clusters (from the cluster of "weak" schools to the cluster of "excellent" schools). The best results (among several methods of cluster analysis) have been obtained using the hierarchical clustering with the average linkage algorithm. Although the clusters are not separated ideally, the "weak schools" cluster is separated quite well from the "good schools" cluster and the "excellent schools" cluster.

Key words: *cluster analysis, external independent testing, mathematical education, testing.*

Е.В. Турчин, Б. Сафонюк

Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара

КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЗНО ПО МАТЕМАТИКЕ ПО ДНЕПРОПЕТРОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Задача оценки уровня учебного заведения по определенному предмету является достаточно интересной и важной. Нами рассматривается следующий тип таких задач: сгруппировать в кластеры школы определенного региона, зная таблицу распределения по категориям баллов учеников этих школ на внешнем независимом оценивании (ЗНО) по определенному предмету (у нас предмет – математика, регион – Днепропетровская область). Хотя такая задача является достаточно естественной, похоже, что задачи подобного типа почти никто не исследовал. Нами было получено разбиение школ на 4 кластера (от кластера "слабых" школ до кластера "наилучших" школ). Наилучшие результаты среди нескольких методов кластерного анализа дал метод иерархической кластеризации с алгоритмом average linkage. Хотя отделение кластеров не является идеальным, кластер "слабых" школ неплохо отделяется от кластеров "хороших" и "наилучших" школ.

Ключевые слова: *кластерный анализ, внешнее независимое оценивание, математическое образование, тестирование.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Турчин Євген Валерійович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Коло наукових інтересів: випадкові процеси, вейвлет-аналіз.

Сафонюк Богдан – студент Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Коло наукових інтересів: багатовимірний статистичний аналіз.

УДК 519.61: 37

Д.С. Харченко, Л.В. Ізюмченко

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОЇ ТА ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ ЗАСОБАМИ ІКТ

У статті описано навчально-методичні особливості роботи учителя з математично обдарованими учнями; показано можливість позакласної роботи на прикладі теми «Розв'язування нелінійних рівнянь»; розглянуто приклад індивідуального навчального завдання для студентів педагогічного внз; наведено розв'язання однієї задачі високого рівня різними способами, що може бути використано при підготовці учнів до різноманітних математичних турнірів та успішного складання ЗНО; застосовано три способи відокремлення коренів многочлена та проілюстровано сімома числовими методами уточнення коренів, у тому числі методом поділу відрізка навпіл, методом хорд, методом Ньютона (дотичних), двома модифікаціями методу Ньютона, комбінованим методом хорд і дотичних та методом ітерації; створено програму, яка реалізує уточнення кореня із наперед заданою точністю та виводить кількість ітераційних кроків. Крім того, розглянута в умові задача переформульована таким чином, що дозволяє розглянути її як рівняння з параметром; розглянуто розв'язання отриманого рівняння засобами елементарної математики; відмічено позитивний вплив застосовуваних способів розв'язання задачі на підвищення освітнього рівня школярів.

***Ключові слова**: відокремлення коренів нелінійного рівняння, числові методи уточнення коренів, похибка методу, рівняння з параметром, ІКТ.*

Постановка проблеми. Сучасне суспільство знаходиться у стані політичних та економічних змін, які вимагають від людини бути мобільною та адаптивною, у неї має бути сформоване уміння бачити проблему, чітко формулювати та всебічно підходити до її розв’язування, здобувати необхідну інформацію тощо. Відповідно до потреб продукуються зміни в освіті, проходить її модернізація. Важливою стороною проблеми активізації навчально-пізнавальної діяльності є насамперед практичний аспект. Проблема застосування знань на практиці вимагає формування в учнів уміння аналізувати ситуацію, конкретизувати загальні абстрактні положення, пізнавати відомі фігури, залежності у конкретних ситуаціях, переусвідомлювати один і той самий об’єкт під кутом зору різних систем знань, варіювати способи дій, переключатися з одного виду діяльності на інший. А тому у системі навчальних занять широке застосування мають знайти більш ефективні методи і прийоми організації навчання учнів, що сприятимуть розвитку в них пізнавальної активності, орієнтації на розвиток особистості шляхом створення умов для широкого аналізу фактів, умінням самостійно працювати, вчитися самому, поєднувати теоретичні знання з практичними діями.

Аналіз раніше виконаних досліджень. Структуру і зміст профільного навчання математики, наступність у процесі навчання та професійну спрямованість навчання математики досліджували М. Бурда, В. Бевз, Н. Тарасенкова, В. Швець, Т. Хмара та ін., формування творчої особистості учня, розвиток творчого мислення учнів у процесі навчання математики – З. Слєпкань, О. Чашечникова, О. Скафа, Н. Бібік, Л. Ізюмченко, О. Киричук, В. Лозова, Л. Лутченко, Н. Морозова, З. Огороднійчук, Г. Щукіна та ін. Питанням впровадження засобів нових ІКТ у навчання математики займаються М. Головань, Ю. Горошко, М. Жалдак, Н. Кульчицька, В. Кушнір, Р. Ріжняк та ін.

Виклад основного матеріалу. Навчаючись у вищому навчальному закладі та розв’язуючи завдання, властиві певному курсу вищої математики, студент педагогічного внз часто не уявляє, де саме він потім під час своєї подальшої роботи у школі буде використовувати отримані знання чи розв’язувати схожі завдання. Іноді навіть вивчаючи одні і ті ж об’єкти у різних предметах вишу, студент не пов’язує їх між собою. Тому метою цієї статті було показати, як може бути реалізована одна і та ж задача у різних курсах вищої математики (Алгебри [1], Числових методів [2], ІКТ) і елементарної математики вишу та школи [3]; як вона може бути реалізована у виші у вигляді індивідуального домашнього завдання з наступним захистом цього завдання; проілюструвати міжпредметні зв’язки, що при цьому виникають. Виконання індивідуальних завдань студентом дозволяє систематизувати знання з теми, захист виконаного завдання привчає студента до критичної оцінки отриманих результатів, використання ППЗ дозволяє перевірити висунуті гіпотези. Акцентуємо нашу увагу також на позакласній роботі з математично обдарованими учнями у школі (на прикладі виконання цього завдання). Під час організації гурткової роботи (підготовки тем доповідей, повідомлень, вікторин, обчислювальних практикумів) з учнями у школі чи при роботі ЗФМШ чи над науково-дослідницькою роботою у Малій академії наук, підготовці до олімпіад, доцільно обирати теми, які є близькими до поточного програмового матеріалу з предмету. Пропонуючи наперед продуману тематику, з одного боку, учитель повинен уважно віднестись до побажань учнів, з іншого боку, пропонуючи певну домінуючу тему, доцільно пояснити її вибір, аргументувати важливість чи практичну значимість теми. Рівняння у шкільному курсі математики займають провідне місце, на їхнє вивчення відводиться часу більше, ніж на будь-яку іншу тему шкільного курсу алгебри; теорія рівнянь має не тільки теоретичне значення для пізнання природних законів, але і служить конкретним практичним цілям, оскільки більшість задач реального світу зводиться до розв'язання різних видів рівнянь, а тому у учителя не повинно виникнути проблем, як аргументувати включення теми «Розв'язування нелінійних рівнянь» у план роботи гуртка восьмого (чи старших) класів. У старших класах мотивація навчання пов'язана безпосередньо з цілями навчання (задоволенням допитливості, інтелектуальною активністю); у т.ч. сприяє якісніше підготуватися до складання зовнішнього незалежного оцінювання з предмету та вступити у вищі навчальні заклади.

Наведемо приклад завдання, яке може бути успішно реалізоване засобами алгебри многочленів у курсі Алгебри та проілюстроване засобами курсу Числові методи (вищої математики), з одного боку, та реалізоване засобами елементарної математики (шкільний курс поглибленого рівня), з іншого.

Задача. Знайти дійсні корені многочлена $f(x) = x^3 - x^2(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{5}x + 5$.

Розв'язання. 1. Відокремимо дійсні корені многочлена.

1 спосіб. Дійсні корені рівняння слід шукати в інтервалі $x \in \left(-4-\sqrt{5};\ 4+\sqrt{5}\right)$, а тому $x \in \left(-6{,}24;\ 6{,}24\right)$. Складаємо ряд Штурма для многочлена $f(x)$, для цього обчислюємо його похідну, маємо перші два многочлени $f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = 3x^2 - 2\cdot(3+\sqrt{5})x + 2\sqrt{5}$, виконуємо ділення $f_1(x)$ на $f_2(x)$, потім $f_2(x)$ на $f_3(x)$ і т. д., отримуємо $f_3(x) = 28x - (55+6\sqrt{5}),\quad f_4(x) = 1.$ Ряд Штурма $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)$. Оцінимо кількість змін знаків W цих многочленів, дані заносимо у таблицю:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	W
$-\infty$	–	+	–	+	3
∞	+	+	+	+	0
0	+	+	–	+	2

Оскільки $W(-\infty) - W(\infty) = 3$, то є три дійсні корені, причому один від'ємний, і два додатних, оскільки $W(-\infty) - W(0) = 1$ і $W(0) - W(\infty) = 2$.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	W
–1	–	+	–	+	3
4	+	+	+	+	0
2	+	–	–	+	2
3	–	+	+	+	1

Додаткові обчислення значень многочленів ряду Штурма дозволяють зробити висновок, що корені многочлена $x_1 \in (-1; 0),\ x_2 \in (2; 3),\ x_3 \in (3; 4)$.

2 спосіб. Обчислюємо похідну многочлена $f(x)$ та знаходимо проміжки монотонності функції $f(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 2\cdot(3+\sqrt{5})x + 2\sqrt{5}$, $f'(x) = 0$, $3x^2 - 2\cdot(3+\sqrt{5})x + 2\sqrt{5} = 0$. Корені квадратного рівняння $\frac{3+\sqrt{5}-\sqrt{14}}{3};\frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{14}}{3}$ (наближено дорівнюють 0,498 та 2,993) є точками екстремуму функції $f(x)$. Досліджуємо знаки функції $f(x)$ на кінцях першого проміжку монотонності:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;\ f(0{,}5) \approx 6$. Оскільки на кінцях проміжку монотонності неперервна функція набуває значень, протилежних за знаком, то на цьому проміжку є рівно один корінь, обчислюємо ще одне-декілька значень функції, наприклад, $f(0) = 5 > 0,\ f(-1) = 1 - 3\sqrt{5} < 0$, робимо висновок, що $x_1 \in (-1;0)$. Аналогічно досліджуємо два інших проміжки монотонності функції і встановлюємо, що на кожному з них є рівно по одному кореню.

3 спосіб. Графічний спосіб. Перепишемо рівняння $f(x) = 0$ у вигляді $x^3 = x^2(3+\sqrt{5}) - 2\sqrt{5}x - 5$ та побудуємо в одній системі координат дві параболи $\begin{cases} y = x^3, \\ y = x^2(3+\sqrt{5}) - 2\sqrt{5}x - 5. \end{cases}$ Маємо три точки перетину (див. рис. 1), абсциси яких і є коренями рівняння: $x_1 \in (-1;0),\ x_2 \in (2;3),\ x_3 \in (3;4)$. Зауважимо, цей спосіб доступний учням з восьмого класу школи.

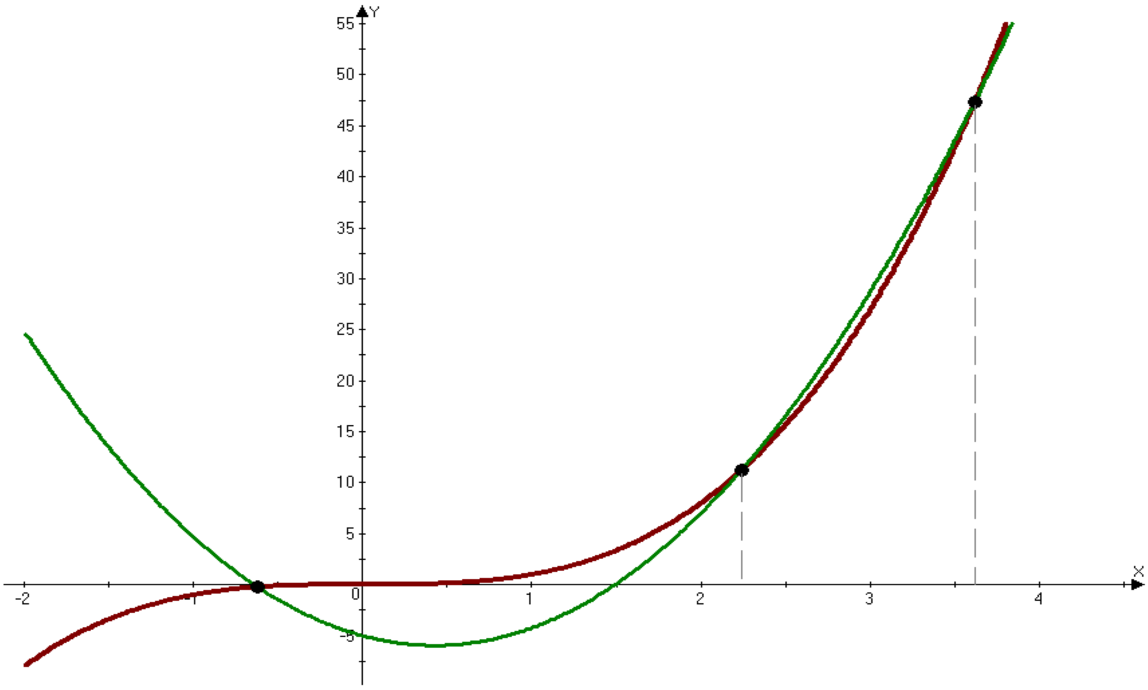

Рис.1. Графічне відокремлення коренів рівняння.

2. Знайдемо (уточнимо) корені многочлена.

1 спосіб. Уточнимо один із коренів нашого рівняння, наприклад, перший корінь з проміжку $(-1;0)$ методом поділу відрізка навпіл з точністю $\varepsilon = 0{,}001$. На кінцях проміжку функція приймає значення різних знаків $f(-1)\cdot f(0) < 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$. Обчислимо перше наближення: $\tilde{n}_1 = \dfrac{-1+0}{2} = -0{,}5$, значення функції $f(-0{,}5) > 0$, а тому корінь знаходиться на проміжку $(-1;-0{,}5)$. Далі ітераційний процес продовжується: наступне наближення $\tilde{n}_2 = -0{,}75$, значення $f(-0{,}75) < 0$, а тому корінь знаходиться на проміжку $(-0{,}75;-0{,}5)$, і т.д., поки довжина відрізка задовольнятиме умові: $|b-a| < \varepsilon$. Отримаємо $x^* = -0{,}6177 \pm 0{,}0005$ (див. таблицю 1).

Таблиця 1. Уточнення кореня методом поділу відрізка навпіл

N	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	|b-a|
0	-1	0	-0,5	-5,7082	5,0000	1,3299	1,00000
1	-1	-0,5	-0,75	-5,7082	1,3299	-1,7213	0,50000
2	-0,75	-0,5	-0,625	-1,7213	1,3299	-0,0846	0,25000
3	-0,625	-0,5	-0,5625	-0,0846	1,3299	0,6497	0,12500
4	-0,625	-0,5625	-0,59375	-0,0846	0,6497	0,2894	0,06250
5	-0,625	-0,59375	-0,609375	-0,0846	0,2894	0,1042	0,03125
6	-0,625	-0,609375	-0,6171875	-0,0846	0,1042	0,0102	0,01563
7	-0,625	-0,6171875	-0,62109375	-0,0846	0,0102	-0,0371	0,00781
8	-0,62109375	-0,6171875	-0,619140625	-0,0371	0,0102	-0,0134	0,00391
9	-0,619140625	-0,6171875	-0,618164063	-0,0134	0,0102	-0,0016	0,00195
10	-0,618164063	-0,6171875	**-0,617675781**	-0,0016	0,0102	0,0043	0,00098

Зауважимо, що уточнення кореня методом поділу відрізка навпіл може бути успішно реалізоване при позакласній роботі чи обчислювальному практикумі з учнями восьмого класу середньої школи.

2 спосіб. Уточнимо перший корінь методом хорд, $\varepsilon = 0{,}001$. Обчислимо значення першої та другої похідних на кінцях відрізка: $f'(-1) = 9 + 4\sqrt{5} \approx 17{,}944$, $f'(0) = 2\sqrt{5} \approx 4{,}472$; $f''(-1) = -12 - 2\sqrt{5} \approx -16{,}472$, $f''(0) = -6 - 2\sqrt{5} \approx -10{,}472$. Неважко переконатися в тому, що обидві похідні зберігають сталі знаки на усьому проміжку. Визначимо умову зупинки ітераційного процесу. Найменше m_1 і найбільше M_1 значення модуля першої похідної маємо на кінцях відрізка: $m_1 = f'(0) = 2\sqrt{5}$, $M_1 = f'(-1) = 9 + 4\sqrt{5}$, а тому умова зупинки ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \le \dfrac{m_1}{M_1 - m_1} \cdot \varepsilon$, $|x_n - x_{n-1}| \le 0{,}332 \cdot \varepsilon < \varepsilon$. Вибираємо нерухомий кінець: оскільки $f''(-1) < 0$ і $f(-1) < 0$, то нерухомою точкою буде $c = -1$, а рухомим буде правий кінець. Таким чином, усі наближення ми будемо знаходити з боку кінця «*b*» (з надлишком), а нерухомим кінцем буде початок «*a*». Послідовність $\{x_k\}$ обчислюємо за формулою: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k) \cdot (x_k - c)}{f(x_k) - f(c)}$, де $k = 0, 1, 2, \ldots$, $c = -1$, $x_0 = 0$. Усі обчислення занесені у таблицю 2.

Таблиця 2. Уточнення кореня методом хорд

N	x_k	$f(x_k)$	f(c)	c	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	0	5	-5,708204	-1	–
1	-0,466931712	1,668420114			0,46693171
2	-0,587499312	0,362587265			0,1205676
3	-0,612136545	0,07105471			0,02463723
4	-0,61690524	0,013637728			0,0047687
5	**-0,617818328**	0,002607047			0,00091309

Для досягнення потрібної точності нам довелося виконати п'ять ітераційних процесів. Маємо $x^* = -0{,}6178 \pm 0{,}0005$. Зауважимо, що цей метод доступний учням у десятому класі (після вивчення похідної).

3 спосіб. Метод Ньютона (дотичних). Уточнимо перший корінь нашого рівняння на проміжку $(-1;0)$ методом дотичних з точністю $\varepsilon = 0{,}001$. Перша і друга похідні зберігають сталий знак на проміжку, початкову точку $x_0 = -1$ обираємо з умови $f(-1)f''(-1) > 0$, обчислення виконуємо за формулою: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0,1,2,...$ Усі обчислення занесені у таблицю 3. Процес завершується при виконанні умови: $\left|\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right| < \varepsilon$.

Таблиця 3. Уточнення кореня методом дотичних

N	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\left\lvert\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right\rvert$
0	-1	-5,7082	17,94427	0,318107302
1	-0,6818927	-0,80124	13,00794	0,061595932
2	-0,62029677	-0,02739	12,12227	0,00225978
3	**-0,61803699**	-3,6E-05	12,09021	2,99663E-06

За три ітераційні кроки ми отримали корінь із потрібною точністю. Насправді точність навіть вища на два порядки: $x^* = -0{,}618037 \pm 0{,}000005$, але на попередньому кроці задана в умові точність ще не досягалася.

4 спосіб. Модифікація методу Ньютона від методу дотичних відрізняється тим, що замість дотичних на кожному кроці проводяться прямі, паралельні до дотичної, проведеної у першій точці. Метод має гіршу збіжність, ніж метод Ньютона, проте дуже зручний у ручному обчисленні. Ітераційні формули мають вигляд: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_0)}, k = 0,1,2,...$. На шостому кроці досягаємо потрібної точності $x^* = -0{,}6182 \pm 0{,}0005$.

5 спосіб. Ще однією модифікацією методу Ньютона є метод січних, який дозволяє замінити обчислення похідної в точці відношенням приросту функції до приросту аргументу: $f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$. Геометрично – дотична замінюється на січну, що проходить через дві точки, два початкові наближення вибираються близькими до кореня. Ітераційні формули методу Ньютона набувають вигляду: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, k = 0,1,2,...$. Переваги методу – не потребують обчислення похідної, недолік – ітераційний процес може розходитися, а тому потрібує уваги при обчисленнях. Обчислення кореня $x^* = -0{,}6180 \pm 0{,}0005$ наведені у таблиці 4.

Таблиця 4. Уточнення кореня методом січних

N	x_{k+1}	x_k	$f(x_{k+1})$	$f(x_k)$	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
0	0	-1	5	-5,7082039	1
1	-0,4669317	0	1,66842011	5	0,466931712
2	-0,7007662	-0,466931712	-1,0493422	1,66842011	0,233834483
3	-0,6104815	-0,700766196	0,0909071	-1,0493422	0,090284714
4	-0,6176795	-0,610481482	0,00428509	0,0909071	0,007198006
5	**-0,6180356**	-0,617679488	-1,905E-05	0,00428509	0,000356077

6 спосіб. Комбінований метод хорд і дотичних є надзвичайно зручним, адже наближення до кореня йде з двох боків, він є досить швидким за рахунок поєднання двох методів – хорд і дотичних, ітераційні формули мають вигляд: $a_{k+1}=a_k-\dfrac{f(a_k)}{f'(a_k)}, k=0,1,2,...$, $b_{k+1}=b_k-\dfrac{f(b_k)(b_k-a_{k+1})}{f(b_k)-f(a_{k+1})}, k=0,1,2,...$.

Для того, щоб правильно обрати початкові наближення b_0 і a_0, нам потрібно знайти значення функції та її другої похідної на кінцях проміжку $(-1;0)$. Їх ми вже рахували у попередніх прикладах: $f(-1)\approx-5,7082$, $f(0)=5$, $f''(-1)\approx-16,4721$, $f''(0)=-10,4721$. Оскільки в точці –1 значення функції та її другої похідної мають однакові знаки, то $a_0=-1$, $b_0=0$. Процес завершується при виконанні умови: $\lvert a_k-b_k\rvert<\varepsilon$. Середина відрізка $[a_3;b_3]$ – 0,6180±0,00005 є коренем з потрібною точністю (навіть більшою). Зауважимо, що середина відрізка $[a_2;b_2]$ не задовольняла потрібній точності, а середина $[a_3;b_2]$ – задовольняє.

7 спосіб. Уточнимо корінь нашого рівняння на проміжку $(-1;0)$ методом ітерацій з точністю $\varepsilon=0,001$. $f(x)=x^3-x^2(3+\sqrt{5})+2\sqrt{5}x+5$, похідна функції: $f'(x)=3x^2-2(3+\sqrt{5})x+2\sqrt{5}$. Нескладно показати, що $f'(x)$ монотонно спадає на вказаному проміжку. Знайдемо найбільше M_1 за модулем значення першої похідної – досить знайти значення на лівому кінці проміжку: $f'(-1)=9+4\sqrt{5}\approx17,944$, тоді параметр λ: $\lambda\le\dfrac{2}{17,944}\approx0,11145787$, оберемо $\lambda=0,1$.

Тоді рівняння $f(x)=0$ перепишеться $x=\varphi(x)$, $\varphi(x)=x-\lambda f(x)$ або $x=x-0,1(x^3-x^2(3+\sqrt{5})+2\sqrt{5}x+5)$, де $\varphi(x)=x-0,1\cdot(x^3-x^2(3+\sqrt{5})+2\sqrt{5}x+5)$. Ітераційні формули мають вигляд: $x_{k+1}=\varphi(x_k),\ k=0,1,...$.

Таблиця 5. Уточнення кореня методом ітерацій

N	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_n-x_{n+1}\rvert$
0	-1	-0,429179607	–
1	-0,42917961	-0,632893547	0,570820393
2	-0,63289355	-0,614771205	0,203713941
3	-0,6147712	-0,618708421	0,018122343
4	-0,61870842	-0,617892698	0,003937217
5	**-0,617892698**		0,000815723

Ми бачимо, що для досягнення потрібної точності нам довелося виконати п'ять ітераційних кроків (див. табл. 5): $x^* = -0{,}6179 \pm 0{,}0005$.

Зауважимо, що є інші методи уточнення кореня, наприклад, метод парабол, який є модифікацією методу Ньютона, але порядок збіжності методу парабол нижчий, ніж у методу Ньютона, та інші методи**.**

Для реалізації числових методів розв'язування нелінійних рівнянь створено програму, у якій розглянуто п'ять методів уточнення коренів, вікно програми з результатами обчислень коренів нашої задачі наведено на рисунку 2.

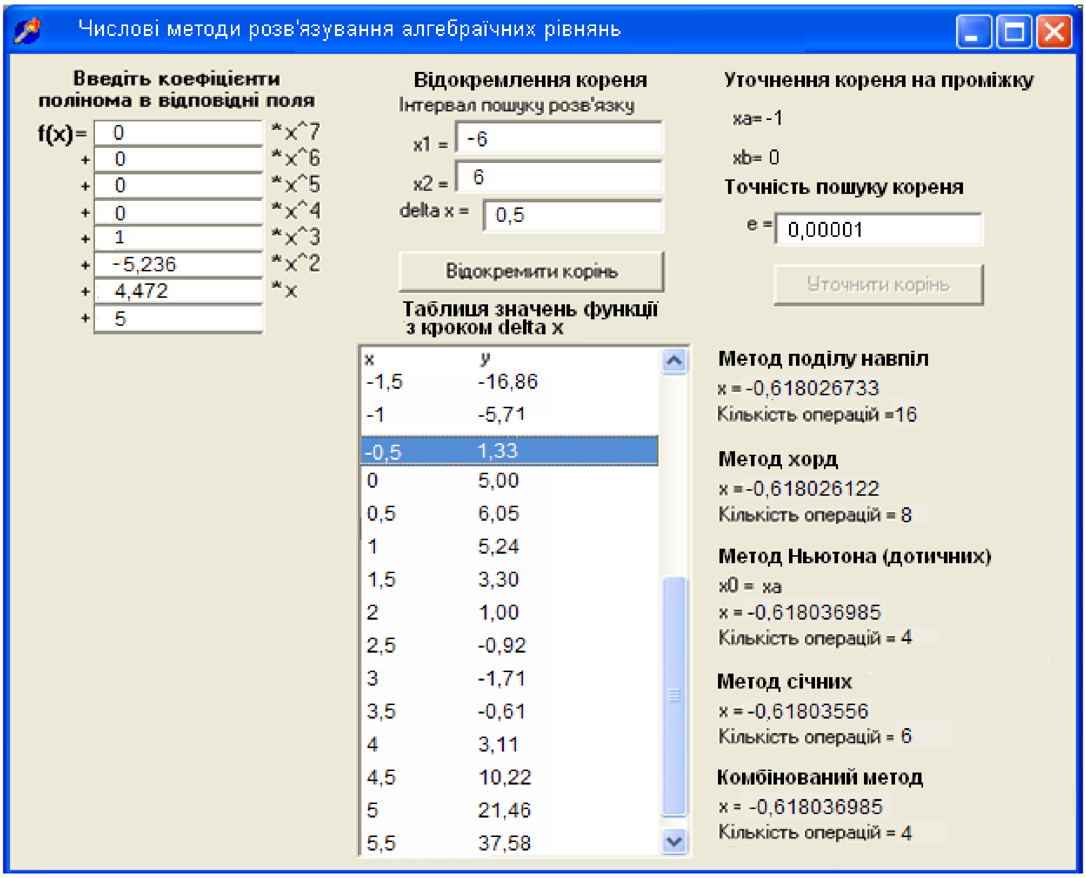

Рисунок 2. Вікно програми для відшукання коренів многочленів

Зауважимо, що знайомство учнів з числовими методами розв'язування рівнянь робить їх психологічно більш стійкими, коли вони стикаються з незнайомими типами рівнянь, адже числові методи є універсальними.

8 спосіб. Уточнимо корені многочлена засобами елементарної математики. Для цього розкриємо дужки і перепишемо рівняння $x^3 - x^2(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{5}x + 5 = 0$ у такому вигляді $x^3 - 3x^2 - \sqrt{5}x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = 0$. Після заміни: $\sqrt{5} = t$, $5 = t^2$, отримуємо наступне квадратне рівняння відносно змінної t: $t^2 + t(2x - x^2) + (x^3 - 3x^2) = 0$, змінна x відіграє роль параметра. Обчислимо дискримінант квадратного рівняння:

$$D = (2x - x^2)^2 - 4(x^3 - 3x^2) = 4x^2 - 4x^3 + x^4 - 4x^3 + 12x^2 =$$

$$= x^4 - 8x^3 + 16x^2 = x^2(x^2 - 8x + 16) = x^2(x-4)^2 = (x^2 - 4x)^2.$$

Дискримінант квадратного рівняння невід'ємний, тому існують корені квадратного рівняння: $t_{1,2} = \dfrac{-2x + x^2 \pm (x^2 - 4x)}{2}$, $t_1 = \dfrac{-2x + x^2 + x^2 - 4x}{2} = x^2 - 3x$,

$t_2 = \dfrac{-2x + x^2 - x^2 + 4x}{2} = x$. Повертаємось до заміни, маємо сукупність двох рівнянь: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x = \sqrt{5}, \\ x = \sqrt{5}. \end{array}\right.$ Перше рівняння $x^2 - 3x - \sqrt{5} = 0$, $D = 9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$, має два корені $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm (\sqrt{5} + 2)}{2}$, $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5} - 2}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5} + 2}{2} = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}$. Друге рівняння має один корінь $x_3 = \sqrt{5}$, а тому рівняння має три корені.

Відповідь: корені многочлена $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{5}$; $\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

Висновки. У даній роботі розглядалися різні способи розв’язування однієї задачі, які використовувалися під час виконання індивідуального домашнього завдання студентами фізико-математичного факультету ЦДПУ та при роботі з учнями одинадцятого фізико-математичного класу Педагогічного ліцею м. Кропивницького при підготовці до міської олімпіади. Розв’язування таких задач оправдане перш за все тим, що сприяє досягненню однієї з найважливіших цілей викладання математики в школі – розвитку абстрактного мислення, творчих здібностей учнів, підвищенню рівня їх логічного, а отже, й загального розвитку. Це слід пам’ятати, адже сьогоднішнім учням прийдеться мати справу з задачами, які поки що не розв’язані, використовувати технології, які ще не створені.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і теорія чисел : практикум : навчальний посібник для студ. фізико-матем. ф-тів пед. інститутів : в 2-х ч. Ч. 2 / С.Т. Завало та ін. – К. : Вища школа, 1986. – 263 с.

2. Лященко М.Я. Чисельні методи: Підручн. / Лященко М.Я., Головань М.С. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.

3. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивч. математики. – Х.: Гімназія, 2008. – 368 с.

D.S. Kharchenko, L.V. Iziumchenko
Central Ukrainian State Pedagogical University named after Volodymyr Vynnychenko

NONLINEAR EQUATIONS SOLVING BY MEANS OF ICT OF HIGHER AND ELEMENTARY MATHEMATICS

The article describes the educational-methodical peculiarities of the teacher’s work with the mathematically gifted students; shows the possibility of extracurricular work on the example of the theme of "Solving nonlinear equations"; considers an example of individual learning tasks for students of pedagogical higher educational institution; describes the solving of one problem of high level in various ways, that can be used in the preparation of students to various mathematical tournaments and successful Assembly testing; applies three ways of separating the roots of a polynomial and illustrates by seven numerical root refinement methods, including the method of separating segment in half, by method of chords, by Newton's method (method of tangents), by two modifications of Newton's method, by the combined method of chords and tangents and by the method of iteration; describes the creation of a program that implements the specification root with predefined accuracy and displays the number of iterative steps.

Besides, the considered in the condition problem is reformulated in a way that allows us to consider it as an equation with parameter; it is considered the solving of the resulting equation by means of elementary mathematics; it is observed a positive effect of the applied solutions to problems in raising the educational level of the students.

Keywords: *separating the roots of nonlinear equations, numerical root refinement methods, the error of the method, equation with the parameter, ICT.*

Д.С. Харченко, Л.В. Изюмченко
Центральноукраинский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СРЕДСТВАМИ ИКТ, ВЫСШЕЙ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В статье описаны учебно-методические особенности работы учителя с математически одаренными учениками; показана возможность внеклассной работы на примере темы «Решение нелинейных уравнений»; рассмотрен пример индивидуального учебного задания для студентов педагогического вуза; приведены решения одной задачи высокого уровня разными способами, что может быть использовано при подготовке учеников к различным математическим турнирам и сдаче ВНО; применены три способа отделения корней многочлена и проиллюстрировано семью численными методами уточнения корней, в том числе методом деления отрезка пополам, методом хорд, методом Ньютона (касательных), двумя модификациями метода Ньютона, комбинированным методом хорд и касательных и методом итерации; создана программа, которая реализует уточнение корня с заранее заданной точностью и выводит количество итерационных шагов. Кроме того, рассмотренная в условии задача переформулирована таким образом, что позволяет рассмотреть ее как уравнение с параметром; рассмотрено решение полученного уравнения средствами элементарной математики; отмечено положительное влияние применяемых способов решения задачи на повышение образовательного уровня школьников.

Ключевые слова: *отделение корней нелинейного уравнения, численные методы уточнения корней, погрешность метода, уравнение с параметром, ИКТ.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Харченко Діана – вчитель математики, магістрантка фізико-математичного факультету ЦДПУ імені В. Винниченка.

Коло наукових інтересів: прикладна математика, методика роботи з обдарованими дітьми.

Ізюмченко Людмила – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики ЦДПУ імені В. Винниченка.

Коло наукових інтересів: олімпіадні задачі, особливості роботи з обдарованими дітьми, методика навчання алгебри і геометрії.