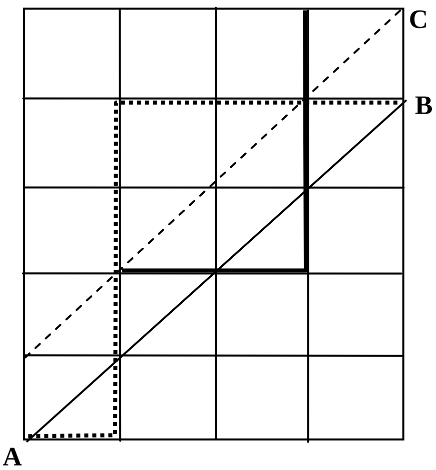
Приклад 5. Розглянемо план міста (з квадратними кварталами) розміром *m*×*n*. Скільки найкоротших шляхів можна провести від нижнього лівого кварталу до верхнього правого?

Кожний такий шлях складається з *m* горизонтальних відрізків і *n* вертикальних. Поставимо у відповідність кожному такому шляху *m*+*n*.значне двійкове число, у запису якого присутні m нулів і n одиничок. Таких чисел буде $C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}$. Згідно *методу бієкції* це і буде кількість найкоротших шляхів.

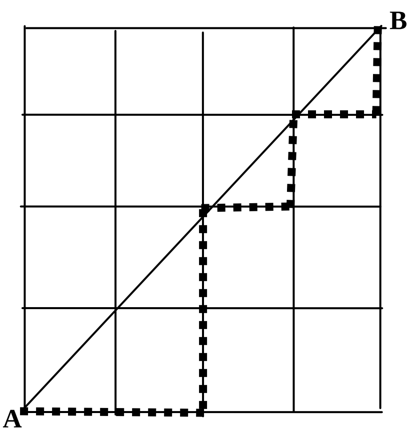


Розглянемо задачі, які пов'язані зі заменитими числами Каталана.

Приклад 6. Візьмемо квадрат розміром n×n і проведемо діагональ АВ. Скільки існує найкоротших шляхів від А до В, які проходять по границям кліток квадрату й які знаходяться під діагоналю АВ?



Розв'язання. Проведнмо допоміжну діагональ, яка паралельна АВ і проходить на віддалі одиниці від неї. Візьмемо який-небудь "зайвий" шлях, що проходить від А до В (на малюнку він помічений пунктирною лінією) і поставимо йому у відповідність шлях від А до С, який склада-ється з двох частин: до першого перетину з допоміжою діагоналлю, він відмічений пунктирною лінією, а далі він симетричний відносно неї (на малюнку відмічено суцільною лінією). І навпаки, кожному шляху, який проходить від А до С в прямокутнику АС розміром (n-1)×(n+1) подібним чином можна поставити у відповідність "зайвий" шлях у квадраті АВ. Отже, щоб отримати кількість найкоротших шляхів, які нас цікавлять, потрібно від всіх шляхів, які ведуть від А до В відняти кількість всіх шляхів, які ведуть від А до С: $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Числа C_n називаються числами Каталана.



Розв'яжемо цю задачу методом рекурентностей. Занумеруємо точки перетину діагоналі АВ з вершинами відповідних квадратів від 0 до n-1 і розіб'ємо всі шляхи на n класів. До i-го класу віднесемо всі шляхи, які проходять через i-ту вершину (i=0,1,2,…, n-1). Ці класи не перетинаються. Тому, виористовуючи *правило суми і добутку*, отримаємо рекурентне рівняння

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0.$$

Це рівняння можна розв'язати *методом генератрис*. Якщо через $C(z)$ позначити генератрису послідовності чисел C_n , то використовуючи властивості генератрис, матимемо квадратне рівняння для $C(z)$:

$C(z) = z(C(z))^2 + 1$. Звідси

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}z^n, \text{ отже, } C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Числа C_n отримали свою назву в честь бельгійського математика Ежена Шарля Каталана, який у 1838 році розв'язав таку задачу: скількома способами можна знайти таку суму чисел $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}$, використовуючи дужки і не змінюючи порядок доданків. Наприклад, суму $x_1 + x_2 + x_3$ можна знайти двома способами: $((x_1 + x_2) + x_3)$ або $(x_1 + (x_2 + x_3))$.

Розв'яжемо цю задачу *методом рекурентностей*. Якщо розглянути який-небудь спосіб розміщення круглих дужок для заходження відповідної суми, то побачимо, що коли з відповідного виразу вилучити зовнішні дужки, то з'явиться рівно один знак «+» поза дужками, який може стояти на 1-ому, на 2-му, ..., на n-ому місці. Розіб'ємо всі способи розташування дужок на n класів. До k-го класу віднесемо той спосіб, для якого вільний «+» стоїть на k-ому місці, тобто, між x_k і x_{k+1}. Отже, буде C_{k-1} спосіб розташування дужок у сумі $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ і C_{n-k-1} способів розташування дужок у сумі $x_{k+1} + x_2 + \cdots + x_n$. Тому, виористовуючи *правило суми і добутку*, отримаємо вже відоме нам рекурентне співвідношення:

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0.$$

Числа Каталана часто зустрічаються в комбінаториці. Існує безліч комбінаторних тлумачень цих чисел (див, наприклад [7], глава 20).

Багато інших цікавих прикладів можна знайти в книгах [5], [6], [8], [9], [10]. Для поглибленого вивчення цих питань рекомендуємо й інші книги, список яких наведено в бібліографії до статті.

Приклад 7. Скількома способами можна розсадити чотири особи за круглим столом за умови, щоб сусіди зліва й справа не залишалися.

Розв'язання. Позначимо буквами А, В, С, Д цих людей. Всіх перестановок букв буде 4!=24. Множину всіх цих перестановок розіб'ємо на декілька класів. До кожного класу віднесемо всі перестановки, які отримуються круговою перестановкою букв. Наприклад, до одного з таких класів будуть належати такі перестановки: АВСД, ВСДА, СДАВ, ДАВС, всього 4 перестановки. Отже, згідно *правила частки*, шуканих перестановок буде 24:4=6.

Приклад 8. Довести, що серед довільних n+1 натуральних чисел, кожне з яких не перевищує 2n, знайдуться принаймні два числа, з яких одне ділитиметься на інше.

Розв'язання. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ числа, які вибрані з множини $\{1,2\ldots,2n\}$. Запишемо їх так: $x_i = 2^{m_i} p_i, i = 1,2,\ldots,n+1$, де множники p_i непарні числа. Через те, що $x_i \le 2n$, то різних непарних p_i буде не більше, ніж n чисел. Тому, згідно *принципу Діріхле*, серед чисел p_i знайдеться принаймні два однакових. Нехай це будуть числа p_s *і* p_k. Тоді $x_s = 2^{m_s} p_s, x_k = 2^{m_k} p_k$ і, отже, більше з цих чисел буде ділитися на менше..

Приклад 9. Будемо підкидати три гральних кубики і знаходитимо суму кількості вічок, які побачимо на верхніх гранях кубиків. Можуть отриматись такі суми:3, 4, 5, …, 18. Яка сума ймовірніша 11 чи 12 ?.

Для цього будемо шукати кількість розв'язків таких систем відносно *u,v,w:*

$$\begin{cases} u+v+w=11 \\ 1\le u\le 6,\ 1\le v\le 6,\ 1\le w\le 6 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} u+v+w=12 \\ 1\le u\le 6,\ 1\le v\le 6,\ 1\le w\le 6 \end{cases}.$$

Кількість розв'язків цих систем буде такою ж, як і кількість розв'язків таких систем відносно x,y,z :

$$\begin{cases} x+y+z=8 \\ 0\le x\le 5,\ 0\le y\le 5,\ 0\le z\le 5 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x+y+z=9 \\ 0\le x\le 5,\ 0\le y\le 5,\ 0\le z\le 5 \end{cases}.$$

Якби не було обмежень справа для x,y,z, тоді б кількість розв'язків цих систем була б, відповідно, $\binom{10}{2}=45$, $\binom{11}{2}=55$. Введемо на множинах цих розв'язкв такі властивості: a: $x>5$, b: $y>5$, c:$z>5$. Далі скористаємося *принципом включення і виключення*. Для першої системи матимемо:

$$N(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=55-N(a)-N(b)-N(c)+N(ab)+N(ac)+N(cb)-N(abc).$$

$N(a)$ це кількість розв'язків такої системи:

$\begin{cases} x+y+z=8 \\ x\ge 6,\ y\ge 0,\ z\ge 0 \end{cases}$, звідси $N(a)=\binom{4}{2}=6$, Аналогічно, $N(b)=N(c)=6$.

$N(ab)$ це кількість розв'язків такої системи:

$\begin{cases} x+y+z=8 \\ x\ge 6,\ y\ge 6,\ z\ge 0 \end{cases}$, звідси $N(ab)=0$. Аналогічно, $N(ac)=N(bc)=0$.

$N(abc)$ це кількість розв'язків такої системи:

$\begin{cases} x+y+z=8 \\ x\ge 6,\ y\ge 6,\ z\ge 6 \end{cases}$, звідси $N(abc)=0$.

Отже, для першої системи матимемо $N(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$=45-6-6-6+0+0+0-0=27.

Аналогічно відшукується кількість розв'язків другої системи. Ми б отримали $N(a)=N(b)=N(c)=10$, $N(ab)=N(ac)=N(bc)=N(abc)=0$, тому $N(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$=55-30=25.

Таким чином, більш ймовірнішою сумою буде сума 11.

Примітка. Розглядувана задача має тисячолітню історію, з нею можна познайомитись у підручнику з теорії ймовірностей Гнєденка Б.В. ([5], стор. 386-392).

Висновки. Цими прикладами не вичерпуються різноманітні прийоми розв'язування подібних задач. Перспективним є розробка методики розв'язування перелічувальних задач комбінаторики поєднанням різних методів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Войналович Н.М. Як розв'язувати перелічувальні задачі комбінаторики Войналович Н.М. // Наукові записки. Серія: Математичні науки. −2009. −Вип. 68. − С.20-26. − (КДПУ ім. В.Винниченка).

2. Волков Ю.І. Елементи дискретної математики / Волков Ю.І., Войналович Н.М. − Кіровоград: РВЦ КДПУ,− 2000. − 200 с.

3. Гарднер М. Путешествие во времени / Гарднер М. − Москва: Мир, −1990, − 341 с.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Гнеденко Б.В. − Москва: Наука, −1988. −448 с.

5. Єжов І.І. Елементи комбінаторики / Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й.− Київ: Вища школа, − 1972.−84 с.

6. Graham R.I. Concrete Mathematic / Graham R.I., Knuth D.E., Patashnic O., −Addison-Wesley, − 1994. − 704 с.

7. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ / Риордан Д. − Москва: ИЛ− 1963. −288 с.

8. Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applicayions / Rosen, Kenneth H. −New York: McGraw-Hill, −2012. −1071 с.

9. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика / Стенли Р. − Москва: Мир, − 1990. −440 с.

10. Ядренко М.Й. Дискретна математика/ Ядренко М.Й. − Київ: ТВіМС, −2004. − 245 с.

Н.Н. Войналович, Ю.І. Волков

Кировоградский государственный педагогический університет имени Владимира Винниченко

О МЕТОДАХ ПОДСЧЕТА КОМБИНАТОРНЫХ ОБЕКТОВ

На конкретных примерах показано как применяются шесть базовых правил и три основных метода комбинаторики для решения различных перечислительных проблем.

Ключевые слова: *Биекция, рекуррентность, производящая функция, правила комбинаторики.*

Nataliya Vojnalovich, Yurii Volkov

The Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko state pedagogical university

ON THE METHODS OF A COUNT OF THE COMBINATORIAL OBJECTS

We present six basic principles and three foundation methods of the combinatorics. We show (on the concrete examples) how these can be use to solve different enumerative problems.

Keywords: *Bijection, recurrrence relations, generating function, the rule combinatorics.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Войналович Наталія Михайлівна – доцент кафедри математики, доцент, кандидат педагогічних наук.

Коло наукових інтересів: методика навчання математики, дискретна математика.

Волков Юрій Іванович – професор кафедри математики, професор, доктор фізико-математичних наук.

Коло наукових інтересів: математичний аналіз, теорія ймовірностей і математична статистика, дискретна математика.

УДК 373

І.В. Грушина

Криворізький державний педагогічний університет

ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ ДИСТАНЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В КОНТЕКСТІ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ

В статті розглядається термінологія дистанційного навчання, різні підходи до визначення дистанційного навчання; наголошується на ролі дистанційного навчання у інтеграції аудиторної та поза аудиторної роботи учнів. Цілі дослідження:визначити теоретичні та методологічні аспекти впровадження дистанційних технологій в контексті змішаного навчання. Завдання дослідження: аналіз існуючих підходів до організації дистанційного навчання та його впровадження до навчання студентів. Об'єктом дослідження є процес функціонування окремого дистанційного курсу на базі ВНЗ, зокрема кафедри математики та методики її навчання. Предметом дослідження є використання дистанційних технологій у процесі змішаного навчання. Результати дослідження. Планується узагальнити для формування рекомендацій щодо проектування дистанційного курсу дисципліни «Теорія ймовірності та математична статистика».

Ключові слова: *дистанційне навчання, управління навчанням, змішане навчання, технології дистанційного навчання, ІКТ.*

Постановка проблеми. Сучасний рівень розвитку комп'ютерної техніки та програмного забезпечення надає широкі можливості для удосконалення системи освіти та підвищення ефективності навчання. Використання комп'ютерних технологій сприяє забезпеченню якісно нового рівня освіти. Це дає змогу для розвитку нового напряму в освіті