студентів у якості сучасного дидактичного принципу, який відображає головні положення однієї з важливих сторін навчального процесу.

2. Проаналізовано роль і місце принципу свідомості, активності та самостійності (самостійності, активності й свідомості) чи принципу самостійності (принципу поєднання аудиторної та самостійної навчальної діяльності) серед інших принципів навчання.

3. Виділено основні проблеми, які необхідно вирішити для повноцінного упровадження принципу самостійності й системи самостійної навчальної діяльності (роботи) студентів у освітню практику.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Мойсеюк Н.Є. Педагогіка : навч. посібник / Н.Є. Мойсеюк. – 3-є вид., доповн. – К., 2001. – 608с.
2. Лекції з педагогіки вищої школи: навч. посібник / за ред. В.І. Лозової. – Харків: «ОСВ», 2006.– 496 с.
3. Бушок Г.Ф. Методика преподавания общей физики в высшей школе / Г.Ф. Бушок, Е.Ф. Венгер. – К., 2000. – 404 с.
4. Буряк В.К. Принципи дидактики та вдосконалення підготовки вчителя / В.К. Буряк // Рідна школа. – 2004. – №10. – С.3–7.
5. Малихін О.В. Організація самостійної навчальної діяльності студентів вищих педагогічних навчальних закладів: теоретико-методологічний аспект : монографія / О.В. Малихін. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2009. – 307 с.
6. Бугайов А. И. Методика преподавания физики в средней школе: Теорет. основы: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ-мат. спец. / А. И. Бугайов. – М. : Просвещение, 1981. – 288 с.
7. Усова А. В. Самостоятельная работа учащихся по физике в средней школе / А. В. Усова, З. А. Вологодская. – М. : Просвещение, 1981. – 158 с.
8. Буряк В.К. Самостоятельная работа учащихся на уроках физики: учебное пособие по спецкурсу для пединститутов / В.К. Буряк. – М.: Прометей, 1991. – 131с.
9. Коновал О.А. Компютерні засоби підтримки самостійної навчально-пізнавальної діяльності майбутніх учителів фізики / О.А. Коновал, Т.І. Туркот // Теорія і практика організації самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів : Монографія. Кол. авторів / ред. проф. О.А. Коновала. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2012. – С. 242–261.
10. Бурак В.І. Самостійність навчання як один із сучасних дидактичних принципів / В.І. Бурак // Теорія і практика організації самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів : Монографія. Кол. авторів / ред. проф. О.А. Коновала. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2012. – С. **Ошибка! Закладка не определена.**7–134.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Бурак Володимир Іванович – доцент кафедри фізики та методики її навчання Криворізького педагогічного інституту ДВНЗ «Криворізький національний університет».

Коло наукових інтересів – теорія та методика навчання фізики у середній та вищій школі.

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР В ЕКОНОМІЦІ

Людмила ГЛАДКОВА, Марина НАУМОВА

В статті розглянуто один з розділів прикладної математики - теорія ігор, яка має дуже важливе значення для штучного інтелекту, кібернетики та економіки. Проведено аналіз основних досліджень та публікацій, розглянуто історію розвитку теорії ігор. Визначено певні проблеми, з якими можна зіткнутися при практичному використанні цієї математичної теорії. Виокремлено задачі з економічним контекстом, в яких в теперішній час застосовується теорія ігор: математичні моделі торгів та аукціонів; виробнича поведінка фірм як на рівні продукту, так і на рівні його виробництва; моделі конкуренції країн та торгівельна політика держав; сучасні теорії міжнародної торгівлі, оподаткування, теорії виробничих організацій тощо. Розкрито основні поняття теорії гри: хід гравця, особистий хід, випадковий хід, платежі, стратегія гравця, оптимальна, чиста та змішана стратегії. Наведено основні типи ігор: кооперативні та некооперативні, симетричні і несиметричні, з нульовою сумою і з ненульовою сумою, паралельні і послідовні, з повною або неповною інформацією, ігри з нескінченним числом кроків, дискретні і неперервні гри, метаігри. Розглянута парна скінчена гра у загальному вигляді. Розкрито принцип мінімакса, поняття сідлової точки. Наведено приклад економічної задачі для підприємства з трьома стратегіями, яка розв'язана за допомогою моделі матричної гри. Наведена оптимальна стратегія виробника продукції та ціна гри.

The article discusses one of the areas of applied mathematics, game theory, which is very important for artificial intelligence, cybernetics, and the economy. Analysis of basic research and publications, reviews the history of the theory of games. Identified some of the problems that may be encountered in the practical use of this mathematical theory. Highlighted the problem of the economic context in which the currently applied game theory: mathematical models of trading and auctions, production behavior of firms at both the product and the level of its production models of competition and trade policies of the modern theory of international trade, taxation , the theory of industrial organization. Disclosed the basic concepts of game theory: the course player, personal, random move, payments, player strategies, optimal, pure and mixed strategies. The main types of *games: cooperative and non-cooperative, symmetric and asymmetric, zero-sum and non-zero sum, parallel and serial, with complete or incomplete information, games with an infinite number of steps, discrete and continuous games, metagame. Considered the ultimate steam game in general. Discloses the minimax principle, the concept of a saddle point. Is an example of the economic problem for the company with the three strategies has been solved by the model matrix game. Represented the optimal strategy manufacturer of products and the price game.*

Постановка проблеми. Одним з розділів прикладної математики, точніше, дослідження операцій, є теорія ігор. Найчастіше методи теорії ігор знаходять застосування в економіці, трохи рідше в інших суспільних науках — соціології, політології, психології, етики та інших. «Теорія ігор — це теорія математичних моделей для прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту» [1]. Дуже важливе значення вона має для штучного інтелекту та кібернетики, особливо з проявом інтересу до інтелектуальних агентів.

Під грою розуміють процес, в якому беруть участь дві і більше сторін, які ведуть боротьбу за реалізацію своїх інтересів. Кожна зі сторін має свою мету і використовує деяку стратегію, яка може вести до виграшу чи програшу, залежно від поведінки інших гравців. Теорія ігор допомагає вибрати кращі стратегії з урахуванням уявлень про інших учасників, їх ресурсів і їх можливих вчинків.

Переважна більшість цілей досягається за допомогою певних стратегій. Навіть перед тим, як кудись йти, ви подумки моделюєте ваш маршрут. Зовсім інша справа — економічні цілі та завдання. Побудова оптимальної стратегії в економічних задачах дуже складна. Тому використання теорії ігор є своєчасним і актуальним. В Україні, на жаль, застосування даної теорії занадто обмежене в силу психологічних або інших чинників.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Теорія ігор має не дуже довгу історію. Ще у вісімнадцятому столітті пропонувалися стратегії або оптимальні рішення в математичному моделюванні. А. Курно та Ж. Бертран розглядали задачі виробництва в умовах олігополії, які пізніше стали прикладами теорії ігор.

Вирішальний поворот у розвитку цієї теорії стався у 1928 році завдяки Дж. фон Нейману. Саме тоді він представив математичне обґрунтування загальної стратегії для гри двох учасників в термінах мінімізації та максимізації. Одним з родоначальників теорії ігор був і французький математик Е. Борель. Але першим систематизованим викладом ідей і методів у цій галузі була робота фон Неймана і О. Моргенштерна «Теорія ігор і економічна поведінка» [2], яка розповсюдила теорію ігор на довільне число учасників і застосувала цю теорію до економічної поведінки. Запропонована в ній стратегія — «мінімакс», або мінімізація максимальних втрат, — визначається як раціональний курс в умовах невизначеності.

Теорія ігор спочатку розглядала економічні моделі, але аж до 1950-х вона залишалася формальною теорією в рамках математики. На початку 1950-х Джон Неш розробив методи аналізу, в яких всі учасники або виграють, або терплять поразку. Ці ситуації одержали назви «рівновага за Нешем». Вже з 1950-х рр. починаються спроби застосувати методи теорії ігор не тільки в економіці, але в біології, кібернетиці, техніці, антропології. У 1960 - 1970 рр. інтерес до цієї теорії згасає, незважаючи на значні математичні результати, отримані на той час. З середини 1980-х рр. починається активне практичне використання теорії ігор, особливо в економіці та менеджменті. За останні 20 - 30 років значення теорії ігор та інтерес значно зростає, деякі напрями сучасної економічної теорії неможливо викласти без застосування неї. У 1994 році Дж. Харшані і Р. Зельтен отримали Нобелівську премію з економіки за роботи в області теорії ігор (наприклад, переговори з односторонніми трансакційними витратами, рівновага ринку з продавцем і декількома потенційними покупцями). Робота «Стратегія конфлікту» нобелівського лауреата з економіки 2005 р. Томаса Шеллінга стала великим внеском у застосування теорії ігор.

Однак, існують певні проблеми, з якими можна зіткнутися при практичному використанні математичної теорії ігор. Її математичний апарат є затратним. Його застосовують для виправданих завдань: політика, економіка монополій та розподілу ринкової влади тощо.

Мета дослідження — розглянути історію розвитку теорії ігор, її сутність, вказати класифікацію ігор і форми її подання, показати можливість застосування цієї теорії в економіці.

Основна частина статті. Теорія ігор застосовується в економіці не тільки до моделювання задач організації промисловості, які стали вже класичними, але й взагалі практично до кожної задачі, що має економічний контекст. Так, сьогодні це:

- математичні моделі торгів та аукціонів (мікрорівень);

- виробнича поведінка фірм як на рівні продукту, так і на рівні його виробництва, включаючи також і поведінку внутрішніх для фірми суб'єктів (на проміжному рівні економіки);
- моделі конкуренції країн та торгівельна політика держав, монетарна політика (макрорівень) [3].

Звичайно, цим застосування теорії ігор не вичерпується. Апарат теорії рівноваги та теорії ігор став основою для створення сучасних теорій міжнародної торгівлі, оподаткування, суспільного блага, монетарної економіки, теорії виробничих організацій [4].

Гра — це математична модель конфліктної ситуації. Сторони, які приймають участь у конфлікті, називають гравцями, результат конфлікту називають виграшем.

Ходом гравця називають вибір і здійснення однієї із дій, що передбачені правилами. Ходи можуть бути особистими і випадковими. Особистий хід — це свідомий вибір гравцем однієї з можливих дій. Випадковий хід — це випадково обрана дія. Дії можуть бути пов'язані з цінами, обсягами продажів, витратами на наукові дослідження і розробки тощо. Періоди, протягом яких гравці роблять свої ходи, називаються етапами гри. Вибрані на кожному етапі ходи наприкінці визначають «платежі» (виграш або збиток) кожного гравця. Вони визначаються в матеріальних цінностях або грошах. Ще одним поняттям даної теорії є стратегія гравця. Стратегія гравця — це сукупність правил, що визначають вибір його дії при кожному особистому ході в залежності від ситуації, що склалася.

Для того щоб знайти розв'язок гри, слід для кожного гравця вибрати стратегію, яка задовольняє умові оптимальності. Тобто один з гравців повинен отримати максимальний виграш, коли другий дотримується своєї стратегії. У той же час другий гравець повинен мати мінімальний програш, якщо перший дотримується своєї стратегії. Такі стратегії називаються оптимальними. Оптимальні стратегії повинні також задовольняти умові стійкості, тобто будь-якому з гравців повинно бути невигідно відмовитися від своєї стратегії в цій грі. Метою теорії ігор є визначення оптимальної стратегії для кожного гравця [5].

Наведемо основні типи ігор.

- *Кооперативні та некооперативні.* Гру називають кооперативною, якщо гравці можуть об'єднуватися в групи, беручи на себе певні зобов'язання перед іншими гравцями. Некооперативних гра — коли кожен гравець грає за себе.
- *Симетричні і несиметричні.* Гра буде симетричною тоді, коли відповідні стратегії у гравців будуть рівні, тобто вони матимуть однакові платежі.
- *З нульовою сумою і з ненульовою сумою.* В грі з нульовою сумою гравці не можуть збільшити або зменшити наявні ресурси або фонд гри. У цьому випадку сума всіх виграшів дорівнює сумі всіх програшів при будь-якому ході. В іграх з ненульовою сумою [6] виграш якогось гравця не обов'язково означає програш іншого, і навпаки. Результат такої гри може бути менше або більше нуля.
- *Паралельні і послідовні.* У паралельних іграх гравці ходять одночасно, або вони не обізнані про вибір інших доки всі не зроблять свій хід. У послідовних, або динамічних, іграх учасники можуть робити ходи у випадковому порядку, але при цьому вони отримують деяку інформацію про попередні дії інших гравців.
- *З повною або неповною інформацією.* У грі з повною інформацією учасники знають всі ходи, зроблені до поточного моменту, так само як і можливі стратегії супротивників, що дозволяє їм в деякій мірі передбачити подальший розвиток гри. Повна інформація не доступна в паралельних іграх, оскільки в них невідомі поточні ходи супротивників.

В аналізі міжнародних відносин ігри з неповною інформацією використовуються стосовно до:

1) політиці стримування і кризового реагування;
2) угодами з контролю над озброєннями;
3) дворівневому (внутрішній і міжнародний) процесу прийняття рішень;
4) формування міжнародних альянсів;
5) міжнародного лідерства.

- *Ігри з нескінченним числом кроків.* Задача, яка зазвичай ставиться в цьому випадку, полягає не в пошуку оптимального розв'язку, а в пошуку хоча б виграшної стратегії. Використовуючи аксіому вибору, можна довести, що іноді навіть для ігор з повною інформацією і двома наслідками — «виграв» чи «програв» — жоден з гравців не має такої стратегії. Ігри в реальному світі або ті, що вивчаються в економіці, як правило, тривають скінчене число ходів.

- *Дискретні і безперервні гри.* Більшість досліджуваних ігор дискретні: в них скінчене число гравців, ходів, подій, результатів тощо. Однак ці складові можуть бути розширені на множину дійсних чисел. Ігри, що включають такі елементи, часто називаються диференціальними. Вони пов'язані з деякою дійсною шкалою (зазвичай - шкалою часу), хоча події , що в них відбуваються можуть бути дискретними за природою. Диференціальні ігри також розглядаються в теорії оптимізації, знаходять своє застосування в техніці та технологіях, фізиці.
- *Метаігри.* Це такі ігри, результатом яких є набір правил для іншої гри.

В теорії ігор поряд із їх класифікацією величезну роль грає форма подання гри. Зазвичай виділяють нормальну, або матричну форму і розгорнуту, задану у вигляді дерева.

Розглянемо, наприклад, парну скінчену гру. Нехай гравці X та Y мають особисті стратегії, причому гравець X має m чистих стратегій $X_1, X_2, ..., X_m$, а гравець Y – n стратегій $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Результат гри однозначно визначається вибором гравцями будь-якої пари стратегій $\left(X_i, Y_j\right)$ $(i = 1,...,m, j = 1,...,n)$.

Платіжною матрицею називають матрицю $Z = \{z_{ij}\}, (i = 1,...,m,\ j = 1,...,n)$, елементами якої є виграші, що відповідають стратегіям $\left(X_i, Y_j\right)$. В загальному вигляді матрицю Z можна представити наступним чином:

X_i \ Y_j	Y_1	Y_2	...	Y_n
X_1	z_{11}	z_{12}	...	z_{1n}
X_2	z_{21}	z_{22}	...	z_{2n}
...	...	...	...	...
X_m	z_{m1}	z_{m2}	...	z_{mn}

Визначимо найкращу серед стратегій $X_1, X_2, ..., X_m$. Позначимо найменший виграш гравця X при обранні їм стратегії X_i для всіх можливих стратегій гравця Y:

$$\min_{j=1,...,n} z_{ij} = \alpha_i \cdot$$

Серед чисел α_i $(i = 1,...,m)$ оберемо найбільше:

$$\alpha = \max_{i=1,...,m} \alpha_i = \max_{i=1,...,m} \min_{j=1,...,n} z_{ij},$$

де α - гарантований виграш гравця X при будь-якій стратегії гравця Y. Число α називають нижньою ціною гри, а стратегію X_i — максимінною.

Позначимо

$$\max_{i=1,...,m} z_{ij} = \beta_j \cdot$$

Серед чисел β_j $(j = 1,...,n)$ оберемо найменше:

$$\beta = \min_{j=1,...,n} \beta_j = \min_{j=1,...,n} \max_{i=1,...,m} z_{ij} \cdot$$

Тут β — гарантований програш гравця Y при будь-якій стратегії гравця X. Число β називають верхньою ціною гри, а стратегію Y_j — мінімаксною.

Принцип, за яким гравці обирають мінімаксну та максимінну стратегії, називають принципом мінімакса.

Якщо верхня та нижня ціни гри співпадають, то число $\mu = \alpha = \beta$ називають ціною гри, а стратегії, які їй відповідають — оптимальними.

Пара стратегій $\left(X_i, Y_j\right)$ визначає оптимальний розв'язок гри, коли відповідний виграш z_{ij} одночасно є найбільшим у j-му стовпці та найменшим в i-му рядку. Якщо така ситуація існує, то її називають сідловою точкою. У випадку, коли гра не має сідлової точки, оптимальний розв'язок можна отримати випадковим чергуванням чистих стратегій.

Змішаною стратегією S_X гравця X називають застосування чистих стратегій $X_1, X_2, ..., X_m$ з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_m$ ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$). Змішані стратегії записуємо у вигляді

$$S_X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots X_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

або

$$S_X = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначається стратегія S_Y:

$$S_Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}.$$

Нехай гра задана платіжною матрицею

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}.$$

Якщо гравець X використовує оптимальну змішану стратегію

$$S_X^* = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix},$$

а гравець Y — чисту стратегію Y_1, то оптимальна стратегія знаходиться за формулами

$$p_1^* = \frac{z_{22} - z_{21}}{z_{11} + z_{22} - z_{12} - z_{21}},$$

$$p_2^* = \frac{z_{11} - z_{12}}{z_{11} + z_{22} - z_{12} - z_{21}},$$

а ціна гри

$$\mu = \frac{z_{22} z_{11} - z_{12} z_{21}}{z_{11} + z_{22} - z_{12} - z_{21}}.$$

Розглянемо приклад економічної задачі, яку можна розв'язати за допомогою моделі матричної гри.

Підприємство виробляє молочну продукцію, яку може одразу відправити споживачеві (стратегія X_1), відправити на склад для зберігання (стратегія X_2), або додатково обробити для тривалого збереження (стратегія X_3).

Споживач може придбати продукцію: одразу (стратегія Y_1), в період нетривалого часу (стратегія Y_2), після тривалого періоду часу (стратегія Y_3).

У випадку стратегій X_2 та X_3 підприємство має додаткові витрати на зберігання та обробку продукції. У випадку X_2 можливі збитки завдяки псуванню продукції, якщо споживач обере стратегії Y_2 або Y_3.

Визначимо оптимальні пропорції продукції для використання стратегій X_1, X_2 та X_3, якщо матриця витрат має вигляд

$$Z = \begin{pmatrix} 2 & 12{,}5 & 20 \\ 17{,}5 & 15 & 25 \\ 30 & 25 & 20 \end{pmatrix}.$$

Оскільки елементи першої рядка менші ніж відповідні елементи другого рядка, то перший рядок цієї матриці можна відкинути. Тоді матриця буде мати вигляд

$$Z = \begin{pmatrix} 17{,}5 & 15 & 25 \\ 30 & 25 & 20 \end{pmatrix}.$$

Елементи першого стовпця більші ніж відповідні елементи другого стовпця, тому його теж можна відкинути. Таким чином отримали матрицю витрат

$$Z = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 25 & 20 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо оптимальну стратегію:

$$p_2^* = \frac{20-25}{15+20-25-25} = \frac{1}{3},$$

$$p_3^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\mu = \frac{15 \cdot 1}{3} + \frac{25 \cdot 2}{3} = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}.$$

Таким чином, оптимальна стратегія виробника продукції $S_X^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, тобто стратегія X_1 не використовується, $\frac{1}{3}$ продукції відправляється на склад (стратегія X_2), $\frac{2}{3}$ продукції додатково обробляється (стратегія X_3), при цьому ціна гри $\mu = 21\frac{2}{3}$.

Висновки. Значна кількість наук отримала свій розвиток багато в чому завдяки математичним методам, зокрема — економіка. Теорія ігор за свою історію зазнала певних змін і модифікацій, але вона до цих пір розвивається і є актуальною як в економіці, так і в інших науках. Її застосування може дати корисний ефект для економіки України.

Перспективи подальших пошуків. Надалі передбачається дослідити деякі економічні моделі із застосуванням математичної теорії ігор та розробити методи застосування цих моделей при викладанні курсів «Математика для економістів», «Економіко-математичне моделювання».

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Васильев В.А. Модели экономического обмена и кооперативные игры / В.А. Васильев. - Новосибирск: Изд-во НГУ, 1984. – 96 с.

2. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Фон Нейман.- М.: Наука, 1970. – 708 с.

3. Шиян А.А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті /А.А. Шиян // Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 164 с.

4. Полтерович В.М. Кризис экономической теории / В.М. Полтерович // Труды семинара «Неизвестная экономика».Отделение экономики РАН. – М.: ЦЭМИ [Электронные издания]. http://www.cemi.rssi.ru/rus/publicat/e-pubs /d9702t /d9702t.htm.

5. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.Н., Фридман М.Н.; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера // -- М.: ЮНИТИ, 2003. -- 407 с.

6. Льюс Р., Райфа Х. Игры и решения (пер. с англ.)/ Р. Льюс. -- М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. -- 642 с.

ВІДОМОСТІ ПРО АТОРІВ

Гладкова Людмила Анатоліївна – к. ф.-м. н., доцент кафедри математики і математичних методів в економіці, доцент, Донецький Національний Університет.

Наумова Марина Анатоліївна – к. ф.-м. н., доцент кафедри математики і математичних методів в економіці, доцент, Донецький Національний Університет.

Коло наукових інтересів: застосування ігрових технологій.