І. ПРОБЛЕМИ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

УДК 519.115+372.851

Ю.І. Волков, Н.М. Войналович

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

ГЕНЕРАТРИСИ ЯК ОСНОВНИЙ ЗАСІБ ПЕРЕЛІЧУВАЛЬНОЇ КОМБІНАТОРИКИ

Ми пропонуємо один з можливих варіантів викладання теорії генератрис і показуємо (на конкретних прикладах) як це можна застосувати для розв'язування різноманітних проблем дискретної математики.

Ключові слова: *генератриса, рекурентності, степеневі ряди.*

Постановка проблеми. Проблема розробки методики навчання перелічувальної комбінаторики (основного розділу дискретної математики) завжди заслуговує особливої уваги (цим питанням, в певній мірі, були присвячені роботи авторів цієї статті, див. [1], [2]), головним об'єктом тут є генератриса: про техологію її застосування йтиме мова в цій роботі.

Аналіз раніше опублікованих праць. В 17-18 століттях виникає диференціальне й інтегральне числення (Ньютон, Лейбніц), з'явиляються степеневі ряди (Маклорен, Тейлор) і вже тоді вони почали застосовуватись для розв'язування задач дискретної математики.

Повчальним є приклад задачі, яку сформулював і розв'язав Леонард Ейлер: скількома способами можна подати довільне натуральне число у вигляді суми різних натуральних степенів 2. Він розглядає нескінченний добуток $G(z)=(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots$. Показує: $G(z)=\dfrac{1}{1-z}=1+z+\cdots+z^n+\cdots$, а звідси вже випливає, що коефіцієнт при z^n в цьому розкладі (це 1) і буде відповіддю на поставлене Ейлером питання. Функція $G(z)$ є одним з перших прикладів генератриси.

В 18-19 століттях метод генератрис розвиває Лаплас в своїй праці «Аналитическая теория вероятностей» (Theorie analytique des probabilities, 1812).

Сучасний підхід до генератрис, як формальних степеневих рядів, належить Беллу (Bell E.T., [3]), а значного поширення метод генератрис набув після появи в 1958 році прекрасної мнографії Дж. Ріордана (John Rsordan) "An Introduction to Combinatorial Analysis" [4].

Пізніше з'явився цілий ряд книг з комбінаторики, в кожній з яких належне місце займає метод генератрис (див., наприклад, [5] − [8]).

Виклад основного матеріалу. Генератриси це той міцний місток, який поєднує дискретну і неперервну математику і часто ефективно застосовується для

(1) знаходження точних формул для членів послідовностей,

(2) знаходження рекурентних співвідношень,

(3) знаходження числових характеристик ймовірнісних розподілів,

(4) знаходження асимптотичних формул для членів послідовностей з великими номерами,

(5) доведення унімодальності, опуклості досліджуваних послідовностей,

(6) доведення тотожностей,

(7) знаходження скінченних сум,

та інше.

Ціль роботи: на конкретних прикладах продемонструвати методику застосування генератрис для розв'язування деяких, з вказаних вище, задач.

Означення. *Генератрсою послідовності*

$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ (1)

називається сума ряду

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (2)$$

Перехід від послідовності (1) до функції $A(z)$ записуватимо так

$$\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z).$$

(Символ *ogf* походить від англомовного терміну *ordinary generating function*).

Приклад 1. Генератрисою послідовності

$a_n = 1, n = 0, 1, \cdots$

буде функція

$$A(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z},$$

коротко: $\{1\} \xleftrightarrow{ogj} \dfrac{1}{1-z}$

Приклад 2. Функція $A(z) = \exp z$ є генератрисою послідовності

$1, 1, 1/2!, 1/3!, \cdots, 1/n!, \cdots$

Отже, $\{1/n!\} \xleftrightarrow{ogf} \exp z$.

Приклад 3. Функція $(1+z)^r, r \in Z,$ генератриса послідовності

$$\left\{ \binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} \right\}.$$

З теорії степеневих рядів випливає: якщо функція $A(z)$ аналітична, то вона генератриса послідовності $a_n = A^{(n)}(0)/n!, n = 0, 1, 2, \dots$, наприклад,

$$\cos z \xleftrightarrow{ogf} \{1, 0, -1/2!, 0, 1/4!, 0, \dots .$$

Перехід від послідовності (1) до функції $A(z)$ часто називають z-перетворенням послідовності (1).

Примітка. Для роботи з генератрисами можна використовувати який-небудь математичний пакет, наприклад, "Mathematica 6". Так для отримання генератриси послідовності $\{a_n\}$ використовується функція:

ZTransform[*a*ₙ, *n*, 1/z], а для знаходження послідовності за заданою генератрисою *A*(*z*) використовується функція:

InverseZTransform[*A(1/z), z, n*].

Нариклад, ZTransform[n,n,1/z] z/(-1+z)^2 , ZTransform[n^2,n,1/z] -((z (1+z))/(-1+z)^3), ZTransform[n^3,n,1/z] (z (1+4 z+z^2))/(-1+z), ZTransform[n^4,n,1/z] -((z ((1+z) (1+10 z+z^2)))/(-1+z)^5).

Властивості z-перетворення

1. *Якщо* $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$, то $\{ca_n\} \xleftrightarrow{ogf} cA(z)$, *де* c *довільна стала.*

2. *Якщо* $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$, $\{b_n\} \xleftrightarrow{ogf} B(z)$, *то* $\{a_n + b_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z) + B(z)$.

3. *Якщо* $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$ *і* α *довільне число, то* $\{\alpha^n a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(\alpha z)$.

Справді, $\{\alpha^n a_n\} \xleftrightarrow{ogf} a_0 + a_1(\alpha z) + a_2(\alpha z)^2 + \cdots + a_n(\alpha z)^n + \cdots = A(\alpha z)$.

Наприклад, якщо $a_n = 1$, то $\{\alpha^n\} \xleftrightarrow{ogf} \dfrac{1}{1-\alpha z}$.

Далі, якщо при перетвореннях послідовності з'являтимуться члени послідовності з від'ємними індексами, то їх вважатимемо рівними нулю.

4. Нехай $a_0 = a_1 = \cdots = a_{r-1} = 0,$ і для $s \ge r$ $a_{s+1} = a_{s+2} = \cdots = 0$. Тоді $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z) = a_r z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \cdots + a_s z^s$.

5. Теорема запізнення.

Якщо $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$, *то* $\{a_{n-k}\} \xleftrightarrow{ogf} z^k A(z)$.

6. Теорема упередження.

Якщо $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$, *то* $\{a_{n+k}\} \xleftrightarrow{ogf} \dfrac{A(z) - a_0 - a_1 z - \cdots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k}$.

7. Теорема про диференціювання генератриси.

Якщо $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$, *то* $A'(z) \xleftrightarrow{ogf} \{(n+1)a_{n+1}\}$.

Наслідок. *Якщо* $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$, *то* $\{na_n\} \xleftrightarrow{ogf} zA'(z)$.

Наприклад,

$$\{n\} \xleftrightarrow{ogf} z(1/(1-z))' = \frac{z}{(1-z)^2},$$

$$\{n^2\} \xleftrightarrow{ogf} z\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)' = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3},$$

$$\{n^3\} \xleftrightarrow{ogf} z\left(\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}\right)' = \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4}.$$

8. Теорема про інтегрування генератриси.

Якщо $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$, *то* $\int\limits_0^z A(x)dx \xleftrightarrow{ogf} \frac{a_{n-1}}{n}$.

9. Теорема про генератрису різниці.

Якщо $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$, *то* $\{\Delta a_n = a_{n+1} - a_n\} \xleftrightarrow{ogf} \frac{(1-z)A(z) - a_0}{z}$.

10. Теорема про генератрису суми.

Якщо $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$, *то* $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right\} \xleftrightarrow{ogf} \frac{A(z)}{1-z}$.

Доведення. Позначимо через $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Тоді $a_n = s_n - s_{n-1}$. Звідси, в силу теореми запізнення, $A(z) = S(z) - zS(z)$, а звідси $S(z) = \frac{A(z)}{1-z}$.

11. *Нехай* $m \in \mathrm{N}, z_0 \neq 0$. *Тоді* $\frac{1}{(z-z_0)^m} \xleftrightarrow{ogf} \left\{(-1)^m z_0^{-m-n} \binom{n+m-1}{m-1}\right\}$.

Доведення.

$$(z-z_0)^{-m} = (-z_0)^{-m}(1 - z/z_0)^{-m} = (-z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} (-z/z_0)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} (-1)^m (-z_0)^{-m-n} z^n.$$

Наслідок. *Нехай* $k \in \mathrm{N}$. *Тоді*

$$\frac{z^k}{(z-z_0)^m} \xleftrightarrow{ogf} \left\{(-1)^m z_0^{-m-n+k} \binom{n+m-k-1}{m-1}\right\}$$

Випливає з теореми про упередження.

12. Теорема про згортку.

Якщо $\{a_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)$, $\{b_n\} \xleftrightarrow{ogf} B(z)$, *то*

$$A(z)B(z) \xleftrightarrow{ogf} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 .$$

Сума $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ *називається згорткою послідовностей* $\{a_n\}$ *і* $\{b_n\}$ *і позначається символом* $\{a_n * b_n\}$. Отже, $\{a_n * b_n\} \xleftrightarrow{ogf} A(z)B(z)$.

Наприклад, генератриса згортки одиничної послідовності з послідовністю $\{a_n\}$ буде функція $\frac{A(z)}{1-z}$. Таким чином, $s_n = \{a_n * 1\} = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\} \xleftrightarrow{ogf} \frac{A(z)}{1-z}$ і, отже, знову отримали результат теореми про генератрису суми.

Приклад . Знайти $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. $\{s_n\} \xleftrightarrow{ogf} \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^5}$.

Скориставшись наслідком з властивості 11, матимемо

$$\frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^5} = \frac{z}{(1-z)^5} + \frac{4z^2}{(1-z)^5} + \frac{z^3}{(1-z)^5} \xleftrightarrow{ogf}$$

$$\{\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24} + \frac{4(n+2)(n+1)n(n-1)}{24} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}\}.$$

Звідси $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{24}$.

Далі для спрощення записів фігурні дужки часто пропускатимемо.

Дробово-раціональні генератриси

Теорема. *Нехай* $r\exp(i\varphi)$ *комплексний нуль тричлена* $z^2 + pz + q$. *Тоді має місце співвідношення:*

$$\frac{az+b}{z^2+pz+q} \xleftrightarrow{ogf} r^{-n-2}\left(b\cos n\varphi + \frac{ar+b\cos\varphi}{\sin\varphi}\sin n\varphi\right). \quad (1)$$

Доведення. Знайдемо генератрису послідовності з правої частини (1). Матимемо, використовуючи формули Ейлера:

$$r^{-n-2}\left(b\cos n\varphi + \frac{ar+b\cos\varphi}{\sin\varphi}\sin n\varphi\right) =$$

$$r^{-n-2}\left(\frac{b}{2}(\exp(in\varphi)+\exp(-in\varphi)) + \frac{ar+b\cos\varphi}{2i\sin\varphi}(\exp(in\varphi)-\exp(-in\varphi))\right) =$$

$$\frac{b}{2}r^{-2}(r^{-1}e^{i\varphi})^n + \frac{b}{2}r^{-2}(r^{-1}e^{-i\varphi})^n + \frac{ar+b\cos\varphi}{2i\sin\varphi}r^{-2}(r^{-1}e^{i\varphi})^n -$$

$$\frac{ar+b\cos\varphi}{2i\sin\varphi}r^{-2}(r^{-1}e^{-i\varphi})^n \xleftrightarrow{ogf} \frac{b}{2}r^{-2}\left(\frac{1}{1-r^{-1}e^{i\varphi}z} + \frac{1}{1-r^{-1}e^{-i\varphi}z}\right) +$$

$$\frac{ar+b\cos\varphi}{2i\sin\varphi}r^{-2}\left(\frac{1}{1-r^{-1}e^{i\varphi}z} - \frac{1}{1-r^{-1}e^{-i\varphi}z}\right) =$$

$$br^{-2}\left(\frac{1-r^{-1}z\cos\varphi}{1-2r^{-1}z\cos\varphi+r^{-2}z^2}\right) + \frac{ar+b\cos\varphi}{\sin\varphi}r^{-2}\left(\frac{r^{-1}z\sin\varphi}{1-2r^{-1}z\cos\varphi+r^{-2}z^2}\right) =$$

$$\frac{r^{-2}}{1-2r^{-1}z\cos\varphi+r^{-2}z^2}\left(\left(b-br^{-1}z\cos\varphi\right)+(az+br^{-1}z\cos\varphi)\right)=$$

$$\frac{r^{-2}(az+b)}{1-2r^{-1}z\cos\varphi+r^{-2}z^2}=\frac{az+b}{r^2-2rz\cos\varphi+z^2}.$$

Далі, згідно умови теореми, числа $re^{i\varphi}$ і $re^{-i\varphi}$ нулі функції z^2+pz+q. Тому

$$z^2+pz+q=(z-re^{i\varphi})((z-re^{-i\varphi})=z^2-rz(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})+r^2=r^2-2rz\cos\varphi+z^2$$

. Це і доводить твердження теореми.

Наслідок. *Нехай* $a=0, b=1$. *Тоді*

$$\frac{1}{z^2+pz+q}\xleftrightarrow{ogf} r^{-n-2}\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Приклад 1. $\frac{3z+2}{z^2-2z+2}\xleftrightarrow{ogf}\frac{1}{2(\sqrt{2})^{n+2}}\left(2\cos\frac{n\pi}{4}+8\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

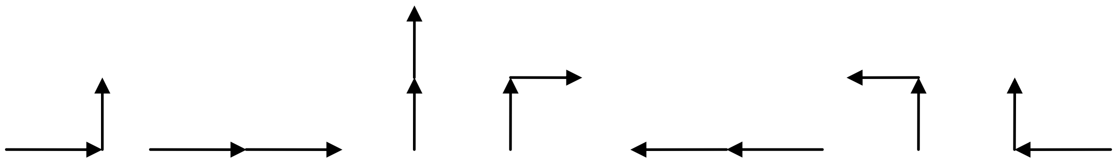
Приклад 2. Для якої послідовності функція $\frac{1}{z^3-2z+4}$ генератриса?

$$\frac{1}{z^3-2z+4}=\frac{1}{10}\left(\frac{4-z}{z^2-2z+2}+\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{10}\left(\frac{4-z}{z^2-2\sqrt{2}z\cos\frac{\pi}{4}+2}+\frac{1}{2(1+z/2)}\right)$$

$$\xleftrightarrow{ogf}\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2(\sqrt{2})^n}(4\cos n\pi/4+2\sin n\pi/4)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n\right).$$

Приклад 3. Знайти кількість різних шляхів без самоперетинів і які складаються з n стрілочок (зліва направо, справа наліво, знизу вгору).

Наприклад, для n=2 є 7 таких шляхів, як це показано на малюнку.



Позначимо стрілочку зліва направо цифрою 1, справа наліво – цифрою 2, знизу вгору цифрою 3. Тоді кожному шляху можна поставити у відповідність n-значне число, для запису яких використовуються тільки цифри 1, 2, 3, при цьому в такому запису будуть відсутні пари 12 і 21 і , отже, задача зводиться до знаходження кількості таких чисел.

Нехай a_n шукана кількість. Тоді $a_1=3, a_2=7$ і будемо вважати, що $a_0=1$. Розглянемо множину всіх (n+2)-значних чисел і цю множину подамо у вигляді об'єднання таких підмножин, які не перетинаються: до першої підмножини віднесемо всі числа, які закінчуються цифрою 3, їх буде a_{n+1}. До другої підмножини віднесемо всі числа, які закінчуються парами 11, 22, 31, їх буде також a_{n+1}, бо якщо будувати з таких чисел (n+3)-

значні, то вони можуть закінчуватись тільки цифрою 3. До третьої підмножини віднесемо всі числа, які закінчуються парою 32 (якщо додати цифру 3, отримаємо (n+3)-значне число з другої підмножини) , їх буде a_n.

За правилом суми отримаємо співвідношення: $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 3$. Якщо через $A(z)$ позначити генератрису послідовності a_n, то використовуючи теорему упередження, матимемо для генератриси рівняння: $\frac{A(z) - 1 - 3z}{z^2} = \frac{2A(z) - 2}{z} + A(z)$.

Звідси

$$A(z) = \frac{1+z}{1-2z-z^2} = -\frac{1+z}{(z+1-\sqrt{2})(z+1+\sqrt{2})} = \frac{1/2}{z+1+\sqrt{2}} - \frac{1/2}{z+1-\sqrt{2}}.$$

$$A(z) \xleftrightarrow{ogf} -\frac{1/2}{(-1-\sqrt{2})^{n+1}} + \frac{1/2}{(-1+\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left((1-\sqrt{2}\right)^{n+1}.$$

Таким чином $a_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left((1-\sqrt{2}\right)^{n+1}$

Приклад 4. Знайти кількість всіх n-значних чисел для запису яких використовуються тільки цифри 1,2, 3, 4 і серед їх запису відсутні числа з парами 12.

Нехай a_n шукана кількість. Тоді $a_1 = 4$ і будемо вважати, що $a_0 = 1$. Розглянемо множину всіх (n+2)-значних чисел і цю множину подамо у вигляді об'єднання таких підмножин, які не перетинаються: до першої підмножини віднесемо всі числа, які закінчуються цифрою 3, їх буде a_{n+1}; до другої підмножини віднесемо всі числа, які закінчуються цифрою 4, їх буде a_{n+1}; до третьої підмножини віднесемо всі числа, які закінчуються парами 11, 22, їх буде $2a_n$; до четвертої підмножини віднесемо всі числа, які закінчуються парами 21, 31, 32, 41, 42, їх буде a_{n+1}, бо якщо будувати з таких чисел (n+3)-значні, то вони можуть закінчуватись тільки або цифрою 3, або 4; їх буде a_{n+1} (якщо додавати до таких пар цифри 1, або 2, то отримуватимемо (n+3)-значні числа з третьої підмножини).

За правилом суми отримаємо співвідношення: $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 4$. Якщо через $A(z)$ позначити генератрису послідовності a_n, то використовуючи теорему упередження, матимемо для генератриси рівняння: $\frac{A(z) - 1 - 4z}{z^2} = \frac{3A(z) - 3}{z} + 2A(z)$.

Звідси

$$A(z) = \frac{1+z}{1-3z-2z^2} = \frac{(1+z)/2}{\left(\frac{\sqrt{17}-3}{4} - z\right)\left(\frac{\sqrt{17}+3}{4} + z\right)} =$$

$$\frac{2(1+\sqrt{17})}{\sqrt{17}(-3+\sqrt{17}-4z)} + \frac{2(1-\sqrt{17})}{\sqrt{17}(3+\sqrt{17}-4z)} \xleftrightarrow{ogf}$$

$$a_n = \frac{5+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n - \frac{5-\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

Приклад 5. Знайти кількість композицій натурального числа a рівно з n частинами, кожна з яких не перевищує натуральне число q.

Генератрисою кількості таких композицій натуральних чисел є функція

$$G(z) = (z + z^2 + \cdots + z^q)^n = z^n \left(\frac{1-z^q}{1-q}\right)^n = z^n (1-z^q)^n (1-z)^{-n} =$$

$$z^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} z^{qi} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{\mathrm{n}-1} z^k .$$

Звідси випливає, що число шуканих композицій буде коефіцієнтом при z^a в отриманому виразі, а це буде така сума

$$\sum_{qi+k=a-n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{n+k-1}{n-1} = \sum_{i=0}^{[(a-n)/q]} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{a-qi-1}{n-1}.$$

Висновки. На конкретніх прикладах була проіллюстрована методика застосування генератрис для розв'язування різноманітних задач дискретної математики. Ми обмежились звичайними генератрисами і не розглянули інший вид генератрис – експоненційні генератриси, властивості і застосування яких можна отримати за розглянутою схемою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Войналович Н.М. Як розв'язувати перелічувальні задачі комбінаторики/ Войналович Н.М. // Наукові записки. Серія: Математичні науки. −2009. −Вип. 68. −С.20-26. − (КДПУ ім. В.Винниченка).
2. Войналович Н.М. Про методи підрахунку комбінаторних об'єктів/ Войналович Н.М., Волков Ю.І.// Наукові записки. − Вппуск 10 Серія:Проблеми методики фізико- матеатичної і технологічної освіти, частина 1, − 2016. − С. 21-28.
3. Bell E.T. Euler algebra/ Bell E.T.//Trans.Amer.Soc.,25, − 1923. p.135-154.
4. Riordan J. An introduction to combinatorial analysis/ Riordan J. − New York− John Wiley & Sons 1958. −290.
5. Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applicayions / Rosen, Kenneth H. −New York: McGraw-Hill, −2012. −1071 p.
6. Richard P. Stanley. Enumerative combinatorics/R.Staley –Wardsworth, Inc. California, −1986. – 449 p.
7. Єжов І.І. Елементи комбінаторики / Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й.− Київ Вища школа, − 1972.−84 с.
8. Ядренко М.Й. Дискретна математика/ Ядренко М.Й. − Київ: ТВіМС, −2004. − 245 с.

Yrii Volkov, Nataliya Vojnalovich

Volodymyr Vynychenko Central Ukrainian State Pedagogical University

GENERATION FUNCTION AS BASIC THE WAY OF ENUMERATIVE COMBINATORICS

We suggest one possible variant of teaching of the theory the geneating function and show (on the concrete example) how it can be applied to solving the different problem of discrete mathematics.

Keywords: *recurrences, generating functio, power series.*

Ю.И. Волков, Н.М. Войналович
Центральноукраинский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ КАК ОСНОВНОЕ СРЕДСТВО ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНОЙ КОМБИНАТОРИКИ

Мы предлагаем один из возможных вариантов изложения теории производящих функций и показываем как это (на конкретных примерах) можно применять для решения различных проблем дискретной математики.

Ключевые слова: *рекуррентности, производящая функция, степенные ряды.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Войналович Наталія Михайлівна – доцент кафедри математики, доцент, кандидат педагогічних наук.

Коло наукових інтересів: методика навчання математики, дискретна математика.

Волков Юрій Іванович – професор кафедри математики, професор, доктор фізико-математичних наук.

Коло наукових інтересів: математичний аналіз, теорія ймовірностей і математична статистика, дискретна математика.

УДК 373.51

О.М. Вороний
Центральноукраїнський педагогічний університет імені Володимира Винниченка

ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Методом доцільних задач описано основні способи розв'язування діофантових рівнянь, які доступні учням загальноосвітніх шкіл. Добірку задач зроблено із завдань Всеукраїнських олімпіад юних математиків та завдань контрольних робіт учнівської Малої Академії Наук.

Ключові слова: *Діофант, учні, рівняння, розв'язок, цілі числа, спосіб, множники, локалізація.*

Постановка проблеми. Діофантовими рівняннями називають алгебраїчні рівняння або систему алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами, тобто рівняння

$$P(x, y, \ldots, z) = 0,$$

де $P(x, y, \ldots, z)$ многочлен n-го степеня; розв'язки діофантових рівнянь шукають на множині цілих або раціональних чисел.

Основна мета. Передбачається, що діофантові рівняння мають невідомих більше, ніж рівнянь.

Аналіз раніше виконаних праць. Розв'язування діофантових рівнянь – одна з найдавніших математичних задач. Однак, незважаючи на те, що систематичне вивчення таких рівнянь започатковане давньогрецьким математиком Діофантом ще в третьому столітті, теорія найпростіших рівнянь – рівнянь першого степеня $ax + by = c$ була завершена тільки на початку XVII століття. Повна теорія рівнянь другого степеня $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ була створена спільними зусиллями багатьох математиків і підсумована до початку XIX століття видатним німецьким математиком К. Гаусом. Важливих успіхів у дослідженні діофантових рівнянь вищих степенів було досягнуто лише на початку XX століття.