4. Семиноженко В. Економіка знань: потрібна гра на своєму полі [Електронний ресурс] / В. Семиноженко // День. – 2004. – 27 квітня. – Режим доступу : http://www. day. kiev. ua/.

5. Спірін О. М. Теоретичні та методичні засади професійної підготовки майбутніх учителів інформатики за кредитно-модульною системою **:** **м**онографія / О. М. Спірін ; за наук. ред. акад. М. І. Жалдака. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2007. – 300 с.

6. Туркот Т. І. Педагогіка вищої школи : навч. посібн. для студ. вищих навч. закладів / Т. І. Туркот. – К. : Кондор, 2011. – 628 с.

7. Хуторской А. В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования / А. В. Хуторской // Народное образование. – 2003. – № 2. – С. 58–64 .

8. Чернов А. А. Становление глобального информационного общества : проблемы и перспективы [Електронний ресурс] / А. А. Чернов. – М. : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2003. – 232 с. – Режим доступу : http://ihtik.lib.ru/sociology_6janv2005/sociology_6janv2005_272.rar

9. Якубов С. Технології SMART та навчальні матеріали / С. Якубов, Я. Якінін // Hi-Tech у школі. – 2011. – № 3–4. – С. 8–11.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Васаженко Наталія Олексіївна – викладач кафедри фундаментальних та гуманітарних дисциплін Вінницького навчально-наукового інституту економіки Тернопільського національного економічного університету.

Коло наукових інтересів: розробка теоретичних та методичних засад навчання студентів-економістів у вищих навчальних закладах.

МЕТОДИ НАВЧАННЯ У КУРСІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ МАТЕМАТИКА*

Сергій ДРАГАНЮК

Розглянуто приклад методики викладання лінійної алгебри для студентів напряму підготовки Математика .*

An example of realization of technologies in teaching of linear algebra is considered .

Постановка проблеми. На даний час у вищій освіті України відбуваються суттєві зміни, спрямовані на наближення до Європейської вищої освіти. Вже зараз значну частину кожного курсу студенти змушені опановувати самостійно. Отже збільшується значення самостійної роботи студентів для засвоєння математичних дисциплін. Для цих цілей повинні бути напрацьовані на сучасному науковому рівні різноманітні методичні навчальні посібники. Нажаль, зараз бібліотечний фонд ВНЗ поповнюється математичною літературою недостатньо, отже старішає і не завжди задовольняє потреби студентів-математиків .

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Запропоновані теоретичні розробки є продовженням впровадження методики вивчення лінійної алгебри для студентів першого курсу спеціальності «математика» фізико-математичних факультетів педагогічних ВНЗ. Попередні розробки викладені у [1-3] .

Мета статті полягає у спробі пропонування можливої структури однієї з компонент, спроможних забезпечити самостійну роботу студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів над останніми розділами традиційного курсу лінійної алгебри .

В них у доступній формі викладена частина розділу лінійної алгебри, присвячені евклідовим просторам. Для успішного засвоєння цих матеріалів студенти повинні попередньо ознайомитись з елементами теорії множин, зокрема з відомостями стосовно відображень, теорією матриць та їх визначників, теорією сумісності систем лінійних рівнянь, відомостями про векторні простори, їх розмірність та підпростори .

Для знаходження необхідних відповідей студент може скористатися рекомендованою літературою (наприклад, [4-8]), консультацією викладача.

Векторні простори зі скалярним множенням

Нехай V – довільний векторний простір над полем скалярів F. Крім основних операцій додавання векторів та множення вектора на скаляр, введемо на цьому просторі ще одну операцію.

Означення 1. *Операцією* ***скалярного множення****, заданою на векторному просторі* V*, називається відображення, яке ставить у відповідність кожній впорядкованій парі векторів* $(\vec{a},\vec{b})$ *простору* V*деякий елемент поля* F*, тобто скаляр, який називається* ***результатом*** *операції. Ця операція позначається* $\vec{a}\cdot\vec{b}$*, причому вона повинна задовольняти аксіомам .*

Для довільних векторів $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ *простору* V *і будь-якого скаляра* α *поля* F*:*

1. $(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{b}\cdot\vec{a})$ *– комутативність;*
2. $(\alpha\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ *– асоціативність відносно множення на скаляр;*
3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ *– дистрибутивність;*
4. *Якщо* $\vec{a}\neq\vec{0}$*, то* $\vec{a}\cdot\vec{a}\neq 0$.

Вираз $\vec{a}\cdot\vec{a}$ *називається* ***скалярним квадратом*** *вектора* $\vec{a}$.

Евклідові простори, мова про які йтиме пізніше, це один з найважливіших класів векторний просторів зі скалярним множенням.

Властивості операції скалярного множення векторів

Для будь-яких векторів простору V та довільних скалярів поля F виконується:

1. $\vec{a}\cdot(\beta\cdot\vec{b})=\beta\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$;
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
3. $\vec{0}\cdot\vec{a}=0$;
4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}=\vec{0}$.
5. Для довільних лінійних комбінацій векторів:

$$(\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{a_2}+\cdots+\alpha_k\cdot\overrightarrow{a_k})\cdot(\beta_1\cdot\overrightarrow{b_1}+\beta_2\cdot\overrightarrow{b_2}+\cdots+\beta_l\cdot\overrightarrow{b_l})=$$

$$\alpha_1\cdot\beta_1\cdot$$

$$\cdot\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_1}+\alpha_1\cdot\beta_2\cdot\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_2}+\cdots+\alpha_1\cdot\beta_l\cdot\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_l}+\alpha_2\cdot\beta_1\cdot\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{b_1}+\alpha_2\cdot\beta_2\cdot$$

$$\cdot\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{b_2}+\cdots+\alpha_2\cdot\beta_l\cdot\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{b_l}+\cdots+\alpha_k\cdot\beta_1\cdot\overrightarrow{a_k}\cdot\overrightarrow{b_1}+\alpha_k\cdot\beta_2\cdot\overrightarrow{a_k}\cdot\overrightarrow{b_2}$$

$$++\cdots+\alpha_k\cdot\beta_l\cdot\overrightarrow{a_k}\cdot\overrightarrow{b_l}$$

1. Застосовуючи перші дві аксіоми скалярного множення, маємо: $\vec{a}\cdot\left(\beta\cdot\vec{b}\right)=$ $=(\beta\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}=\beta\cdot(\vec{b}\cdot\vec{a})=\beta\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Зрозуміло, що вкінці знову застосовується аксіома 1.
2. Доводиться аналогічно властивості 1 за допомогою аксіом 1 і 3 скалярного множення векторів.
3. За властивостями векторних просторів [7. 19], для довільного вектора $\vec{b}$ виконується $0\cdot\vec{b}=\vec{0}$, а тому $\vec{0}\cdot\vec{a}=(0\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}$. За аксіомою 2 скалярного множення буде $\vec{0}\cdot\vec{a}=0\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)=0$. Останній добуток дорівнює нулю, тому що множення відбувається у полі F.
4. <u>*Необхідність.*</u> Нехай $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$. За аксіомою 4 скалярного множення вектор $\vec{a}$ не може бути ненульовим, а тому $\vec{a}=0$.

<u>*Достатність.*</u> Випливає з властивості 3.

5. Враховуючи асоціативність додавання векторів, введемо додаткові дужки, які не змінюють результату. Вираз у внутрішніх дужках є одним вектором. Використовуючи аксіому 3 та властивість 2 скалярного множення, маємо:

$$\left(\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1}+(\alpha_2\cdot\overrightarrow{a_2}+\dots+\alpha_k\cdot\overrightarrow{a_k})\right)\cdot\left(\beta_1\cdot\overrightarrow{b_1}+\left(\beta_2\cdot\overrightarrow{b_2}+\dots+\beta_l\cdot\overrightarrow{b_l}\right)\right)=$$

$$=(\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1})\cdot\left(\beta_1\cdot\overrightarrow{b_1}+\left(\beta_2\cdot\overrightarrow{b_2}+\dots+\beta_l\cdot\overrightarrow{b_l}\right)\right)+\ (\alpha_2\cdot\overrightarrow{a_2}+\dots+\alpha_k\cdot\overrightarrow{a_k})\cdot$$

$$\cdot\left(\beta_1\cdot\overrightarrow{b_1}+\left(\beta_2\cdot\overrightarrow{b_2}+\dots+\beta_l\cdot\overrightarrow{b_l}\right)\right)=$$

$$(\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1})\cdot\left(\beta_1\cdot\overrightarrow{b_1}\right)+(\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1})\left(\beta_2\cdot\overrightarrow{b_2}++\dots+\beta_l\cdot\overrightarrow{b_l}\right)+(\alpha_2\cdot\overrightarrow{a_2}+\dots+\alpha_k\cdot\overrightarrow{a_k})\cdot\left(\beta_1\cdot\overrightarrow{b_1}+(\beta_2\cdot\overrightarrow{b_2}+\dots+\beta_l\cdot\overrightarrow{b_l}\right)=$$

$$=\alpha_1\cdot\beta_1\cdot\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_1}+(\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1})\left(\beta_2\cdot\overrightarrow{b_2}+\dots+\beta_l\cdot\overrightarrow{b_l}\right)+(\alpha_2\cdot\overrightarrow{a_2}+\dots+\alpha_k\cdot\overrightarrow{a_k})\cdot\cdot\left(\beta_1\cdot\overrightarrow{b_1}\right)+(\beta_2\cdot\overrightarrow{b_2}+\dots+\beta_l\cdot\overrightarrow{b_l})$$

.

Аналогічно розкриваючи дужки, отримаємо доведення останньої властивості.

***Зауваження* .** У довільному векторному просторі V зі скалярним множенням ця операція індукує (породжує, задає) відповідну операцію скалярного множення на будь-якому його підпросторі.

Приклади векторних просторів зі скалярним множенням

1. Нехай V – тривимірний векторний простір геометричних векторів над полем дійсних чисел R. У цьому просторі вводиться операція скалярного множення векторів:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha, \tag{1.1}$$

де α – кут між векторми $\vec{a}$ і $\vec{b}$. При цьому як властивості доводяться всі аксіоми скалярного множення, заданого на довільному векторному просторі .

2. Для довільних векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ арифметичного векторного простору R^n над полем дійсних чисел R [7. 22] покладемо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n. \quad \mathbf{(1.2)}$$

Ясно, що вектор $\vec{a}$ ненульовий тільки у випадку, якщо хоча б одна з його компонент не дорівнює нулю. Це означає, що для ненульового вектора $\vec{a}$ буде $\vec{a} \cdot \vec{a} = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \dots + {a_n}^2 > 0$. Таким чином, ми довели, що аксіома 4 скалярного множення виконується для операції, заданої формулою 1.2. Інші аксіоми скалярного множення для цієї операції перевірте самостійно.

***Означення 2. Стандартним евклідовим векторним простором** E_n називається n-вимірний арифметичний векторний простір R^n над полем дійсних чисел R з заданою на ньому операцією скалярного множення 1.2 .*

3. На векторному просторі $C\,[A, B]$ неперервних на проміжку $[A, B]$ функцій над полем дійсних чисел R введемо операцію скалярного множення наступним чином. Для довільних функцій f і g цього простору покладемо $f \times g = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx$. Аксіоми скалярного множення випливають з відповідних властивостей визначеного інтегралу.

В останньому прикладі векторний простір нескінченновимірний, а тому він не є предметом вивчення лінійної алгебри. Такі простори вивчаються у математичній дисципліні, яка називається функціональний аналіз.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Запропонована форма подачі теоретичного матеріалу з лінійної алгебри пройшла певну апробацію у реальному навчальному процесі. Результати є позитивними. Але такої апробації не достатньо. Крім того, залишається актуальним розробка інших методів навчання лінійної алгебри для вищої школи.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Драганюк С. В. Векторні простори: навч.посіб./ Драганюк С. В., Парфанюк Н. С. – Одеса: ПНПУ, 2014. – 50 с.
2. Драганюк С.В. Елементи теорії множин: навч.посіб./ Драганюк С. В., Перець О. Б. – Одесса: ПНПУ, 2013. – 141 с.
3. Драганюк С. В. Матриці та визначники: навч.посіб.– Одеса: ПНПУ, 2012. – 112 с .
4. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел: В 2-х ч./ Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б. І. – К.: Вища школа,1974.Ч.1. – 464 с.
5. Завало С. Т. Алгебра и теория чисел: В 2-х ч./ Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б. И. – К.: Высшая школа, 1977.Ч.1. – 400 с.
6. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры/ П. С. Александров . – М.: Наука, 1979. – 512 с.
7. Куликов Л. Я. Алгебра и теорія чисел./ Л. Я. Куликов – М.: Высш.школа,1979. – 559 с.
8. Курош А. Г. Курс высшей алгебры./ А. Г. Курош– М.: Наука, 1971. – 432 с.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Драганюк Сергій Володимирович – викладач кафедри алгебри та геометрії ДЗ «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського».

Коло наукових інтересів: алгебра, теорія груп.