

## АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ПРИРОДНИЧО-НАУКОВОЇ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

УДК 372.851

### ОЦІНЮВАННЯ РОЗУМІННЯ ЛОГІКИ ДОВЕДЕННЯ ТВЕРДЖЕНЬ В ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Ольга Авраменко, Юлія Білецька (м. Кіровоград)

*Стаття присвячена розробці тесту для контролю вмінь доводити задачі теорії границь послідовностей та аналізу його впровадження. В статті наведені окремі приклади, показана доцільність використання тестових завдань. Окреслено перспективи розробки дистанційного курсу навчання та застосування системи мережевого тестування.*

**Ключові слова:** тест, тестове завдання, тестова технологія, тестування, числова послідовність, границя числової послідовності, доведення за означенням.

**Постановка проблеми.** В сучасному світі йде пошук інноваційних методів навчання для більш ефективного функціонування системи освіти вузу та підготовки висококваліфікованих фахівців. Як зазначається в Національній доктрині розвитку освіти «якість освіти є національним пріоритетом і передумовою національної безпеки держави, додержання міжнародних норм і вимог законодавства України щодо реалізації права громадян на освіту; на забезпечення якості освіти спрямовуються матеріальні, фінансові, кадрові та наукові ресурси суспільства і держави» [16]. При цьому постає потреба в якісному моніторингу знань, умінь, навичок на всіх етапах навчально-виховного процесу. В Національній стратегії розвитку освіти в Україні на період до 2021 року наголошується, що однією з проблем, «які стримують розвиток, не дають можливості забезпечити нову якість освіти» є «недосконалість системи національного моніторингу та оцінювання якості освіти» [17].

Однією з форм, яка є надзвичайно популярна в зарубіжних країнах, а в останні роки і в Україні, є тестування. Незважаючи на ряд недоліків, тестові технології набувають особливої актуальності в умовах, коли за навчальними планами скорочується кількість аудиторних годин і все більш значна частина навчального матеріалу виноситься на самостійне опрацювання. Тестова перевірка відкидає суб'єктивізм, тому має потенційно вищу ступінь ефективності порівняно з класичними методами контролю, дозволяє неупереджено визначати результати засвоєння матеріалу [2; 6]. Перспектива дистанційного навчання, проведення контролю та обробки результатів за допомогою комп'ютерних засобів здатна економити час викладачів і кошти держави.

**Аналіз досліджень.** В процесі навчання виникає необхідність контролю за формуванням вміння доводити математичні твердження, який досить зручно і ефективно проводити із застосуванням тестів [7; 14]. Розвиток умінь доводити дуже важливий на всіх етапах навчального процесу, починаючи зі шкільних років і продовжуючи у вузі. Загальні підходи щодо доведення математичних тверджень розглядали в своїх роботах М. Бескін, В. Брадїс, Я. Грудьонов, Є. Ляпін, М. Метельський, Л. Фрідман та інші. Психологічні особливості вивчав В. Крутецький [9], формування умінь старшокласників доводити твердження та окремі підходи досліджувала Н. Кугай [10; 11], окремі питання доведення тверджень курсу початків аналізу розглядала З. Слєпкань [15]. Теоретична і практична база основних понять, яку необхідно засвоїти студентам, міститься в працях класиків математичного аналізу (Г. Берман, М. Давидов, Л. Кузнєцов, С. Нікольський, Г. Фіхтенгольц, та ін.). Наприклад, теоретичний матеріал та деякі задачі зручно викладено в підручнику з математичного аналізу М. Шкіля [19], широкий спектр завдань теорії границь наведено в збірнику задач і вправ Б. Демидовича [6].

Методичні рекомендації щодо конструювання тестів та обробки результатів тестування містяться в працях В. Аванесова, О. Авраменко, Л. Кухар, А. Майорова, В. Сергієнка та інших [1; 2; 3; 5; 12; 13; 18]. Різні методики оцінювання навчальних досягнень з математики розглянуто в монографії О. Школьного [20]. В цілому на моніторинг розвитку системи освіти наголошує Т. Боровка [4]. Формування методичних навичок у майбутніх вчителів математики із застосуванням тестування на прикладі теорії границь розглядала Л. Капкаєва. В своїй статті автор надала ряд методичних рекомендацій щодо типів тестових завдань теорії границь, не приділяючи уваги задачам на доведення [8].

Аналіз досліджень вказує на те, що формування умінь студентів доводити математичні твердження на засадах запровадження тестових технологій навчання не було предметом спеціальних досліджень, що актуалізує проблему їх розробки та впровадження у навчально-виховний процес вищого навчального закладу. Зокрема, за результатами онлайн-опитування, постійно використовують тести для контролю 32% викладачів вищих навчальних закладів (при цьому майже 80% з них працюють за авторськими тестами, які мають ряд недоліків), 68% майже не користуються або не користуються ними зовсім [7]. Тому більш

активне впровадження тестових технологій та розробка методичних матеріалів є цілком очевидною необхідністю.

Як відомо, математичні дисципліни, крім задач розрахункового типу, містять значну кількість задач на доведення. При підготовці до ЗНО з математики учні і вчителі загальноосвітніх навчальних закладів роблять акцент на вміння практично застосовувати математичні закони, при цьому недостатньо розглядаються задачі на доведення. Студенти, які починають вивчати модуль «Теорія границь послідовностей», стикаються з труднощами при доведенні тверджень, важко адаптуються до нових вимог. Розробка тестових завдань, які виконували б не тільки контролюючу функцію, а й сприяли розвитку логічного мислення, полегшували засвоєнню матеріалу даної теми, стала б в нагоді викладачам курсу математичного аналізу та студентам-першокурсникам.

**Метою** дослідження є створення та апробація системи тестових завдань для перевірки уміння доводити математичні твердження в теорії границь послідовностей. Для досягнення поставленої мети необхідним є аналіз літератури та методів доведення математичних тверджень теорії границь послідовностей, розробка бази тестових завдань згідно нормам та вимогам щодо конструювання тестів, проведення тестування та обробка його результатів.

**Виклад основного матеріалу.** Для оцінювання та формування умінь доводити твердження теорії границь послідовностей здійснюємо:

**1. Розробку системи тестових завдань:** Для перевірки засвоєння фундаментальних основ, які передують вивченню теми, ґрунтовних понять теорії границь та формування вмінь доводити розроблено тест, який містить 15 тестових завдань: 11 завдань закритої форми (5 – з вибором однієї правильної відповіді, 2 – з множинним вибором, 1 – модифіковане з вибором однієї правильної відповіді, 1 – на встановлення відповідності, 2 – на встановлення правильної послідовності кроків доведення), 4 завдання відкритої форми (2 – на доповнення, 2 – з розгорнутою відповіддю).

Таблиця 1

Структура тесту: Тест (15 завдань)

Завдання закритої форми (11)	Завдання відкритої форми (4)
з вибором однієї правильної відповіді (5)	на доповнення (2)
з множинним вибором (2)	з розгорнутою відповіддю (2)
модифіковане завдання з вибором однієї правильної відповіді (1)	
на встановлення відповідності (1)	
на встановлення послідовності кроків доведення (2)	

Завдання з вибором однієї правильної відповіді має 5 варіантів відповідей, серед яких одна є правильною, а решта – дистрактори.

За допомогою такого типу тестового завдання проводиться контроль засвоєння понять, які передують вивченню теорії границь послідовностей (модуль, деякі поняття теорії множин та ін.), та фундаментальних понять теми (окіл точки, числова послідовність, обмеженість, монотонність, супремум, інфімум, границя числової послідовності та ін.). Наприклад, щоб дати відповідь на завдання

Вкажіть лівий не виколотий  $1/3$ -окіл нуля

Вкажіть граничні точки множини  $1/2; 1/3; 2/3; 1/4; 3/4; 1/5; 4/5; \dots; 1/(n+1); n/(n+1); \dots$

Вкажіть перші чотири члени послідовності  $\left\{ \frac{1}{2+n^2} \right\}$

Для послідовності  $a_n = 1 - 1/n$  знайдіть  $\inf a_n$

студент повинен чітко знати і розуміти основні означення теми.

У завданнях з множинним вибором

Які з математичних тверджень правильні?

I. Послідовність  $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$  поперемінно співпадають з точками  $-1$  і  $1$ , тому мають границі, рівні цим точкам.

II. Послідовність  $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$  має границю рівну нулю. Тому і послідовність  $110, 32, -50, 1, 1/2, 1, 3, \dots$  (отримана з першої додаванням трьох нових членів) також мають границю рівну нулю.

III. Якщо  $a_n$  – нескінченно велика, то  $1/a_n$  – нескінченно мала.

студент аналізує кожне із тверджень і вказує, які з них є вірними. Тестований повинен не тільки володіти основними поняттями теорії границь послідовностей, а й знати основні властивості послідовностей та вміти доводити твердження.

Такого ж типу тестові завдання зручно використовувати для перевірки практичних вмінь і навичок.

Число  $k$  є членом послідовності  $\{a_n\}$ . Які з тверджень правильні?

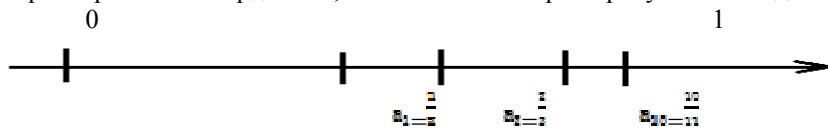
I.  $a_n = n^2 + 2n + 1, k = 36$

II.  $a_n = (-1)^n \frac{1+2n}{2n-1}, k = \frac{21}{19}$

III.  $a_n = \frac{n}{n+1}, k = \frac{5}{7}$

Тест містить завдання з графічними ілюстраціями. Наприклад,

Виберіть правильні твердження, якими можна охарактеризувати послідовність



- I. Послідовність обмежена.
- II. Границя послідовності дорівнює 1.
- III. Має одну граничну точку.

Модифіковане завдання з вибором однієї правильної відповіді вимагає на кожному етапі доведення твердження (1-4) вибрати один з варіантів (А-Е) так, щоб утворилося правильне доведення.

Доведіть, що послідовність з загальним членом  $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$  нескінченно мала.

Доведення

1. Зафіксуємо

A	B	C	D	E
$\forall \varepsilon$	$\forall \varepsilon \geq 0$	$\forall \varepsilon > 0$	$\forall \varepsilon < 0$	$\forall \varepsilon \leq 0$

2. Повинна виконуватись умова

A	B	C	D	E
$\frac{2n+1}{n^2} > \varepsilon$	$\left  \frac{2n+1}{n^2} \right  < \varepsilon$	$\left  \frac{2n+1}{n^2} \right  > \varepsilon$	$\left  \frac{2n+1}{n^2} \right  = \varepsilon$	$\left  \frac{2n+1}{n^2} \right  \leq \varepsilon$

3. Розв'язуємо нерівність відносно n

A	$\frac{2n+1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < \varepsilon; \frac{2}{n} < \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$
	$\frac{2n+1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < \varepsilon; \frac{2}{n} < \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n < \frac{2}{\varepsilon}$
B	$\frac{2n+1}{n^2} \geq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \varepsilon; \frac{2}{n} \geq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \varepsilon; \frac{2}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{2}{\varepsilon}$
C	$\frac{2n+1}{n^2} > \varepsilon \Leftrightarrow 2n+1 > \varepsilon n \Leftrightarrow n > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{\varepsilon}$
E	Немає правильного розв'язку

4. Таким чином,  $N(\varepsilon)$

A	B	C	D	E
$N(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{\varepsilon}$	$N(\varepsilon) \geq \frac{2}{\varepsilon}$	$N(\varepsilon) < \frac{2}{\varepsilon}$	Жодної правильної відповіді	$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$

Отже, послідовність з загальним членом  $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$  нескінченно мала.

Для успішного виконання завдання студент повинен чітко знати означення нескінченно малої, вміти правильно розв'язати нерівність та зробити висновки. Завдання не тільки контролює, а й навчає логічній структурі доведення такого класу задач.

У завданнях на встановлення відповідності подано твердження, об'єднані у два стовпчики. У першому стовпчику твердження позначені цифрами (1-4), а у другому – літерами (А-Е). Потрібно встановити відповідність між твердженнями, позначеними цифрами і твердженнями, позначеними літерами, та скласти логічні пари.

Знайдіть границі.

- 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3n^2}{1-2n-2n^2}$  A.  $+\infty$ ;
- 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$  B. 2;
- 3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8 - n^3 + n + 2}}{\sqrt[8]{n^8 + 7} + \sqrt{n} - 1}$  C. -1,5;
- 4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 2n + 3}$  D. 0;  
E. -8/9.

Такого виду тестові завдання можуть містити задачі як практичного, так і теоретичного характеру. Розглянемо ще один приклад тестового завдання закритої форми на встановлення послідовностей дії так, щоб утворилося правильне доведення.

Доведіть за означенням, що числова послідовність  $a_n = \left\{ \frac{2n}{n+3} \right\}$  монотонно зростаюча.

Запропоноване доведення розділено на сім кроків, які подані в неправильному порядку.

$$A. \frac{2n}{n+3} < \frac{2n+2}{n+4} \Leftrightarrow \frac{2(n+3)-6}{n+3} < \frac{2(n+4)-6}{n+4} \Leftrightarrow 2 - \frac{6}{n+3} < 2 - \frac{6}{n+4} \Leftrightarrow n+3 < n+4 \Leftrightarrow$$

$$B. \text{Розглянемо два послідовні члени числової послідовності } a_n = \frac{2n}{n+3} \text{ та } a_{n+1} = \frac{2n+2}{n+4}$$

C. Доведемо, що нерівність  $a_n < a_{n+1}$  виконується для  $\forall n \in N$ .

D. Отже, нерівність  $\frac{2n}{n+3} = \frac{2n+2}{n+4}$  виконується для  $\forall n \in N$ .

E. Отримана нерівність є правильною числовою нерівністю.

F.  $3 < 4$ .

G. Ми довели, що задана послідовність монотонно зростаюча.

Студенти повинні проаналізувати кожний етап і надати відповідь у вигляді ланцюжка B, C, A, F, E, D, G. Такого типу тестове завдання виконує не тільки контролюючу, а й навчальну функцію: формує чітку логіку доведення, сприяє розвитку вмінь розв'язувати задачі та навчає «математичної мови».

Те, наскільки сформовані вміння доводити, визначається завданнями відкритої форми, в яких не даються готові відповіді, а учаснику тестування пропонується вписати правильну відповідь у відведеному місці. Деякі завдання вимагають від тестованого самостійно відповісти на поставлене запитання та відповідно оформити відповідь (записати одним словом, цифрою, буквою, словосполученням або підготувати розгорнуту відповідь).

У завданнях з пропусками

Доведіть, що числова послідовність  $a_n = \left\{ \frac{n-1}{n+2} \right\}$  обмежена числом 1.

Доведення:

Розглянемо нерівність  $|a_n| \leq 1$   $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_

а це вірно для  $\forall n \in N$ . Отже, задана послідовність обмежена числом 1.

у відведених місцях вписують пропущені кроки доведення.

А у завданнях відкритої форми з розгорнутою відповіддю, наприклад

Доведіть за означенням, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{2n-1} = \frac{1}{2}$ , вкажіть  $N(\varepsilon)$ ,

студент має самостійно довести твердження і математично грамотною мовою його подати.

Таким чином, можна відстежити виконання запропонованою системою тестів таких функцій:

- діагностична (здійснюється контроль рівня засвоєння матеріалу на кожному етапі навчально-виховного процесу);

- навчальна (тестові завдання сконструювано таким чином, що деякі завдання закритої форми можна використовувати у якості підказки до деяких завдань відкритої форми);

- виховна (регулярність проведення контролю стимулює діяльність студентів, допомагає виявити і усунути прогалини у знаннях);

- пропедевтична (так як тести розраховано в основному на студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів, то важливим є формування вміння використовувати тести в навчальному процесі та самостійно їх розробляти в майбутній професійній діяльності).

**2. Реалізацію тестування та аналіз його результатів:** Тест був запропонований студентам першого курсу фізико-математичного факультету КДПУ ім. В. Винниченка у якості складової частини колоквиуму з перевірки знань теоретичної частини теми «Границя послідовності». Як результат, було виявлено, що найбільша частина правильних відповідей припадає на розрахункові завдання, але не всі студенти достатньо володіють понятійним апаратом та мають значні труднощі при розв'язанні задач на доведення. Тому доцільно звернути увагу викладачів на формування вмінь саме доводити. Деякі завдання, як показало експертне оцінювання, були визнані такими, результати яких недоречно враховувати в остаточну оцінку за колоквиум. Виявлено, що окремі завдання тесту потребують вдосконалення або заміни на завдання іншої складності.

Зауважимо, що при розв'язанні завдань відкритої форми студент, взагалі кажучи, може використовувати у якості підказки результати деяких завдань закритої форми. Саме тому викладачу рекомендується провести другу частину колоквиуму у традиційній формі: «математичного диктанту», усного опитування тощо. Якщо результати традиційної форми контролю підвищаться, то можна вважати, що навчаюча функція тесту виконала свою роль.

Завдання даного тесту можна також застосовувати для оцінювання залишкових знань з виключно контролюючою функцією, формуючи новий тест з меншої кількості завдань так, що зміст одних з них не був би підказкою для розв'язання інших.

Вироблено рекомендації щодо формування тесту на уміння доведення математичних тверджень: 1) база тестових завдань потребує тематичного розширення та збільшення кількості типових завдань; 2) необхідно розробити рекомендації щодо формування на основі бази тестових завдань навчально-контролюючих тестів та тестів залишкових знань; 3) доцільно розробити аналогічний online-тест для розширення кола учасників тестування; 4) створення умов дистанційного навчання студентів доводити твердження шляхом самостійного розв'язання тестів та для автоматизації процесу тестування.

**Висновки.** Показано, що формування та контроль вміння доводити математичні твердження є одним з основних пріоритетів при навчанні майбутніх педагогів-математиків. Розроблено та апробовано 25 варіантів тесту для оцінювання навичок та розуміння процесу доведення. Виявлено, що студенти першого курсу мають недостатні навички доведення, вироблення таких навичок є одним із завдань навчання математичного аналізу. Первинний аналіз результатів дав можливість ввести корективи в систему тестових завдань. Перспективу вбачаємо в розробці дистанційного курсу навчання та застосування системи мережевого тестування.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Аванесов В.С. Композиция тестовых заданий / В.С. Аванесов. – М.: Центр тестирования, 2002. – 240 с.
2. Аванесов В.С. Теория и методика педагогических измерений (материалы публикаций) / В.С. Аванесов. – М.: ЦТ и МКО УГТУ-УПИ, 2005. – 98 с.
3. Авраменко О.В. Статистичні методи в освітніх вимірюваннях: [навч.-метод. посібн.]. / О.В. Авраменко, Г.Ю. Павличенко, С.Д. Парашук. – Кіровоград: Вид. Лисенко В.Ф., 2012. – Ч. 1. Класична теорія тестування. – 118 с.
4. Боровкова Т.И. Мониторинг развития системы образования: [учебн. пос.]. / Т.И. Боровкова, И.А. Морев. – Владивосток: Изд-во ДВУ, 2004. – Ч. 1. Теоретические аспекты. – 150 с.
5. Вимірювання в освіті: [підручник]. / За редакцією О.В. Авраменко. – Кіровоград: Вид. Лисенко В.Ф., 2011. – 360 с.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – [13-е изд., испр.] – М.: Изд-во Моск. ун-та ЧеРо, 1997. – 624 с.
7. Ингенкамп К. Педагогическая диагностика: [пер. с нем.] / К. Ингенкамп. – М.: Педагогика, 1991. – 240 с.
8. Капкаева Л.С. Формирование методических умений у будущих учителей математики в процессе изучения математических дисциплин. / Л.С. Капкаева. // Проблемы современного образования. – 2013. – № 4. – Режим доступа: <http://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-metodicheskikh-umeniy-u-buduschih-uchiteley-matematiki-v-protsesse-izucheniya-matematicheskikh-distiplin>
9. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий; Под ред. Н.И. Чуприковой. – М.: Ин-т практ. психологии, 1998. – 411 с.
10. Кугай Н.В. Развитие умінь старшокласників доводити твердження у процесі вивчення алгебри і початків аналізу : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд.: спец. 13.00.02 / Кугай Н.В. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2007. – 20 с.
11. Кугай Н.В. Про задачі на доведення і дослідження / Н.В. Кугай // Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: [тези доп.]. – К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2004. – С. 92-93.
12. Кухар Л.О. Конструювання тестів / Л.О. Кухар, В.П. Сергієнко. – Луцьк, 2010. – 182 с.
13. Майоров А.Н. Теория и практика создания тестов для системы образования / А.Н. Майоров. – М.: Интеллектуал-центр, 2001. – 296 с.
14. Милютіна І.М. Тестування як ефективний метод перевірки професійної компетентності студентів. / І.М. Милютіна. – Режим доступу: [http://osvita.ua/school/lessons\\_summary/edu\\_technology/15024/](http://osvita.ua/school/lessons_summary/edu_technology/15024/)
15. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: [підручник для студ. матем. спец. вищ. пед. навч. закл.] / З.І. Слєпкань. – [2-ге вид., доп. і перероб.] – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.
16. Про національну доктрину розвитку освіти. – Режим доступу: <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/347/2002>.
17. Про національну стратегію розвитку освіти в Україні на період до 2021 року. – Режим доступу: <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/344/2013>.
18. Сергієнко В.П. Методичні рекомендації зі складання тестових завдань. / В.П. Сергієнко, Л.О. Кухар. – К.: Вид-во НПУ, 2011. – 41 с.
19. Шкіль М.І. Математичний аналіз / М.І. Шкіль. – [3-є вид. перероб. і доп.] – К.: Вища школа, 2005. – 447 с.
20. Шкільний О.В. Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи в Україні: [монографія]. / О.В. Шкільний. – К.: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2015. – 424 с.

#### ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Авраменко Ольга Валентинівна** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, статистики та економіки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

*Коло наукових інтересів:* розробка та вдосконалення статистичних методів аналізу змісту завдань та способи оцінювання та обробки результатів тестування

**Білецька Юлія Григорівна** – аспірантка кафедри прикладної математики, статистики та економіки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

*Коло наукових інтересів:* створення та апробація системи тестових завдань.