УДК 512.64: 372.851

**Л.В. Ізюмченко**

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка*

# НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ У ТЕКСТОВИХ КОНКУРСНИХ ЗАДАЧАХ

*У статті розглянуто задачі однієї із тем математичних олімпіад школярів; описано текстові конкурсні задачі на рух, спільну роботу та метричні співвідношення у трикутнику, математичною моделлю яких є невизначені системи лінійних рівнянь; наведено розв’язання цих задач, проаналізовано умови, за яких задачі стають визначеними; до кожної задачі наводяться по декілька питань-задач та аналізується можливість єдиної відповіді на кожне із питань; оцінюється коректність умов задачі та виконується перевірка отриманих результатів; у геометричних невизначених задачах обґрунтовано подібність усіх інтерпретацій; відмічено позитивний вплив застосовуваних способів розв’язання задач на підвищення освітнього рівня школярів.*

***Ключові слова**: системи лінійних рівнянь, невизначені системи лінійних рівнянь, загальний вектор-розв’язок, метод Гаусса, задачі на рух, спільну роботу, метричні співвідношення у трикутнику.*

**Постановка проблеми.** Зміни в житті суспільства приводять до зміни пріоритетів шкільної освіти, які проявляються у підвищенні уваги до розвитку особистості учня, його свідомості, творчих здібностей і культури мислення. Участь у роботі математичного гуртка, ЗФМШ, математичній олімпіаді, конкурсі-захисті МАН сприяє розвитку творчого потенціалу учня. Підготовка школяра до участі у математичному конкурсі має починатися з опрацювання теоретичних відомостей з кожної теми, розв’язання завдань з поступовим підвищенням рівня складності самостійно чи під керівництвом учителя, розборі готових розв’язань олімпіадних задач, пошуку власних розв’язань, відмінних від авторських. Важливим фактором успіху є повторне повернення до складних задач, розглянутих раніше, з метою відтворення прийомів розв’язування задач чи перенесення цих прийомів на більш широкий клас задач. Доступ у мережі Інтернет до матеріалів міських, обласних, Всеукраїнських олімпіад, збірників конкурсних завдань з їхніми розв’язаннями відкриває для учителя і учня нові можливості в цілеспрямованій підготовці до участі у математичних змаганнях, олімпіадах, турнірах. У даній роботі досліджується використання невизначених систем лінійних рівнянь для розв’язання конкурсних текстових задач, аналізуються умови, за яких система рівнянь може стати визначеною.

**Аналіз раніше виконаних досліджень.** Формування творчої особистості школяра, розвиток творчого мислення учня, наступність у процесі навчання математики досліджували Бевз Г.П., Бурда М.І., Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я., Скафа О.І., Тарасенкова Н.А., Хмара Т.М., Чашечникова О.С., Швець В.О. та ін. Системний підхід в організації розв’язування нестандартних та олімпіадних задач досліджували Анікушин А.В., Борисова В.О., Вишенський В.А., Вороний О.М., Ганюшкін О.Г., Добосевич М.С., Карташов М.В., Клурман О.О., Кукуш О.Г., Курченко О.О., Лейфура В.М., Михайловський В.І., Мітельман І.М., Нагорний В.Н., Некрашевич В.В., Панасенко О.Б., Плахотник В.В., Рабець К.В., Радченко В.М., Рубльов Б.В., Федак І.В., Шунда Н.М., Ясінський В.А. та ін. [1, 2, 3].

**Виклад основного матеріалу.** У шкільному курсі математики розв'язання задач зводиться до складання рівнянь чи їхніх систем, розв'язання отриманих рівнянь та аналізу отриманих результатів. Проте майже сто відсотків цих задач є визначеними; у таких задачах розв'язання зводиться до одного рівняння з однією невідомою чи системи двох рівнянь з двома невідомими або трьох рівнянь з трьома невідомими. У задачах шкільного курсу практично не зустрічаються невизначені системи рівнянь, у той час як на математичних турнірах часто зустрічаються задачі, які приводять до невизначених систем рівнянь. У даній статті ми акцентуємо увагу на застосуванні невизначених систем лінійних рівнянь до розв'язання нестандартних текстових задач практичного змісту, у тому числі задач на рух, спільну роботу та метричні співвідношення у трикутнику. Такі задачі є несподіваними для учнів, цікавими для вчителів та студентів педагогічних внз, а тому будуть корисними для усіх, хто цікавиться математикою. Розглянемо приклади таких задач.

**Задача 1**. Троє велосипедистів стартують одночасно та їдуть по сторонах $\Delta ABC$ у порядку: *AB, BC, CA*. Відомі їхні швидкості на кожному з відрізків *AB, BC, CA*: у першого вони відповідно 12, 16 та 12 км/год., у другого 18, 12 та 14 км/год.; у третього – 9, 15 та 15 км/год. Яким може бути значення кута *ABC*, якщо відомо, що вони прибули в точку *A* одночасно? Яка ділянка шляху *AB, BC* чи *CA* була найдовшою?

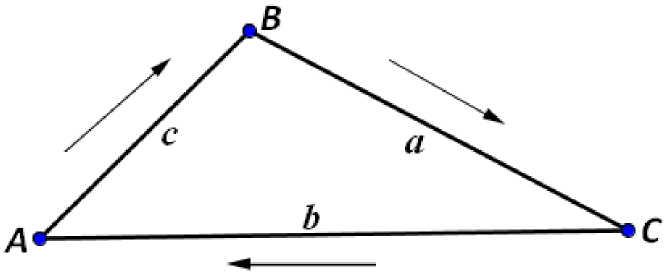


Рис. 1. Напрями переміщення велосипедистів.

Розв'язання. Позначимо через $a,b,c$ сторони $\Delta ABC$ у км, тоді час руху $t$ першого велосипедиста з урахуванням умови задачі $\frac{c}{12}+\frac{a}{16}+\frac{b}{12}=t$, час руху другого велосипедиста – $\frac{c}{18}+\frac{a}{12}+\frac{b}{14}=t$, третього – $\frac{c}{9}+\frac{a}{15}+\frac{b}{15}=t$. Маємо систему трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими: $\begin{cases}\frac{c}{12}+\frac{a}{16}+\frac{b}{12}=t,\\ \frac{c}{18}+\frac{a}{12}+\frac{b}{14}=t,\\ \frac{c}{9}+\frac{a}{15}+\frac{b}{15}=t.\end{cases}$ Виключимо невідому $t$, для чого віднімемо почленно рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{18}\right)c+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{12}\right)a+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\right)b=0,\\ \left(\frac{1}{12}-\frac{1}{9}\right)c+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{15}\right)a+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{15}\right)b=0,\\ \frac{c}{9}+\frac{a}{15}+\frac{b}{15}=t.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{36}c-\frac{1}{48}a+\frac{1}{84}b=0,\\ -\frac{1}{36}c-\frac{1}{240}a+\frac{1}{60}b=0,\\ \frac{c}{9}+\frac{a}{15}+\frac{b}{15}=t.\end{cases}$$

Виключимо невідому $c$, для чого додамо перші два рівняння та виразимо одну змінну через іншу: $-\frac{a}{40}+\frac{b}{35}=0 \Leftrightarrow a=\frac{8}{7}\cdot b$; тоді для невідомої $c$ з першого рівняння матимемо $c=36\cdot\left(\frac{a}{48}-\frac{b}{84}\right)=\frac{3}{4}a-\frac{3}{7}b=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{7}b-\frac{3}{7}b=\frac{3}{7}b$, а з останнього рівняння отримаємо вираз для $t=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{7}b+\frac{1}{15}\cdot\frac{8}{7}b+\frac{1}{15}\cdot b=\frac{4}{21}b$. Тобто сторони трикутника *ABC* пропорційні числам $a:b:c=\frac{8}{7}:1:\frac{3}{7}$, або $a:b:c=8:7:3$, тобто ділянка шляху $a=BC$ є найдовшою. Усі трикутники з такими сторонами є подібними, а тому за теоремою косинусів можемо визначити кут *ABC*: $\cos ABC=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 8}=\frac{9+64-49}{48}=\frac{24}{48}=\frac{1}{2} \Rightarrow \angle ABC=60^\circ$.

Відповідь: найдовшою була друга ділянка шляху (сторона *BC*), величина $\angle ABC=60^\circ$.

Зауважимо, що задача є невизначеною, тобто не на будь-які питання до цієї задачі можна дати відповідь, наприклад, на такі: Який час у дорозі провели спортсмени?, Яку відстань подолали велосипедисти? та ін., відповідь дати не можна. Проте, якщо додати які-небудь дані, наприклад, такі: середня за величиною ділянка дороги (сторона трикутника) дорівнює 7 км, задача стає визначеною, адже тоді $a=8,\ b=7,\ c=3$ (км), $t=\frac{4}{21}\cdot b=\frac{4}{3}$ (год.), увесь шлях 18 км.

**Задача 2**. П'ять бригад можуть виконувати певну роботу незалежно одна від одної та можуть працювати разом. Перша, друга, четверта і п'ята бригада, працюючи разом, можуть виконати поставлене завдання за 10 днів; друга, третя і п'ята – за 12 днів, а перша, третя і четверта – за 15 днів. За скільки часу виконають це завдання усі п'ять бригад, працюючи разом? За скільки часу виконає це завдання третя бригада? За скільки часу виконають це завдання перша і четверта бригади?

Розв'язання. Позначимо продуктивність праці кожної бригади через $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ (у частинах роботи за один день), а усю роботу приймемо за одиницю. Тоді умова задачі запишеться у вигляді системи трьох лінійних рівнянь із п'ятьома невідомими:

$$\begin{cases}(x_1+x_2+x_4+x_5)\cdot 10=1,\\(x_2+x_3+x_5)\cdot 12=1,\\(x_1+x_3+x_4)\cdot 15=1,\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}x_1+x_2+\phantom{x_3+{}}x_4+x_5={}^1\!/_{10},\\ \phantom{x_1+{}}x_2+x_3+\phantom{x_4+{}}x_5={}^1\!/_{12},\\ x_1+\phantom{x_2+{}}x_3+x_4\phantom{{}+x_5}={}^1\!/_{15}.\end{cases}$$

Для того, щоб дати відповідь на перше питання задачі, необхідно знайти продуктивність праці усіх п'яти бригад разом, тобто суму $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$. Уважний аналіз запису останньої системи дозволяє побачити, що кожна невідома зустрічається у запису рівно по два рази, а тому, додавши усі рівняння, отримаємо $2\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)={}^1\!/_{10}+{}^1\!/_{12}+{}^1\!/_{15}={}^1\!/_4$, звідки спільна продуктивність дорівнює

$1/8$, а тому час, необхідний для виконання завдання усім п'яти бригадам, дорівнює $1 : 1/8 = 8$ (днів). Перепишемо нашу систему, приєднавши до неї отримане рівняння-наслідок щодо спільної продуктивності та проаналізуємо, як дати відповідь на два інших питання задачі: перше рівняння не містить невідомої $x_3$, а тому віднявши від четвертого рівняння перше, отримаємо значення змінної $x_3$. Друге рівняння не містить $x_1$ і $x_4$, а тому виконаємо аналогічні дії та віднімемо від четвертого рівняння друге:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1/10, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 1/12, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1/15, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1/8 - 1/10 = 1/40, \\ x_1 + x_4 = 1/8 - 1/12 = 1/24, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1/15, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1/8. \end{cases}$$

Зауважимо, що останню задачу можна було реалізувати і інакше, а саме від третього рівняння відняти отримане значення для невідомої $x_3$. Отже, третя бригада, працюючи самостійно, виконає завдання за $1 : 1/40 = 40$ (днів), а перша і четверта бригади – за 24 дні.

Відповідь: усі п'ять бригад, працюючи разом, виконають завдання за 8 днів; третя бригада, працюючи самостійно, виконає завдання за 40 днів, а перша і четверта бригади – за 24 дні.

Для того, щоб дати відповіді на питання задачі, нам не прийшлося шукати загальний вектор-розв'язок невизначеної системи лінійних рівнянь, проте якщо розв'язати систему яким-небудь методом, наприклад, методом Гаусса, отримаємо, що $x_1 = \frac{1}{24} - x_4$, $x_2 = \frac{7}{120} - x_5$, $x_3 = \frac{1}{40}$, а $x_4$, $x_5$ набувають довільних значень. З умови задачі випливає, що усі значення невідомих є додатними, тому якщо $x_4 \in \left(0; 1/24\right)$, $x_5 \in \left(0; 7/120\right)$, усі умови задачі будуть виконуватися. Така перевірка гарантує коректність умови задачі, тобто показує, що існують додатні розв'язки цієї системи.

Зауважимо, що психологічно школярам дуже важко розв'язувати системи рівнянь з багатьма невідомими, крім того, значні труднощі виникають у розв'язанні саме через невизначеність систем рівнянь.

Наведемо приклад задачі, розв'язання якої приводить до розв'язання невизначеної системи трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими та дозволяє уникнути розв'язання четвертого нелінійного рівняння.

**Задача 3**. Усередині трикутника *ABC* вибрані три точки *K*, *L*, *M* так, що відстані від точки *K* до сторін трикутника дорівнюють 5 см, 20 см і 23 см, від точки *L*, відповідно, – 7 см, 17 см і 25 см, від точки *M*, відповідно, – 8 см, 3 см і 44 см. Знайдіть: а) радіус кола, вписаного у $\Delta ABC$; б) сторони і площу $\Delta ABC$.

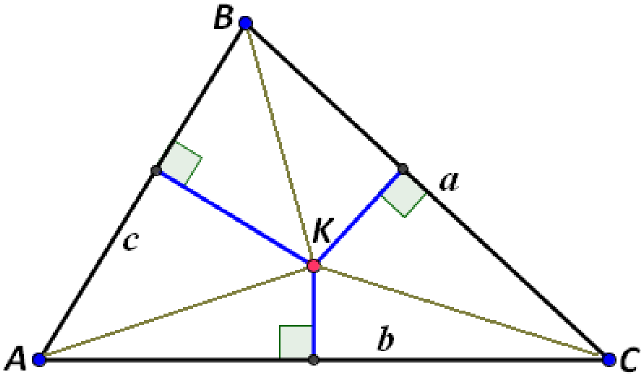


Рис. 2. Геометрична інтерпретація умови задачі.

Розв'язання. З'єднаємо точку *K* з вершинами трикутника *ABC* (див. рис. 2), площа $\Delta ABC$ дорівнює сумі площ трьох трикутників, які утворилися. З урахуванням умови задачі отримаємо: $5a+20b+23c=2S$, де $a,b,c$ – сторони $\Delta ABC$. Аналогічні рівності запишемо і для двох інших точок *L* і *M*, отримаємо $7a+17b+25c=2S$, $8a+3b+44c=2S$. Маємо систему трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими $a,b,c,S$: $\begin{cases}5a+20b+23c=2S,\\ 7a+17b+25c=2S,\\ 8a+3b+44c=2S,\end{cases}$ проте нам відоме ще одне співвідношення між цими невідомими – формула Герона (нелінійне рівняння). Виразимо усі невідомі через одну, для чого прирівняємо ліві частини:

$$\begin{cases}5a+20b+23c=7a+17b+25c,\\ 5a+20b+23c=8a+3b+44c,\\ 8a+3b+44c=2S,\end{cases} \text{ або } \begin{cases}2a-3b+2c=0, & \big|\cdot(-3)\\ 3a-17b+21c=0, & \big|\cdot 2\\ S=4a+1{,}5b+22c,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-25b+36c=0,\\ a=\dfrac{3b-2c}{2},\\ S=4a+1{,}5b+22c.\end{cases}$$

З першого рівняння виразимо $b=\dfrac{36}{25}c$, підставимо у друге та третє рівняння, спростимо, матимемо $a=\dfrac{29}{25}c$, $S=\dfrac{144}{5}c$. Тепер можемо порахувати півпериметр $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{29}{25}+\dfrac{36}{25}+1\right)\cdot c=\dfrac{9}{5}c$ та дати відповідь на перше питання задачі – знайти радіус вписаного у $\Delta ABC$ кола: $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{144c}{5}:\dfrac{9c}{5}=16$ см.

Для того, щоб дати відповідь на друге питання, можна записати формулу Герона для площі трикутника за трьома сторонами і підставити усі знайдені нами елементи, отримаємо рівняння з однією змінною від $c$ (алгебраїчний спосіб), а можна розглянути наступну геометричну ілюстрацію до задачі: є трикутник, у якого три сторони відносяться $a:b:c=\dfrac{29}{25}:\dfrac{36}{25}:1$; усі трикутники з такими сторонами подібні між собою, а тому можна знайти площу одного з них, наприклад, зі сторонами 29, 36, 25 см (для нього півпериметр $p=45$ см, площа $S=360$ см$^2$, а тому радіус вписаного кола $r=8$ см). Оскільки для даного в умові задачі трикутника радіус вписаного кола дорівнює 16 см, то коефіцієнт подібності дорівнює двом, а тому сторони даного в умові задачі трикутника є удвічі більшими, тобто 58, 72, 50 см, а площа – у 4 рази більша, тобто 360·4=1440 см$^2$.

Відповідь: $r = 16$ см, $a = 58$ см, $b = 72$ см, $c = 50$ см, $S = 1440$ см$^2$.

**Висновки**. У даній роботі розглядалися різні способи розв'язування конкурсних текстових задач, які використовувалися при роботі з обдарованими учнями під час підготовки до математичних турнірів. Розв'язування таких задач оправдане перш за все тим, що сприяє досягненню однієї з найважливіших цілей викладання математики в школі – розвитку творчих здібностей учнів, підвищенню рівня їх логічного, а отже, й загального розвитку.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Київські міські математичні олімпіади. 2003–2011 роки /А.В. Анікушин, О.О. Клурман, Г.В. Крюкова та ін. за ред.. Б.В. Рубльова. – Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.

2. В.А. Ясінський. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.

3. Контрольні завдання ІІІ етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2016 році. – Ч. 1. – 278 с. / режим доступу http://man.gov.ua/files/49/Kontr_zavd_2016_I.pdf

**L.V. Iziumchenko**
Central Ukrainian State Pedagogical University named after Volodymyr Vynnychenko

**UNDEFINED SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN COMPETITION WORD PROBLEMS**

*The article deals with the problems of one of the topics of mathematical competition for pupils; it describes the competition word problems for motion, joint work and metric relations in a triangle, the mathematical model of which are undefined systems of linear equations; on top of that the solution of these problems is given and the conditions, under which the problems become defined, are analyzed; each task is provided with several questions-problems, the possibility of a joint answer to each of the questions is analyzed; the correctness of the problem conditions is evaluated and the obtained results are verified; for geometric undefined tasks, the similarity of all interpretations is proven; the positive influence of the applied methods of problem solving on raising the educational level of pupils was noted.*

***Keywords:*** *systems of linear equations, undefined systems of linear equations, general vector-solution, Gauss method, motion problems, joint work problems, metric relations in a triangle.*

**Л.В. Изюмченко**
Центральноукраинский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко

**НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕКСТОВЫХ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧАХ**

*В статье рассмотрены задачи одной из тем математических олимпиад школьников; описаны текстовые конкурсные задачи на движение, совместную работу и метрические соотношения в треугольнике, математической моделью которых являются неопределенные системы линейных уравнений; приведены решения этих задач, проанализированы условия, при которых задачи становятся определенными; к каждой задаче приводятся по несколько вопросов-задач и анализируется возможность единственного ответа на каждый из вопросов; оценивается корректность условий задачи и выполняется проверка полученных результатов; в геометрических неопределенных задачах обосновано подобие всех интерпретаций; отмечено положительное влияние применяемых способов решения задач на повышение образовательного уровня школьников.*

***Ключевые слова:*** *системы линейных уравнений, неопределенные системы линейных уравнений, общий вектор-решение, метод Гаусса, задачи на движение, совместную работу, метрические соотношения в треугольнике.*

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

**Ізюмченко Людмила** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики ЦДПУ імені В. Винниченка

*Коло наукових інтересів:* олімпіадні задачі, особливості роботи з обдарованими дітьми, методика навчання алгебри і геометрії.