УДК 519.1+511.0

Ю.І. Волков, Н.М. Войналович
Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

ПЕРРІН−ПОДІБНІ РЕКУРЕНТНІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Розглядається множина послідовностей $\{y_n\}$ *, які задаються рекурентностями* $y_{n+m} = ay_{n+r} + by_n,\ m \ge 2,\ (a,b,r) \in \{(1,1,1);(1,1,m-1);(-1,1,1);(-1,1,m-1)\}$.

Ми отримали ефективні формули для y_n *і їх можливі застосування в тестах простоти.*

Ключові слова: *рекурентності, послідовність Перріна, прості числа, генератриса.*

Постановка проблеми. Числові послідовності часто зустрічаються в різних розділах математики і фізики. В 1964 році американським матема-тиком Слоуном (Neil J.A. Slone), була створена енциклопедія послідовностей цілих чисел (On-line Enciclopedia of Integer Sequences, коротко QEIS, адреса в інтернеті: **https://qeis.org**). Дослідники й сьогодні поповнюють її новими послідовностями. На січень 2017 року там зафіксовано близько 280 000 послідовностей.

Часто послідовності задаються за допомогою рекурентних співвідношень і тоді виникає цілий ряд задач, як-то: знайти формулу для загального члена послідовності, знайти генератрису послідовності, знайти комбінаторне тлумачення членів послідовності, вивчити ті чи інші властивості членів послідовності й таке інше.

В роботі вивчаються послідовності близькі до добре відомої послідовності Перріна:

$$p_{n+3} = p_{n+1} + p_n,\ p_0 = 3,\ p_1 = 0,\ p_2 = 2, \quad (1)$$

{3,0,2,3,2,5,5,7,10,12,17,22,29,39,51,…}. В QEIS це послідовність A001608.

Аналіз раніше опублікованих праць. Вперше на послідовність (1) звернув увагу відомий французький математик Е.Люка ще в 1876 році, [1]. Він довів: якщо число *n* просте, то p_n ділиться на *n* (наприклад, $p_{13} = 39$ ділиться на 13), і висловив гіпотезу що має місце обернене твердження. Якби це було так, то з’явився б зручний тест для перевірки простоти нату-ральних чисел. Контрприкладу, який би спростував гіпотезу Люка не було знайдено, бо члени послідовності дуже швидко стають надзвичайно великими.

Пізніше, в 1899 році, послідовність (1) вивчав Перрін, [2], в честь якого вона була названа, але і йому не вдалося спростувати гіпотезу Люка. І тільки в 1982 році Адамс і Шенкс, [3], за допомогою комп’ютера знайшли, що член послідовності (1) з номером *n*=271441 ділиться на це число, але в цьому випадку $n=521^2$, і, отже, не є простим числом. В 1986 році Курц, Шенкс і Вільямс, [4], знайшли всі складені числа, які менші за $50\cdot 10^9$ для яких гіпотеза Люка не має місця (їх виявилося 55, всі вони більші числа 271441 і були названі псевдопростими Перріна).

Виклад основного матеріалу. Ми розглядаємо послідовності, які подібні до послідовності (1), вивчаємо їхні властивості, в тому числі й властивості, які пов’язані з подільністю на прості числа.

Нам будуть потрібні декілька допоміжних тверджень.

Лема 1. *Якщо p просте число і* $m \geq 2$, *то кожний поліноміальний коефіцієнт* $\binom{p}{k_1,\cdots,k_m}, k_1+\cdots+k_m = p, k_1 \neq p, \ldots, k_m \neq p,$ *ділиться на p.*

Випливає з того, що $\binom{p}{k_1,\cdots,k_m} = \dfrac{p!}{k_1!\cdots k_m!}$.

Лема 2. *Нехай* $x_1,\ldots,x_m$ *довільні натуральні числа і p просте число. Тоді*

$$(x_1+\cdots+x_m)^p - x_1^p - \cdots - x_m^p \,\vdots\, p.$$

Справді,

$$(x_1+\cdots+x_m)^p - x_1^p - \cdots - x_m^p = \sum_{k_1+\cdots+k_m=k} \frac{p!}{k_1!\cdots k_m!} x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m}, k_1 \neq p,\ldots,k_m \neq p.$$

І далі використовуємо лему 1.

Наслідком цієї леми є мала теорема Ферма. Візьмемо в якості чисел $x_1,\ldots,x_m$ одинички. Тоді отримаємо $m^p - m \,\vdots\, p$ для всякого натурального *m*.

На таке узагальнення малої теореми Ферма звернув увагу ще Е.Люка в 1878 році. (Див. з цього приводу, [5], стор. 52, вправа 15).

Лема 3 (*Формули Вієта*). *Нехай* $x_1,\ldots,x_m$ *корені алгебраїчного рівняння* $x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0$. *Тоді*

$$\sigma_1 = x_1+\cdots+x_m = -a_1,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + \cdots + x_{m-1}x_m = a_2,$$

$$\cdots,$$

$$\sigma_m = x_1x_2\cdots x_m = (-1)^m a_m.$$

Лема 4 (*Перша формулаВарінга*)**.** *Нехай* $x_1,\ldots,x_m$ *корені алгебраїчного рівняння* $x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0$. *Тоді*

$$x_1^n + \cdots + x_m^n = n \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\cdots+mk_m=n} (-1)^{2k_1+3k_2+\cdots+(m-1)k_m} \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m-1)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_m^{k_m}.$$

Формули Вієта і формули Варінга добре відомі з курсу алгебри, (див, наприклад, [5], стор. 187, 245-246).

Теорема 1. *Нехай послідовність* y_n *задана рекурентністю*

$$y_{n+m} = b_1y_{n+m-1} + b_2y_{n+m-2} + \cdots + b_{m-1}y_{n-1} + b_my_n, y_0 = m, y_1 = \lambda_1+\cdots+\lambda_m,$$

$y_2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_m^2, \ldots, y_{m-1} = \lambda_1^{m-1} + \cdots + \lambda_m^{m-1}$, $b_1,\ldots,b_m \in Z$, *а* $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ *корені характеристичного рівняння даної рекурентності, тобто, рівняння* $\lambda^m - b_1\lambda^{m-1} - \cdots - b_{m-1}\lambda - b_m = 0$. *Тоді, якщо p просте число, то* $y_p - b_1^p \,\vdots\, p$.

Доведення. Загальний розв'язок нашої рекурентності такий: $y_n = C_1\lambda_1^n + \cdots + C_m\lambda_m^n$, а з початкових умов випливає, що $C_1 = \cdots = C_m = 1$. Тому для всякого *n* загальний член нашої послідовності $y_n = \lambda_1^n + \cdots + \lambda_m^n$. Далі, в силу леми 3

$$b_1^p = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)^p = y_p + \sum_{k_1+\cdots k_m=p} \frac{p!}{k_1!\cdots k_m!}\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_m^{k_m}, k_1 \neq p, \ldots, k_m \neq p ,$$

а в силу леми 1 другий доданок в цій сумі ділиться на *p*, отже $y_p - b_1^p \vdots p$.

Теорема 2. *Нехай послідовність* y_n *задана рекурентністю*

$$y_{n+m} = y_{n+1} + y_n, y_0 = m, y_1 = y_2 = \cdots = y_{m-2} = 0, y_{m-1} = m-1, m \geq 3. \quad (2)$$

Тоді

1). $y_n = n\sum_{k=[n/m]}^{[n/(m-1)]} \binom{k}{n-(m-1)k} / k, n \geq m$,

і члени послідовності з простими номерами n *діляться на* n.

2). *Генератрисою послідовності* y_n *буде функція* $Y(z) = \dfrac{z^{m-1} - m}{z^m + z^{m-1} - 1}$.

Доведення. 1)..Застосуємо лему 3. Матимемо:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{m-2} = 0, \sigma_{m-1} = (-1)^m, \sigma_m = -(-1)^m.$$

Тому в силу леми 4

$$y_n = \lambda_1^n + \cdots + \lambda_m^n =$$

$$n \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\cdots+mk_m=n} (-1)^{2k_1+3k_2+\cdots+(m+1)k_m} \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m-1)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_m^{k_m} =$$

$$= \{k_1 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0\} =$$

$$n \sum_{(m-1)k_{m-1}+mk_m=n} \frac{(k_{m-1}+k_m-1)!}{k_{m-1}!k_m!} = \{\text{замінемо } k_{m-1}+k_m = k, (m-1)k + k_{\mathrm{m}} = n\} =$$

$$n \sum_{(m-1)k+k_m=n} \binom{k}{k_m} / k = n\sum_{k=[n/m]}^{[n/(m-1)]} \binom{k}{n-(m-1)k} / k .$$

Те, що y_n ділиться на *n*, якшо *n* просте, випливає з теореми 1.

2). Позначимо через $Y(z)$ генератрису послідовності y_n. Перейдемо від рекурентності послідовності y_n до генаратриси. Отримаємо лінійне рівняння для генератриси:

$$z^{-m}(Y(z) - m - z^{m-1}) = z^{-m+1}(Y(z) - m) + Y(z),$$

а звідси знаходимо вираз для $Y(z)$.

Наслідок 1. *Якщо* m=2, *то отримаємо послідовність чисел Люка* l_n: 2,1,3,4,7, 11, 18,29,… ; *число* $l_n - 1$ *ділиться на* n, *якщо* n *просте число і*

$$l_n = n\sum_{k=[n/2]}^{n}\binom{k}{n-k}/k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

В QEIS це послідовність A000032.

Примітка. Складені числа *n* і такі, що число $l_n - 1$ діляться на *n*, називаються псевдопростими Люка, найменші з них: 705, 2465, 2737.

В QEIS є послідовність таких чисел − це A005845.

Наслідок 2. *Якщо m*=3, *то отримаємо послідовність Перрін*а (1) *і*

$$p_n = n\sum_{k=[n/3]}^{[n/2]}\binom{k}{n-2k}/k .$$

Наслідок 3. *Якщо m*=4, *то отримаємо послідовність Перріна четвертого порядку*: 4,0,0,3, 4, 0, 3, 7, 4, 3, 10, 11, 7, 13, 21, 18, … і

$$y_n = n\sum_{k=[n/4]}^{[n/3]}\binom{k}{n-3k}/k .$$

В QEIS це послідовність A050443.

Наслідок 4. *Якщо m*=5, *то отримаємо послідовність Перріна п'ятого порядку*: 5,0,0,0, 4, 5, 0, 0, 4, 9, 5, 0, 4, 13, 14, 5, 4, 17,. і

$$y_n = n\sum_{k=[n/5]}^{[n/4]}\binom{k}{n-4k}/k .$$

В QEIS це послідовність A087935.

Наслідок 5. *Якщо m*=6, *то отримаємо послідовність Перріна шостого порядку:* 6,0,0,0,0, 5, 6,0, 0, 0, 5,11, 6,0,0,5,... і

$$y_n = n\sum_{k=[n/6]}^{[n/5]}\binom{k}{n-5k}/k .$$

В QEIS це послідовність A087936.

Теорема 3. *Нехай послідовність* z_n *задана рекурентністю*

$$z_{n+m} = z_n - z_{n+m-1}, z_0 = m, z_1 = -1, \cdots, z_k = (-1)^k, \cdots, z_{m-1} = (-1)^{m-1}. \qquad (3)$$

Тоді

1). $z_n = n\sum_{k=0}^{[n/m]}(-1)^{n-km}\binom{n-(m-1)k}{k}/(n-(m-1)k), n>0,.$

і, якщо n *просте число, то числа* $y_n + 1$ *діляться на* n*.*

2). *Генератрисою послідовності* y_n *буде функція* $G(z) = \dfrac{z(1-m)-m}{z^m + z^{m-1} - 1}$.

Доведення. 1). Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ корені характеристичного рівняння даної рекурентності, тобто, рівняння $\lambda^m + \lambda^{m-1} - 1 = 0$. Застосуємо лему 3. Матимемо:

$$\sigma_1 = -1, \sigma_2 = \cdots = \sigma_{m=2} = \sigma_{m-1} = 0, \sigma_m = (-1)^m .$$

Тому в силу леми 4 числа

$$z_n = \lambda_1^n + \cdots + \lambda_m^n =$$

$$n \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\cdots+mk_m=n} (-1)^{2k_1+3k_2+\cdots+(m+1)k_m} \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m-1)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_m^{k_m} =$$

$$= \{k_2 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0\} =$$

$$n \sum_{k_1+mk_m=n} (-1)^{2k_1+(m+1)k_m} \frac{(k_1+k_m-1)!}{k_1!k_m!} (-1)^{k_1}(-1)^{mk_m} = \{\text{замінемо } k_1 + k_m = k\} =$$

$$n \sum_{k_1+mk_m=n} (-1)^{k_1+k_m} \frac{(k-1)!}{k_1!k_m!} = n \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^{n-km} \binom{n-(m-1)k}{k} / (n-(m-1)k) ..$$

Те, що $z_n + 1$ ділиться на n, якшо n просте, випливає з теореми 1.

2). Позначимо через $G(z)$ генератрису послідовності y_n. Перейдемо від рекурентності послідовності y_n до генаратриси. Отримаємо лінійне рівняння для генератриси:

$$z^{-m}(G(z) - m + z - z^2 + \cdots + (-1)^{m-1} z^{m-1}) = z^{-m+1}(G(z) - m + z + \cdots$$

$$+ (-1)^{m-2} z^{m-2}) + G(z),$$

а звдіси знаходимо вираз для $G(z)$.

Теорема 4. *Нехай послідовність* y_n *задана рекурентністю*

$$y_{n+m} = y_{n+m-1} + y_n, y_0 = m, y_1 = y_2 = \cdots = y_{m-2} = y_{m-1} = 1.. \quad (4)$$

Тоді

1). $y_n = n \sum_{k=0}^{[n/m]} \binom{n-(m-1)k}{k} / (n-(m-1)k), n \ge 1, .$

і, якщо n просте число, то числа $y_n - 1$ *діляться на n.*

2). *Генератрисою послідовності* y_n *буде функція* $Y(z) = \dfrac{(m-1)z - m}{z^m + z - 1}$.

Доведення. 1). Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ корені характеристичного рівняння даної рекурентності, тобто, рівняння $\lambda^m - \lambda^{m-1} - 1 = 0$. Застосуємо лему 3. Матимемо:

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \cdots = \sigma_{m=2} = \sigma_{m-1} = 0, \sigma_m = (-1)^{m+1}.$$

Тому в силу леми 4 числа

$$z_n = \lambda_1^n + \cdots + \lambda_m^n =$$

$$n \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\cdots+mk_m=n} (-1)^{2k_1+3k_2+\cdots+(m+1)k_m} \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m-1)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_m^{k_m} =$$

$$= \{k_2 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0\} =$$

$$n\sum_{k_1+mk_m=n}(-1)^{2k_1+(m+1)k_m}\frac{(k_1+k_m-1)!}{k_1!k_m!}(-1)^{(m+1)k_m}=\{\text{замінемо } k_1+k_m=k\}=$$

$$n\sum_{k_1+mk_m=n}\frac{(k-1)!}{k_1!k_m!}=n\sum_{k=0}^{[n/m]}\binom{n-(m-1)k}{k}/(n-(m-1)k).$$

Те, що y_n-1 ділиться на *n*, якщо *n* просте, випливає з теореми 1.

2). Позначимо через $Y(z)$ генератрису послідовності y_n. Перейдемо від рекурентності послідовності y_n до генаратриси. Отримаємо лінійне рівняння для генератриси:

$$z^{-m}(Y(z)-m-z-\dots-z^{m-1})=z^{-m+1}(Y(z)-m-z-\dots-z^{m-2})+Y(z),$$

а звдіси знаходимо вираз для $Y(z)$

Наслідок 6. *Нехай послідовність* y_n *задана рекурентністю*

$y_{n+5}=y_{n+4}+y_n, y_0=5, y_1=y_2=y_3=y_4=1..$

Тоді

$$y_n=n\sum_{k=0}^{[n/5]}\binom{n-4k}{k}/(n-4k)=n\sum_{k=[n/3]}^{[n/2]}\binom{k}{n-2k}/k+2\cos\frac{n\pi}{3}.$$

Характеристичне рівняння для даної рекурентності таке:

$$\lambda^5-\lambda^4-1=0\Leftrightarrow(\lambda^3-\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1)=0.$$

Тому $y_n=\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n+\lambda_4^n+\lambda_5^n$, де $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ корені рівняння $\lambda^3-\lambda-1$=0, а λ_4,λ_5 корені рівняння $\lambda^2-\lambda+1=0$. В такому разі

$\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n$ це члени послідовності Перріна, а $\lambda_4^n+\lambda_5^n=2\cos\frac{n\pi}{3}$.

Звідси, порівнюючи цей результат з результатом наслідку 3, отримаємо для членів послідовності Перріна ще й таку формулу

$$p_n=n\sum_{k=0}^{[n/5]}\binom{n-4k}{k}/(n-4k)-2\cos\frac{n\pi}{3}, n\ge 1.$$

Випишемо 50 перших членів цієї послідовності.

{ 5,1,1,1,6,7,8,9,10,16,23,31,40,50,66,89,120,160,210,276,365,485,645,855, 1131,1496,1981,2626,3481,4612,6108,8089,10715,14196,18808,24916,33005, 43720,57916,76724,101640,134645,178365,236281,313005,414645,549290, 727655,963936}

В QEIS ця послідовність відсутня.

Наслідок 7. *Якщо послідовність* y_n, *яка задана рекурентністю*

$y_{n+m}=y_{n+1}+y_n, y_0=m, y_1=y_2=\dots=y_{m-2}=0, y_{m-1}=m-1$, *продовжити на відємні індекси, то* $y_{-n}=z_n$, *де* z_n *послідовність* (3).

Доведення. .Справді, нехай $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ корені характеристичного рівняння даної рекурентності, тобто, рівняння $\lambda^m - \lambda - 1 = 0$. Тоді

$y_{-n} = \lambda_1^{-n} + \cdots + \lambda_m^{-n} = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{\lambda_m}\right)^n$, але числа $\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_m}$ це корені

характеристичного рівняння рекурентності (3), тобто, рівняння $\lambda^m + \lambda^{m-1} - 1 = 0$

Теорема 5. *Нехай послідовність* y_n *задана рекурентністю*

$$z_{n+m} = z_n - z_{n+1}, z_0 = m, z_1 = z_2 = \cdots = z_{m-2} = 0, z_{m-1} = 1 - m.. \qquad (5)$$

Тоді

1). $z_n = n \sum_{k=[n/m]}^{[n/(m-1)]} (-1)^{mk-p} \binom{k}{mk-n} / k, n \geq m$,

і, якщо n просте число, то числа z_n *діляться на n.*

2). *Генератрисою послідовності* z_n *буде функція* $Y(z) = \dfrac{z^{m-1} + m}{1 - z^m + z^{m-1}}$.

Доведення. 1). Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ корені характеристичного рівняння даної рекурентності, тобто, рівняння $\lambda^m + \lambda - 1 = 0$. Застосуємо лему 3. Матимемо:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{m=2} = 0, \sigma_{m-1} = (-1)^{m-1}, \sigma_m = (-1)^{m+1}.$$

Тому в силу леми 4 числа

$$z_n = \lambda_1^n + \cdots + \lambda_m^n =$$

$$n \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\cdots+mk_m=n} (-1)^{2k_1+3k_2+\cdots+(m+1)k_m} \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m-1)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_m^{k_m} =$$

$$= \{k_1 = k_2 = k_2 = \cdots = k_{m-2} = 0\}$$

$n \sum_{(m-1)k_{m-1}+mk_m=n} (-1)^{mk_{m-1}+(m+1)k_m} \dfrac{(k_{m-1}+k_m-1)!}{k_{m-1}!k_m!} (-1)^{(m-1)k_{m-1}+(m+1)k_m} = \{$замінемо $k_{m-1} + k_m = k\}=$

$$n \sum_{mk-k_{m-1}=n} (-1)^{k_{m-1}} \frac{k!}{k_{m-1}!(k-k_{m-1})!} / k = n \sum_{k=[n/m]}^{[n/(m-1)]} (-1)^{mk-n} \binom{k}{mk-n} / k..$$

Те, що z_n ділиться на *n*, якшо *n* просте, випливає з теореми 1.

2). Позначимо через $Y(z)$ генератрису послідовності z_n. Перейдемо від рекурентності послідовності z_n до генаратриси. Отримаємо лінійне рівняння для генератриси:

$$z^{-m}(Y(z) - m - (1-m)z^{m-1}) = Y(z) - z^{-1}(Y(z) - m),$$

а звдіси знаходимо вираз для $Y(z)$

Наслідок 8. *Нехай послідовність* z_n *задана рекурентністю*

$$z_{n+5} = z_n - z_{n+1}, y_0 = 5, z_1 = z_2 = z_3 = 0, z_4 = -4..$$

Тоді

$$z_n = n\sum_{k=[n/5]}^{[n/4]}(-1)^{5k-p}\binom{k}{5k-n}/k = n\sum_{k=0}^{[n/3]}\frac{(-1)^{n+k}}{n-2k}\binom{n-2k}{k} + 2\cos\frac{n\pi}{3}, n \ge 5.$$

Характеристичне рівняння для даної рекурентності таке:

$$\lambda^5 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^3 + \lambda^2 - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0\,.$$

Тому $y_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n + \lambda_5^n$, де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ корені рівняння $\lambda^3 + \lambda^2 - 1 = 0$, а λ_4, λ_5 корені рівняння $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. В такому разі $\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n$ це члени послідовності $u_{n+3} = u_n - u_{n+2}, u_0 = 3, u_1 = -1, u_2 = 1$, а тому

$$u_n = n\sum_{k=0}^{[n/3]}\frac{(-1)^{n+k}}{n-2k}\binom{n-2k}{k}, \text{ а } \lambda_4^n + \lambda_5^n = 2\cos\frac{n\pi}{3}.$$

Випишемо 50 перших членів цієї послідовності.
{ 5,0,0,0,-4,5,0,0,4,-9,5,0,-4,13,-14,5,4,-17,27, -19,1,21,-44,46,-20,-20,65,
-90,66,0,-85,155,-156,66, 85,-240, 311,-222,-19,325,-551,533,-203,-344,876,
-1084, 736,141,-1220,1960}
В QEIS ця послідовність відсутня.

Наслідок 9. *Якщо послідовність* v_n, яка *задана за допомогою рекурентності*

$$y_{n+m} = y_{n+m-1} + y_n, y_0 = m, y_1 = y_2 = \cdots = y_{m-2} = y_{m-1} = 1,$$

продовжити на відємні індекси, то $y_{-n} = z_n$, *де* z_n *послідовність* (5).

Доведення. .Справді, нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ корені характеристичного рівняння даної рекурентності, тобто, рівняння $\lambda^m - \lambda^{m-1} - 1 = 0$. Тоді

$$y_{-n} = \lambda_1^{-n} + \cdots + \lambda_m^{-n} = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{\lambda_m}\right)^n,$$ але числа $\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_m}$ це корені характеристичного рівняння рекурентності (4), тобто, рівняння $\lambda^m + \lambda - 1 = 0$.

Висновки. В роботі отримані ефективні формули для знаходження загальних членів розглядуваних послідовностей, які дозволяють швидко виявляти та перевіряти ті чи інші властивості послідовностей.

Розроблена в роботі методика дозволяє досліджувати послідовнсті, заданих рекурентностями $y_{n+m} = ay_{n+r} + by_n, m \ge 2,$ і для значень параметрів (*a*,*b*,*r*), які відмінниї від тих, що розглянуто в статті.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Lucas E. Sur la rechrche des grands nombres premiers // A..F. Congres du Clermont-Ferrand, −1876, − pp.61-68.
2. Perrin LR. // Item 1484, L'Intermediatre des Math. − 1899. −v.6. − pp. 76-77.
3. Adams W. and Shanks D. Strong primality tests that are not sufficient, // Math. Comp.−1982. − v.35. − pp.225-300.
4. Kurtz G.C., Shanks D., Williams H.C. Fast Primality Tests for Numbers Less Than $50{\cdot}10^9$// Math. Comp. −1986. − v.46, N.174. − pp.681-701.
5. Мишина А.П. Высшая алгебра/ Мишина А.П., Проскуряков И.В. −М.:ФМ, −1962, −300 с.
6. Виноградов И.М. Теория чисел / −М.:ФМ, −1965, −172 с.

Ю.И. Волков, Н.М. Войналович
Кировоградський государственный педагоический университет имени Владимира Винниченка

ПЕРРИН–ПОДОБНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛНОСТИ

Рассматривается множество последовательностей $\{y_n\}$*, которые задаются рекурентностями*

$$y_{n+m} = ay_{n+r} + by_n, m \geq 2, \ (a,b,r) \in \{(1,1,1);(1,1,m-1);(-1,1,1);(-1,1,m-1)\}.$$

Мы получили эффективные формулы для y_n *и их возможные применения в тестах простоты.*

Ключевые слова: *рекуррентности, последовательность Перрина, простые числа, производящая функция..*

Yrii Volkov, Nataliya Vojnalovich
The Kirovograd Volodymyr Vynychenko state pedagogical university

PERRIN-LIKE RECURRING SEQUENCES

Consider the set of sequences $\{y_n\}$ *give be recurrences*

$$y_{n+m} = ay_{n+r} + by_n, m \geq 2, \ (a,b,r) \in \{(1,1,1);(1,1,m-1);(-1,1,1);(-1,1,m-1)\}.$$

We get the effectie formulae for y_n *and their possible use in primality tests.*

Keywords: *recurrences, Perrin sequences, prime numbers, generating function.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Войналович Наталія Михайлівна – доцент кафедри математики, доцент, кандидат педагогічних наук.

Коло наукових інтересів: методика навчання математики, дискретна математика.

Волков Юрій Іванович – професор кафедри математики, професор, доктор фізико-математичних наук.

Коло наукових інтересів: математичний аналіз, теорія ймовірностей і математична статистика, дискретна математика.

УДК 004.4+378.2

В.В. Концедайло
Житомирський державний університет імені Івана Франка

ВИКОРИСТАННЯ СЕРЙОЗНИХ ІГОР ТА СИМУЛЯЦІЙ З РОЗРОБКИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ РОЗВИТКУ НЕТЕХНІЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ-ПРОГРАМІСТІВ

У статті розглянуто використання серйозних ігор та симуляцій з розробки програмного забезпечення для розвитку нетехнічних компетентностей майбутніх інженерів-програмістів. З'ясовано, що типовій освіті інженерів-програмістів бракує практичного опанування процесів розробки програмного забезпечення. Це пов'язано з тим, що розробку програмного забезпечення, а, особливо, великих систем програмного забезпечення, прийнято вважати суто технічним завданням, проте на практиці виявляється інакше: у більшості випадків розробка великих (і не тільки) систем є завданням, здебільшого, "нетехнічного" характеру. Виявлено, що єдиним можливим способом надання студентам досвіду участі у реальних процесах розробки програмного забезпечення (ПЗ) в академічному середовищі є використання ігрових симуляторів та симуляцій у поєднанні з лекціями і навчальними проектам. Доведено, що симулятори можуть принести в освіту інженерів-програмістів ту ж користь, яку вони принесли і у інші галузі (медицина, авіація та інші). Зокрема,