таких стран, как: Франция, Чехия, Испания, США, Индия, Казахстан, Австралия, Китай, Сингапур, Бразилия, Израиль, Великобритания. Приведены примеры использования существующих облачных образовательных сервисов и примеры создания собственных облако ориентированных учебных сред в различных странах. Рассмотрены труды выдающихся профессоров зарубежья, которые приводят и описывают собственный опыт создания и использования облако ориентированной учебной среды как в высшей, так и в общеобразовательной школе. Проанализирован опыт использования облачных продуктов Microsoft Office365, Microsoft Live @ edu, а также IBM Cloud Academy в зарубежных высших учебных заведениях.

***Ключевые слова**: информационно-коммуникационные технологии, облако, облачные вычисления, облачные технологии, облачные сервисы, электронное обучение, STEM-образование, облако ориентированная учебная среда.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Вакалюк Тетяна Анатоліївна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та інформатики Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Коло наукових інтересів: використання хмарних технологій у навчальному процесі вищої школи.

УДК 514.11: 373.1.013

Л.В. Ізюмченко

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

СТЕРЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА МАТЕМАТИЧНИХ КОНКУРСАХ ТА СПОСОБИ ЇХНЬОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

У статті розглянуто розв'язання двох конкурсних стереометричних задач на відшукання відношення відрізків; наведено п'ять різних способів розв'язування однієї геометричної задачі, описано використання векторної алгебри і методу координат та їхнього поєднання; висвітлено метод перетворень, у тому числі паралельного перенесення і гомотетії, представлено детальний аналіз достатності застосовуваних перетворень; розглянуто метод додаткових побудов та використано подібність досліджуваних об'єктів; застосовано методи побудови перерізів многогранників, у тому числі метод слідів і метод внутрішнього проектування, з подальшим використанням подібності об'єктів чи елементів аналітичної геометрії; розглянуто штучний спосіб розв'язання як геометрична підтримка алгебраїчному способові розв'язання задачі; також у статті розглянута стереометрична задача, у розв'язанні якої використано двовимірні моделі, у тому числі координатно-векторний метод на площині; відмічено позитивний вплив застосовуваних способів розв'язання задач на підвищення освітнього рівня школярів.

***Ключові слова**: метод геометричних перетворень, гомотетія, метод внутрішнього проектування, метод слідів, метод координат, векторний спосіб розв'язування задач.*

Постановка проблеми. Зміни в житті суспільства приводять до зміни пріоритетів шкільної освіти, які проявляються у підвищенні уваги до розвитку особистості учня, його свідомості, творчих здібностей і культури мислення. Науково-дослідницька робота школярів у МАН, участь у предметних олімпіадах, у роботі ЗФМШ, фахового факультативу чи гуртка – дієвий засіб формування стійкої позитивної мотивації до навчання, підвищення пізнавальної активності учнів, поглиблення і розширення знань школярів з предмету. Особлива роль у математичній підготовці школяра відводиться розв'язуванню задач, у тому числі нестандартних. На відміну від тренувальних вправ для творчих завдань немає готового алгоритму розв'язання, такі завдання викликають великі труднощі не лише у школярів та студентів, а й у досвідчених вчителів, оскільки як правило потребують застосування деяких спеціальних методів чи відомих фактів у незнайомих ситуаціях.

У даній статті ми акцентуємо увагу на одному з методів розв'язання різних стереометричних олімпіадних задач та різних методах розв'язання однієї і тієї ж задачі, оскільки вважаємо, що такі симетричні прийоми якнайкраще сприяють критичності мислення, інтелектуальному розвитку та підвищенню освітнього рівня учнів.

Аналіз раніше виконаних досліджень. Формування творчої особистості школяра, розвиток творчого мислення учня, наступність у процесі навчання та професійну спрямованість навчання математики досліджували Бевз Г.П., Бурда М.І., Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я., Скафа О.І., Слєпкань З.І., Тарасенкова Н.А., Хмара Т.М., Чашечникова О.С., Швець В.О. та ін. Системний підхід в організації розв'язування нестандартних та олімпіадних задач досліджували Борисова В.О., Вишенський В.А., Вороний О.М., Ганюшкін О.Г., Добосевич М.С., Карташов М.В., Курченко О.О., Лейфура В.М., Мітельман І.М., Михайловський В.І., Нагорний В.Н., Некрашевич В.В., Панасенко О.Б., Плахотник В.В., Рабець К.В., Радченко В.М., Рубльов Б.В., Теплінський О.Ю., Федак І.В., Шунда Н.М., Ясінський В.А. та ін. Дослідження геометричної складової у системі математичної освіти знаходимо у Бевз В.Г., Зеленяка О.П., Владімірової Н.Г., Коломієць О.М., Матяш О.І., Працьовитого М.В., Швеця В.О., Ясінського В.А. та ін., вивчення координатного методу та векторної алгебри – у Апостолової Г.В., Бунєєвої Н.А., Зеленяка О.П., Ізюмченко Л.В., Осадчої Р.В., Ясінського В.А., Ясінського В.В. та ін. [1,2,3,4].

Виклад основного матеріалу. Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених розв'язуванню конкурсних геометричних задач, проблема використання векторної алгебри і методу координат до розв'язування стереометричних задач висвітлена недостатньо. Ми розглядаємо сьогодні різні аспекти розв'язування конкурсних геометричних задач, які є актуальними на цей час і які можна оцінити у розрізі двадцятирічного досвіду роботи з обдарованими учнями регіону, – застосування одного методу, методу координат, до розв'язування різних геометричних конкурсних задач, з одного боку, і розв'язання однієї стереометричної задачі декількома способами, з іншого.

При розв'язуванні задачі декількома способами розкриваються можливості різних способів міркувань, які приводять до одного і того ж результату, взаємозв'язок і спільність понять. Крім пошуку оптимального розв'язання, відбувається ефективний самоконтроль і перевірка. У підсумку за допомогою конкретних задач розкриваються загальні методи і відбуваються узагальнення [1, с. 171].

Наведемо різні способи розв'язування стереометричної конкурсної задачі.

Задача 1. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$, точка F є серединою бічного ребра SB. На діагоналі DB основи вибрано точку M, а на бічному ребрі SC – точку N так, що $AF||MN$. Обчисліть відношення $MN:AF$.

1 спосіб. Координатно-векторний метод. Виберемо (афінну) систему координат, як указано на рисунку 1, тоді координати точок є такими: $A(0; 0; 0)$, $D(d; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $S(0; 0; s)$, де d, b, s – деякі додатні дійсні числа.

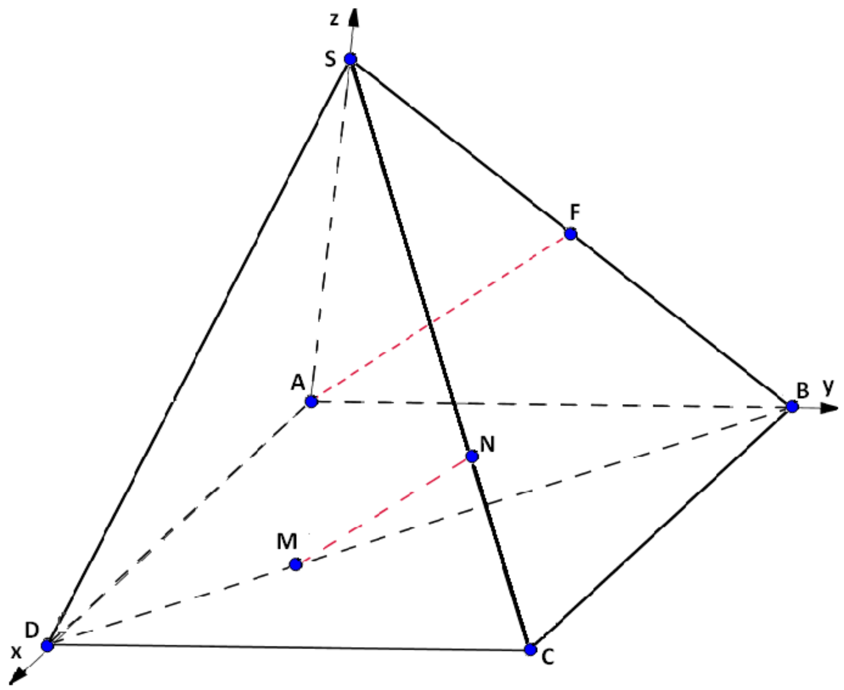

Рис. 1. Вибір системи координат

Оскільки точка F за умовою є серединою ребра SB, то її координати $F\left(0;\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$ і координати вектора $\overline{AF}$, відповідно, $\overline{AF}\left(0;\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)\parallel(0;b;c)$.

Складемо рівняння прямих (BD) і (SC) та «прив'яжемо до них» точки M і N. Обчислимо координати вектора $\overline{BD}$, маємо $\overline{BD}(d;-b;0)$, параметричні рівняння прямої (BD) за точкою і напрямним вектором: $(BD):\begin{cases}x=dt,\\ y=b-bt,\ t\in R;\\ z=0,\end{cases}$ аналогічно $\overline{SC}(d;b;-s)$, рівняння прямої $(SC):\begin{cases}x=dt',\\ y=bt', \quad t'\in R.\\ z=s-st',\end{cases}$ Точка $M\in(BD)$, а тому існує $t_1\in R$ таке, що $M(dt_1;b-bt_1;0)$; аналогічно, $N\in(SC)$, $\exists t_2\in R$ таке, що $N(dt_2;bt_2;s-st_2)$.

Обчислимо координати вектора $\overline{MN}(dt_2-dt_1;bt_2-b+bt_1;s-st_2)$ та врахуємо, що вектори $\overline{MN}\parallel\overline{AF}\parallel\overline{(0;b;s)}$ колінеарні, а тому їхні координати пропорційні: $\frac{dt_2-dt_1}{0}=\frac{bt_2-b+bt_1}{b}=\frac{s-st_2}{s}$. Після спрощення (з урахуванням того, що d, b, s – деякі відмінні від нуля числа), отримаємо $\begin{cases}t_2-t_1=0,\\ t_2-1+t_1=1-t_2.\end{cases}$ Розв'язуючи систему, маємо: $t_1=t_2=\frac{2}{3}$, а тоді координати точок $M\left(\frac{2}{3}d;\frac{1}{3}b;0\right)$; $N\left(\frac{2}{3}d;\frac{2}{3}b;\frac{1}{3}s\right)$ і координати вектора

$\overline{MN}\left(0;\frac{1}{3}b;\frac{1}{3}s\right)=\frac{1}{3}(0;b;s)$. Врахуємо, що координати вектора $\overline{AF}\left(0;\frac{1}{2}b;\frac{1}{2}s\right)=\frac{1}{2}(0;b;s)$, а тоді відношення $\frac{MN}{AF}=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$. Відповідь: $MN:AF=2:3$.

Перевагами координатно-векторного методу розв'язування задач є його алгоритмічність, прозорість, лаконічність і прогнозованість отримання результату. Поки у учня немає значного досвіду розв'язування конкурсних задач, можна радити застосовувати цей метод розв'язування задач. Недоліком наведеного методу є те, що навіть після отримання відповіді до задачі, не можна указати геометричної інтерпретації задачі, тобто навести чітке обґрунтування положення точок *M* і *N*. Розглянемо використання геометричних міркувань до розв'язання цієї задачі.

2 спосіб. Спосіб додаткових побудов. Проведемо через ребро *SC* площину *SKC*, паралельну до *AF*: для цього у площині *ASB* через точку *S* проведемо пряму $SK \parallel AF$. Паралельні прямі *SK* і *AF* лежать у площині *ASB*, *F* – середина *SB*, а тому *AF* – середня лінія трикутника *KSB*, точка *A* – середина *KB* (див. рис. 2). Площина *SKC* перетинає пряму *BD* у точці *M*, у цій площині проводимо пряму *MN* паралельно ребру *KS*, за транзитивністю відношення паралельності прямих у просторі $MN \parallel AF$ (положення *MN* жорстко зафіксовано).

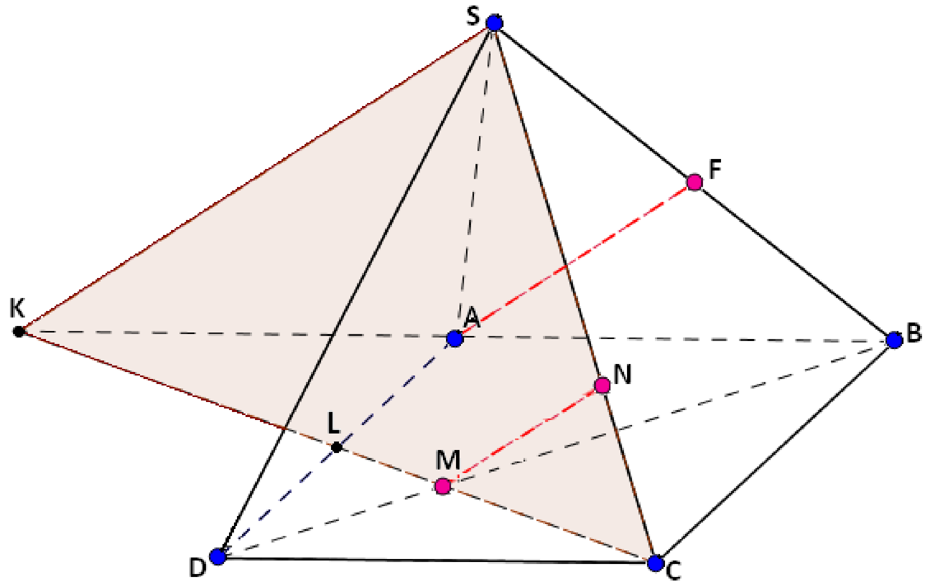

Рис. 2. Використання додаткових побудов

Розглянемо трикутники *KAL* і *KBC*, вони подібні, коефіцієнт подібності *k*=0,5 (оскільки *A* – середина *KB*), звідки випливає, що *KL*=*LC* і *LA*=*LD*. Трикутники *DLM* і *BCM* подібні, *k*=0,5 (*DL*=0,5·*BC*), звідки *LM*=0,5·*CM*. Позначимо *LM*=*x*, тоді *CM*=2*x*, *LC*=3*x*, *CK*=6*x*. Трикутники *CMN* і *CKS* подібні, *CM*:*CK*=1:3, тоді і *MN*:*KS*=1:3. Так як *AF*=0,5·*KS*, то *MN*:*AF*=1:1,5 або 2:3. Отримали ту ж саму відповідь.

3 спосіб. Використання методу слідів. Зауважимо, що після використання додаткових геометричних побудов можна було застосувати будь-який з методів побудови перерізу піраміди площиною, яка задається парою паралельних прямих (*MN*) і (*AF*), з метою відшукання відношення потрібних відрізків. На рис. 3 використано метод слідів: пряма (*AM*) є слідом площини (*AFNM*) на площині основи (*ABCD*), точка *E* – слідом прямої (*FN*).

Розглянемо подібні трикутники, які лежать в основі (*ABCD*): трикутники *DLM* і *BCM* подібні, *k*=0,5, *LM*:*CM*=1:2;

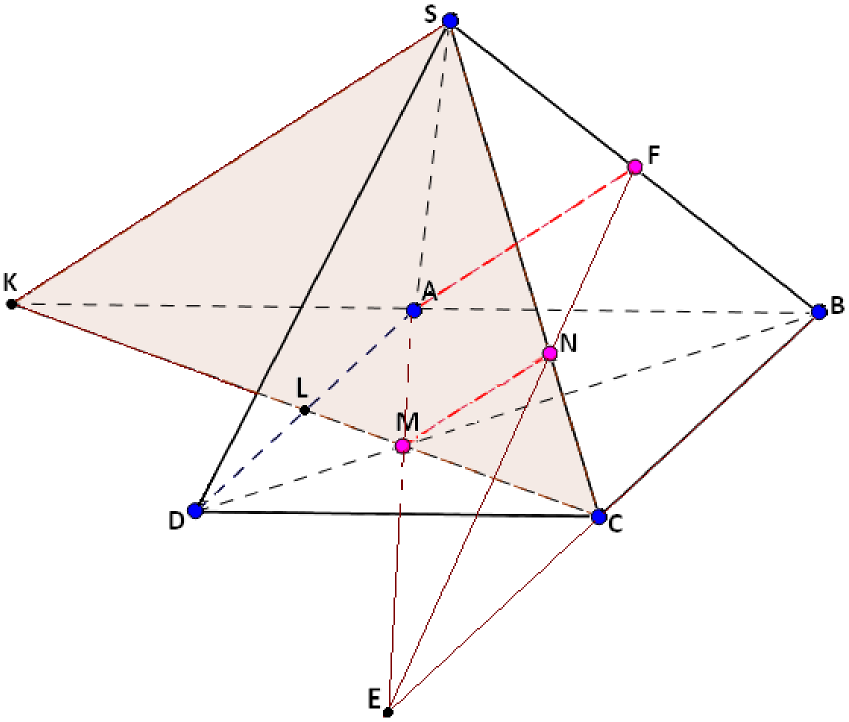

Рис. 3. Використання методу слідів

LMA і *CME* подібні, *LM*:*CM*=1:2; звідки маємо *MA*:*ME*=1:2, або *AE*:*ME*=3:2.

Розглянемо трикутники *EAF* і *EMN*, вони подібні. Оскільки *AE*:*ME*=3:2, то і *AF*:*MN*=3:2, а тоді шукане відношення *MN*:*AF*=2:3 (та ж сама відповідь).

4 спосіб. Метод геометричних перетворень (див. рис. 4). Виконаємо паралельне перенесення відрізка *AF* на вектор $\frac{1}{2}\overline{BC}$: $\prod_{\frac{1}{2}\overline{BC}}(AF)=A'F'$, причому точки A', F' – середини сторін *AD* і *SC*, відповідно. Чим відрізок $A'F'$ «кращий» за відрізок AF, адже вони рівні як сторони паралелограма $AA'F'F$? Відповідь така: принаймні точка F' лежить на ребрі *SC*, а це дозволяє «зсовувати» відрізок $A'F'$ по ребру *SC* до тих пір, доки точка A' не потрапить на діагональ *BD*. Виконуємо гомотетію з центром у точці *C* і коефіцієнтом $k=\dfrac{CM}{CA'}$, де *M* – точка перетину прямої $(A'C)$ і діагоналі (BD), маємо $Hom_C^k(A'F')=MN$.

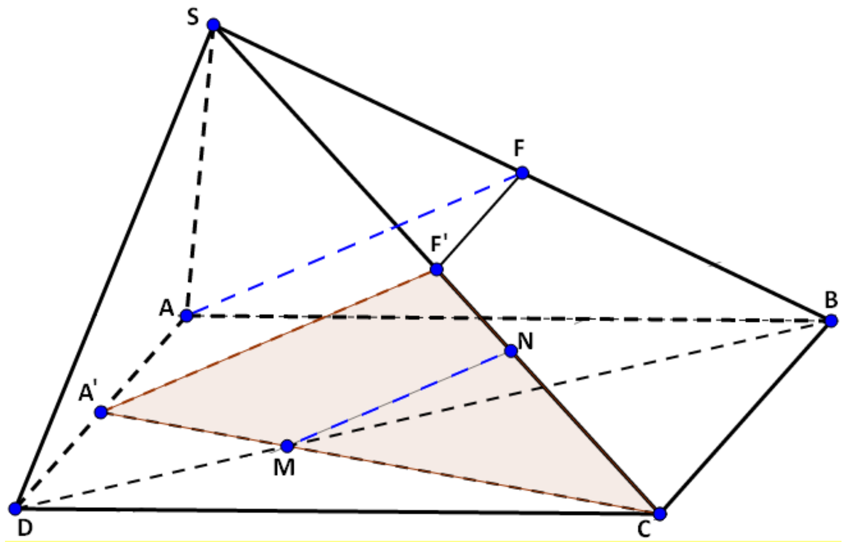

Рис. 4. Використання геометричних перетворень

Тоді шукане відношення $MN:AF$ є відношенням $MN:A'F'$ або $CM:CA'$. Оскільки $A'D$ дорівнює половині BC (див. рис. 5), то $CM:MA'$=2:1, а тоді $CM:CA'$=2:3, маємо той самий результат.

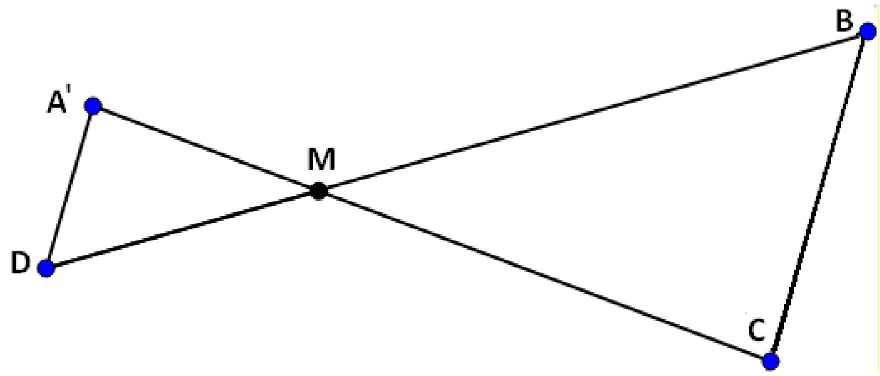

Рис. 5. Подібні трикутники

5 спосіб. Штучний спосіб. Використаємо результати першого, суто алгебраїчного способу. На продовженні променя BC виберемо точку E таку, що $CE=BC$ (див. рис. 6). Позначимо через M' точку перетину прямих (AE) і (BD). З подібності трикутників $AM'D$ та $EM'B$ маємо, що $AM':M'E$ =1:2.

Розглянемо трикутник SBE, тоді SC і EF – його медіани, позначимо точку перетину медіан SC і EF через N', тоді за властивістю медіан $FN' : N'E$=1:2.

З того, що $AM':M'E$ =1:2 і $FN':N'E$=1:2 випливає, що $AF||M'N'$. При цьому точки $M'\in DB$ і $N'\in SC$, звідки можна зробити висновок, що $M'=M$, $N'=N$. А тоді з отриманих вище рівностей випливає $\dfrac{MN}{AF}=\dfrac{ME}{AE}=\dfrac{2}{3}$.

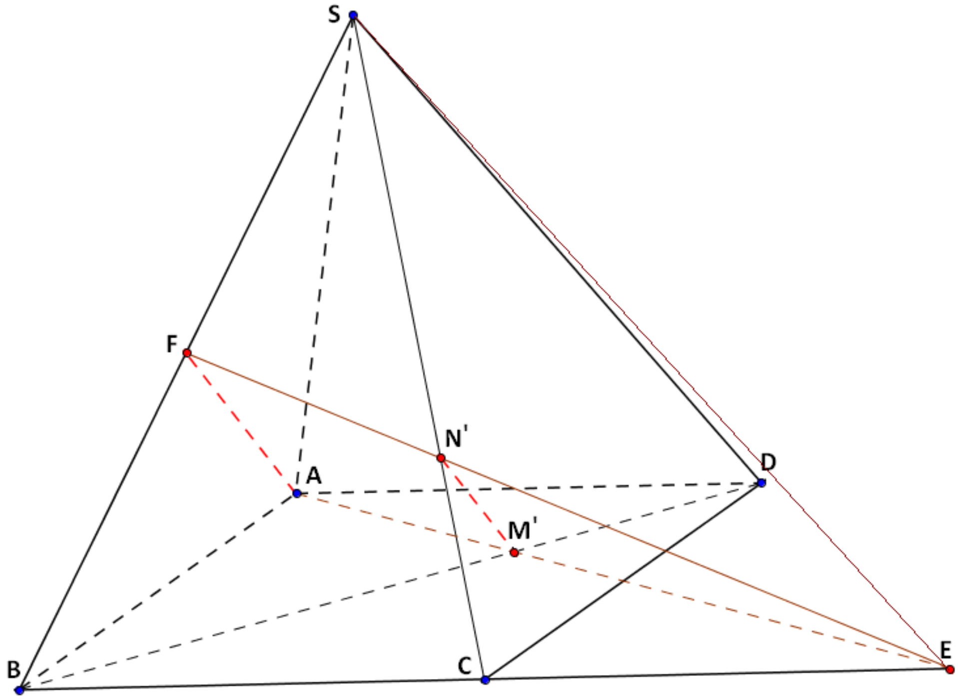

Рис. 6. Штучний спосіб

Відповідь: $MN:AF=2:3$.

Не менш важливо, ніж уміння знаходити різні способи розв'язання однієї задачі, уміти знаходити спільне у різних задачах, що дозволяє їх систематизувати і раціонально розв'язувати. Покажемо використання координатно-векторного методу до розв'язання наступної задачі.

Задача 2. У піраміді *ABCD* на медіанах *DP*, *DQ*, *DR* граней *ABD*, *BCD*, *CAD*, відповідно, задано точки *M*, *N*, *K*, для яких $DM:MP=2:1$, $DN:NQ=3:1$, $DK:KR=1:1$. Точка *S* – точка перетину прямої *AD* площиною *MNK*. Знайдіть відношення $DS:SA$ [4, с. 197].

Розв'язання. Виконаємо рисунок, для побудови перетину використаємо метод внутрішнього проектування: $(AQ)\cap(PR)=O$, $(DO)\cap(MK)=L$, $(NL)\cap(AD)=S$, де *S* – шукана точка перетину прямої (*AD*) площиною (*MNK*).

Зауважимо, що чотирикутник *ARQP* – паралелограм, а тому точка *O* є серединою обох його діагоналей. Розглянемо трикутник *DPR*: точки *O* і *K* є серединами своїх сторін, а тому $PD \parallel KO$ і $PD=2\cdot KO$; з умови маємо, що $MD=⅔\cdot PD$, а тому $MD:KO=4:3$. З подібності трикутників *MDL* і *KOL* маємо $DL:OL=MD:KO$, а тому $DL:OL=4:3$.

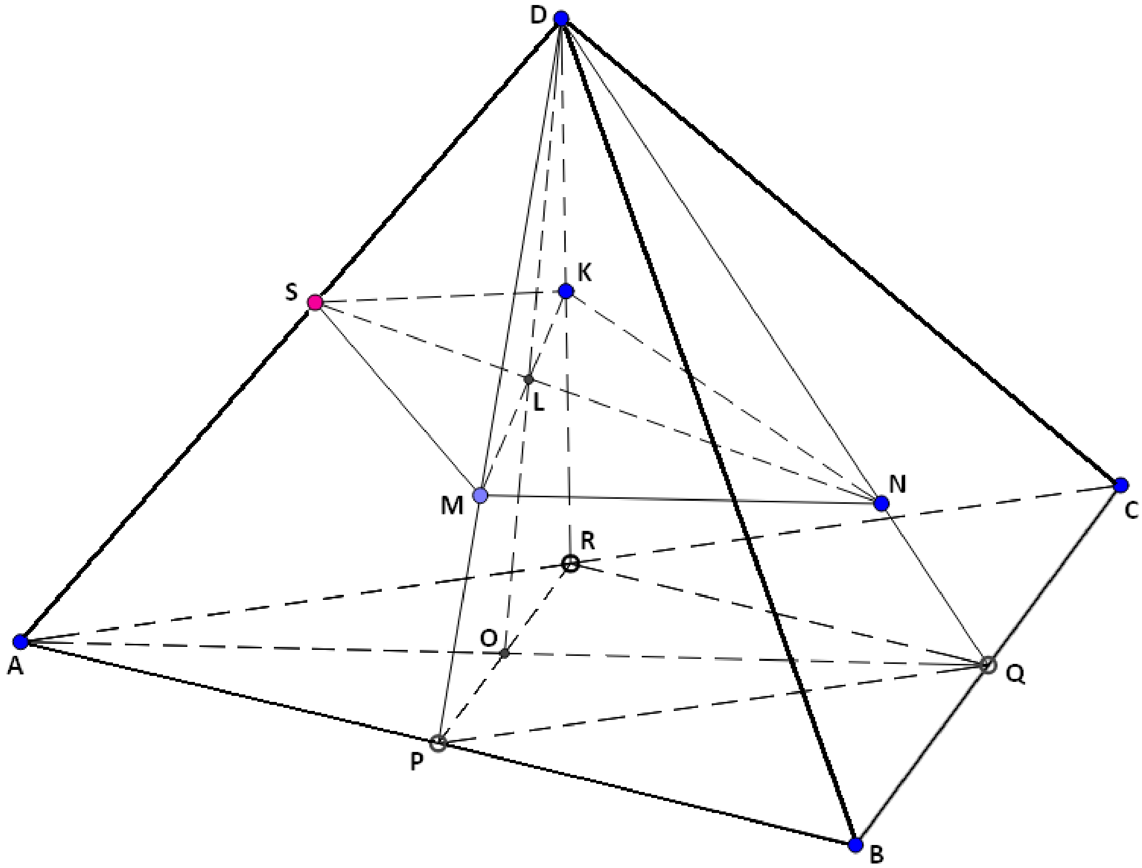

Рис. 7. Використання внутрішнього проектування

Розглянемо трикутник *QAD*, введемо афінну систему координат (рис. 8). Нехай точка $Q(0;0)$ – початок координат, напрям вісі абсцис – від точки *Q* до точки *A*, нехай $A(2;0)$, напрям вісі ординат – від *Q* до *D*, нехай $D(0;4)$.

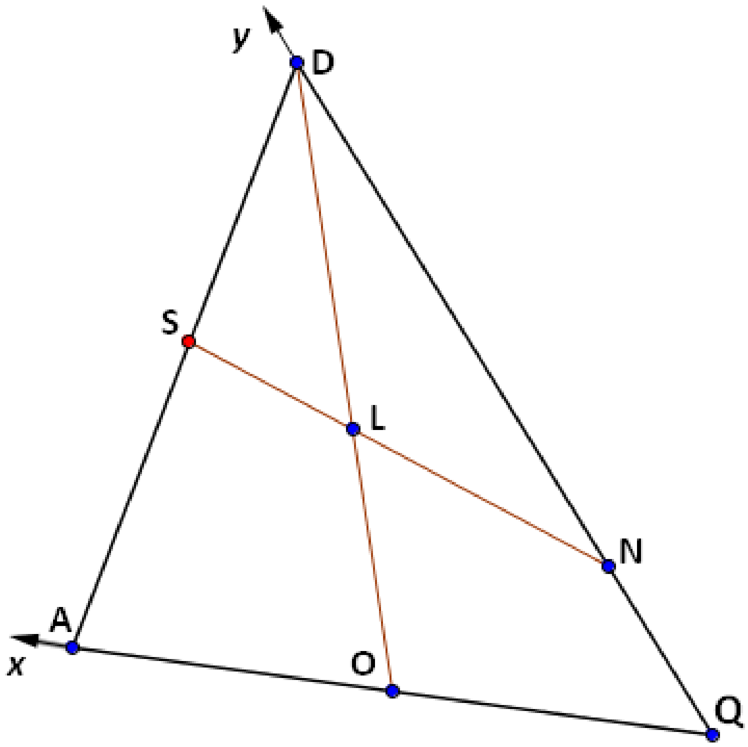

Рис. 8. Вибір системи координат

Тоді, з урахуванням умови, координати $O(1;0)$, $N(0;1)$. Обчислимо координати точки $L(x;\,y)$: $\overline{DO}(1;-4)$; $\overline{DL}(x;\,y-4)$, причому $\overline{DL}=\frac{4}{7}\overline{DO}$, а тому $L\left(\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$. Вектор $\overline{NL}\left(\frac{4}{7};\frac{5}{7}\right)\parallel(4;5)$, а тому рівняння прямої $(NL):\begin{cases}x=4t,\\ y=1+5t,\end{cases}\ t\in R$.

Рівняння прямої (AD) за двома точками $(AD):\dfrac{x-0}{2-0}=\dfrac{y-4}{0-4}$ або $2x+y-4=0$.

Знайдемо координати точки $S=(NL)\cap(AD)$, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x+y-4=0,\\ \begin{cases}x=4t,\\ y=1+5t,\end{cases}\end{cases}\Rightarrow 2\cdot 4t+(1+5t)-4=0\Rightarrow t=\frac{3}{13}\Rightarrow\begin{cases}x=4\cdot\dfrac{3}{13}=\dfrac{12}{13},\\ y=1+5\cdot\dfrac{3}{13}=\dfrac{28}{13}\end{cases}.$$ Тобто $S\left(\frac{12}{13};\frac{28}{13}\right)$.

А тоді вектори $\overline{DS}\left(\frac{12}{13};-\frac{24}{13}\right)=\frac{12}{13}\cdot(1;-2)$, $\overline{SA}\left(\frac{14}{13};-\frac{28}{13}\right)=\frac{14}{13}\cdot(1;-2)$ і шукане відношення $DS{:}SA=6{:}7$. Відповідь: $DS{:}SA=6{:}7$.

Висновки. У даній роботі розглядалися різні способи розв'язування конкурсних стереометричних задач, які використовувалися при роботі з обдарованими учнями під час підготовки до математичних турнірів. Розв'язування таких задач оправдане перш за все тим, що сприяє досягненню однієї з найважливіших цілей викладання математики в школі – розвитку абстрактного мислення, творчих здібностей учнів, підвищенню рівня їх логічного, а отже, й загального розвитку. Це слід пам'ятати, адже сьогоднішнім учням прийдеться мати справу з задачами, які поки що не розв'язані, оволодіти спеціальностями, які ще не існують, використовувати технології, які ще не створені.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Зеленяк О.П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Paskal / О.П. Зеленяк. – Киев, Москва: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. – 336 с.

2. Ізюмченко Л.В., Ріжняк Р.Я. Використання елементів системно-діяльнісного навчання у процесі інтенсивної математичної підготовки обдарованих учнів //Наукові записки. – Випуск 68. – Серія: Математичні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ, 2009. – С. 78-85.

3. Ясінський В.А. Готуємося до математичних олімпіади. – Львів: Каменяр, 2003. – 76 с.

4. Контрольні завдання ІІІ етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2013 році. – Ч. 1. – 234 с. / режим доступу http://man.gov.ua/ua/resource_center/publishing/edition-155

L.V. Iziumchenko
Central Ukrainian State Pedagogical University named after Volodymyr Vynnychenko

STEREOMETRIC PROBLEMS IN MATHEMATICAL CONTESTS AND METHODS OF THEIR SOLUTION

The article examines the solution of two competitive stereometric problems on finding the ratio of segments; provides five different ways of solving a geometrical problem, such as the implication of vector algebra, method of coordinates and their combination; describes the method of transformation including parallel translation and homothetic transformation, gives the detailed analysis of adequacy of applied transformations; analyzes the method of additional constructions and similarity of objects, as well as usage of methods of constructing of polyhedrons' sections, including trace method and method of internal design with further use of similarity of objects or elements of analytical geometry; describes the artificial way of solving as a geometrical supplement to algebraic solving; examines solving of stereometric problem by use of two-dimensional models, including coordinate-vector method on a subspace; outlines the positive effect of applied methods of solving problems on raising the educational level of students.

Keywords: *method of geometric transformation, homothetic transformation, method of internal design, trace method, method of coordinates, vector method of solving problems.*

Л.В. Изюмченко
Центральноукраинский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко

СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОНКУРСАХ И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ

В статье рассмотрены решения двух конкурсных стереометрических задач на отыскание отношения отрезков; приведены пять различных способов решения одной геометрической задачи, описано использование векторной алгебры и метода координат и их сочетания; освещены метод преобразований, в том числе параллельного переноса и гомотетии, представлен подробный анализ достаточности применяемых преобразований; рассмотрен метод дополнительных построений и использовано подобие исследуемых объектов; применены методы построения сечений многогранников, в том числе метод следов и метод внутреннего проектирования, с последующим использованием подобия объектов или элементов аналитической геометрии; рассмотрен искусственный способ решения как геометрическая поддержка алгебраическому способу решения задачи; также в статье рассмотрена стереометрическая задача, в решении которой использованы двумерные модели, в том числе координатно-векторный метод на плоскости; отмечено положительное влияние применяемых способов решения задач на повышение образовательного уровня школьников.

Ключевые слова: *метод геометрических преобразований, гомотетия, метод внутреннего проектирования, метод следов, метод координат, векторный способ решения задач.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Ізюмченко Людмила Володимирівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики ЦДПУ імені В.Винниченка.

Коло наукових інтересів: олімпіадні задачі, особливості роботи з обдарованими дітьми, методика навчання алгебри і геометрії.