УДК 512.552.1

НЕТЕРОВІ БІРЯДНІ КІЛЬЦЯ З СИЛЬНОЗВ'ЯЗНИМ САГАЙДАКОМ.

Ю. В. Яременко, Ю.М.Демченко.

Описано нетерові біряді кільця з чотирьохточковим сильнозв'язним сагайдаком.

The noetherian biserial rings with four-dotted closely connected quiver are dexribed in the article.

В статті розглядаються асоціативні кільця з $1\neq 0$.

Бірядні кільця є важливим узагальненням добре відомих напівланцюгових кілець. Напівланцюгові кільця є напівдосконалими кільцями, над якими всі нерозкладні праві й ліві проективні модулі мають лінійну структуру підмодулів. Ці кільця характеризуються тим, що над ними всі скінченно зображувані модулі напівланцюгові. Цей клас кілець має безпосереднє використання в деяких питаннях лінійної алгебри і теорії абелевих груп.

Артинові бірядні кільця ввів Фуллер [1] в зв'язку з вивченням кілець дистрибутивного модульного типу. В роботі [2] поняття бірядного кільця перенесено на напівдосконалі кільця.

Нагадаємо, що кільце A називається ***напівдосконалим,*** якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R [3].

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R, якщо для будь-якого елемента $u\in A,$ для якого $u^2-u\in R$ існує елемент $e^2=e\in A$ такий, що $e-u\in R$ (тобто існує ідемпотент в кільці A конгруентний з u за модулем R).

Теорема 1 [4]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли $1\in A$ розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Нехай $1=e_1+\ldots+e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів і $a=1a1=(e_1+\ldots+e_n)a(e_1+\ldots+e_n)=$ $=\sum_{i,j=1}^{n}e_iae_j.$ Неважко перевірити, що це розклад кільця А в пряму суму абелевих груп e_iAe_j $(i,j=1,\ldots,n).$ Елементи із e_iAe_j ми будемо позначати через $a_{ij}.$ Будь-який елемент $a\in A$ зручно записувати у вигляді матриці $(a_{ij}).$ Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij}=e_iAe_j$ з звичайними операціями додавання і множення. Таке представлення називається ***двостороннім пірсовським розкладом кільця A*** [5,с.31].

Модуль M називається ***бірядним***, якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулеві) такі, що $K_1+K_2=M$, або найбільший власний підмодуль в $M,$ а $K_1\cap K_2$ – нуль, або простий модуль [2].

Напівдосконале кільце A називається ***бірядним кільцем***, якщо кожний правий і кожний лівий головний A модуль бірядний [2].

Теорема 2 [2]. *Нехай e – довільний ідемпотент бірядного кільця A. Тоді eAe являється бірядним кільцем.*

Напівдосконале кільце A з радикалом Джекобсона R називається ***зведеним***, якщо A/R є прямим добутком тіл [6].

За теоремою Моріти [7] категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем натурально-еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при вивченні напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями.

Означення. *Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце з радикалом Джекобсона R. $P_1,\ldots,P_S$ – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні A-модулі. Позначимо $P(P_iR)$ – проективне накриття модуля P_iR. Тоді*

$$P(P_iR) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}} \qquad \textit{\textbf{(i,j = 1, …, s).}}$$

Поставимо у відповідність модулям $P_1,\ldots,P_s$ точки 1,...,s і сполучимо точку i з точкою j t_{ij} – стрілками. Отриманий граф називається сагайдаком нетерова справа напівдосконалого кільця A [6]. Позначимо його K(A).

Теорема 3 [8]. *Нехай A – нетерове бірядне кільце. Тоді із кожної точки сагайдака кільця A виходить не більше двох стрілок, в кожну точку сагайдака кільця A входить не більше двох стрілок, причому із однієї точки в другу (можливо й співпадаючу з першою) іде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінченний граф, який задовольняє ці умови, то існує бірядне кільце, сагайдаком якого являється цей граф.*

Лема 1 [8]. *Якщо із точки сагайдака нетерового бірядного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий.*

Розглянемо нетерові бірядні кільця, сагайдаки яких складаються з 4-х точок.

Тоді розклад одиниці кільця A у суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів матиме вигляд: $1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Позначимо $P_i = e_iA$, $Q_i = Ae_i$, $U_i = P_i/P_iR$, $V_i = Q_i/RQ_i$, $A_{ij} = e_iAe_j$, R_i – радикал Джекобсона кільця A_{ii}, $i, j = 1,\ldots,4$.

За теоремою 2, і теоремами 10.5 [9] та 6.1 [10] $A_{ii} = \vartheta_i$ – дискретно нормовані кільця, або однорядні кільця Кете, A_{ij} – циклічний лівий A_{ii} і циклічний правий A_{jj} – модуль.

Лема 2 [6]. *Мають місце рівності $U_ie_j = 0$, $e_jV_i = 0$ при $i \neq j$ і $U_ie_i = U_i$, $e_iV_i = V_i$ $(i,j = 1,\ldots,n)$.*

Лема 3 [6]. *Простий модуль U_k (V_k) входить в прямий розклад модуля e_iR/e_iR^2 (Re_i/R^2e_i) тоді і тільки тоді, коли $e_iR^2e_k$ $(e_kR^2e_i)$ строго міститься в e_iRe_k (e_kRe_i).*

Твердження 1 [8]. *Для нетерових кілець єдиний правий максимальний A_{jj} – підмодуль в A_{ij} співпадає з єдиним лівим максимальним A_{ii} – підмодулем в A_{ij}.*

Нагадаємо, що сагайдак називається ***незв'язним,*** якщо множину його точок можна розбити на дві множини, які не перетинаються і між якими немає стрілок.

У противному випадку сагайдак називається ***зв'язним.***

Орієнтований граф називається ***сильнозв'язним***, якщо із будь-якої його точки в іншу є шлях.

Якщо в сагайдаку відкинути петлі, то він називається ***базовим***.

В роботі [11] описані нетерові бірядні кільця з чотирьохточковим ациклічним базовим сагайдаком.

Ми вкажемо будову всіх нетерових бірядних кілець, з сильнозв'язним чотирьохточковим сагайдаком.

Враховуючи теорему 3 отримаємо 54 сильнозв'язних сагайдаки, побудовані на 4-х вершинах, а отже і 54 кільця, двосторонній пірсовський розклад яких має вигляд:

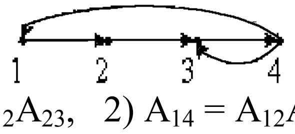
$$A=\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & \vartheta_4 \end{pmatrix}.,$$ з умовами, накладеними на їх компоненти.

Для скорочення записів згрупуємо кільця, які мають однаковий базовий сагайдак. Отримаємо кільця A, з відповідними умовами:

1) – 6)

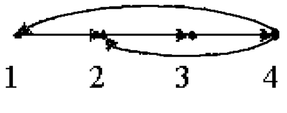
1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$, 7) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 8) $A_{43} = A_{41}A_{12}A_{23}$, 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{34}A_{41}A_{12}$, 11) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{41}A_{12}A_{23}$, 12) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{41}A_{12}A_{23}A_{34}$.

7) – 10)



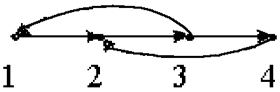
1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$, 7) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 8) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{34}A_{41}A_{12}$, 11) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 13) $A_{13} = 0$ або $R_3 = 0$.

11) – 14)



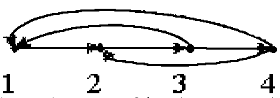
1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 7) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 8) $R_2 = A_{23}A_{34}A_{42}$, 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{42}A_{23}$, 11) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 12) $A_{13} = 0$ або$A_{43} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32} = 0$.

15) – 17)



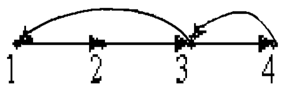
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$ або $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 7) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 8) $A_{41} = A_{42}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 10) $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 11) $R_3 = A_{31}A_{12}A_{23}$, 12) $A_{21} = 0$ або $A_{24} = 0$, 13) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$.

18)



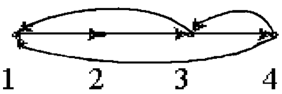
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$ або $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 7) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 8) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 9) $A_{34}A_{41} = A_{41}A_{12} = 0$, 10) $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 11) $R_3 = A_{31}A_{12}A_{23}$, 12) $A_{21} = 0$ або $A_{24} = 0$, 13) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$.

19) – 26)



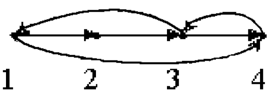
1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $A_{42} = A_{43}A_{31}A_{12}$, 8) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$,
10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$,
12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $R_4 = 0$ або $A_{41} = 0$, 15) $A_{24} = 0$ або $A_{21} = 0$.

27) – 28)



1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 8) $A_{34}A_{41} = A_{43}A_{31} = 0$, 9) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $A_{32} = 0$ або$A_{42} = 0$.

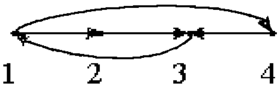
29) – 30)



1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$ або $A_{13} = A_{14}A_{43}$, 2) $A_{31}A_{14} = 0$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $A_{42} = A_{43}A_{31}A_{12}$,

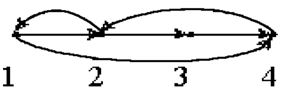
8) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 2 немає петлі, то
$R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $R_4 = 0$ або $A_{41} = 0$, 15) $A_{24} = 0$ або $A_{21} = 0$. 16) $A_{14}A_{43} = 0$ або $R_3 = 0$.

31) – 33)



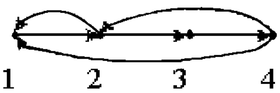
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$ або $A_{13} = A_{14}A_{43}$, 2) $A_{34} = A_{31}A_{14}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$,
4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $A_{42} = A_{43}A_{31}A_{12}$,
8) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 2 немає петлі, то
$R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{32} = 0$ або $A_{34} = 0$.

34) – 35)



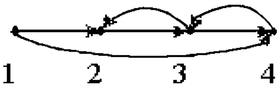
1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{24} = A_{23}A_{34}$ або $A_{24} = A_{21}A_{14}$, 3) $A_{32} = A_{34}A_{42}$,
4) $A_{31} = A_{34}A_{42}A_{21}$, 5) $A_{41} = A_{42}A_{21}$, 6) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{21}$,
8) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 9) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{42}A_{23}$,
10) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 11) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$, 12) $A_{14}A_{42} = 0$, 13) $R_2 = 0$ або
$A_{21}A_{14} = 0$, 14) $R_1 = 0$ або $A_{13} = 0$, 15) $R_1 = 0$ або $A_{41} = 0$, 16) $A_{43} = 0$ або
$A_{41} = 0$.

36) – 37)



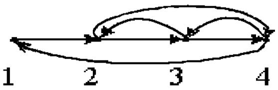
1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{21}$, 8) $R_2 = A_{21}A_{12}$,
9) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{42}A_{23}$, 10) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$,
11) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$, 12) $A_{41}A_{12} = A_{42}A_{21} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32} = 0$,
14) $R_1 = 0$ або $A_{13} = 0$, 15) $A_{43} = 0$ або $A_{42}A_{21} = 0$.

38) – 39)



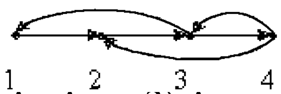
1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 7) $R_2 = A_{23}A_{32}$,
8) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 9) якщо в т. 1 немає петлі, то
$R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 11) $R_4 = A_{43}A_{34}$,
12) $A_{13} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$, 14) $R_2 = 0$ або
$A_{43}A_{32} = 0$, 15) $A_{43}A_{32} = 0$ або $R_4 = 0$, 16) $A_{24} = 0$ або $R_2 = 0$.

40) – 41)



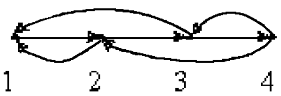
1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{24}$, 3) $A_{21} = A_{24}A_{41}$, 4) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{24}A_{41}$, 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$,
7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 9) $A_{14} = 0$ або $A_{13} = 0$.
10) $A_{23}A_{34} = A_{24}A_{43} = A_{32}A_{24} = 0$, 11) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$, 14) $R_2 = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$, 15) $A_{43}A_{32} = 0$ або
$R_4 = 0$, 16) $A_{21} = 0$ або $A_{31} = 0$

42) – 43)



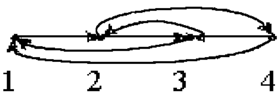
1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
5) $A_{23} = A_{31}A_{12}$ або $A_{23} = A_{34}A_{42}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, ,
8) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) $A_{42}A_{23} = 0$, , 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$,
14) $R_4 = 0$ або $A_{41} = 0$, 15) $A_{24} = 0$ або $A_{21} = 0$. 16) $R_3 = 0$ або $A_{34}A_{42} = 0$.

44)



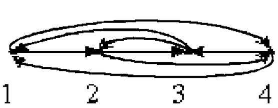
1).$A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{41} = A_{42}A_{21}$ або $A_{41} = A_{43}A_{31}$, ,
4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{23} = A_{31}A_{12}$ або $A_{23} = A_{34}A_{42}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{21}$,
7) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 8) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 9) $A_{23}A_{31} = A_{42}A_{23} = 0$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$,
11) $R_2 = 0$ або $A_{31}A_{12} = 0$, 12) $R_1 = 0$ або $A_{42}A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $R_1 = 0$ або $A_{13} = 0$, 15) $R_3 = 0$ або $A_{34}A_{42} = 0$, 16) $R_4 = 0$ або $A_{43}A_{31} = 0$.

45)



1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{24}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$ або $A_{21} = A_{24}A_{41}$,
4) $A_{34} = A_{32}A_{24}$, 5) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$,
7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$, 9) $R_4 = A_{41}A_{12}A_{24}$ або $R_4 = A_{43}A_{32}A_{24}$,
10) $A_{24}A_{41} = A_{31}A_{12} = A_{43}A_{31} = 0$, 11) $A_{14} = 0$ або $A_{34} = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або $R_3 = 0$, 13) $A_{14} = 0$ або $A_{13} = 0$, 14) $A_{34} = 0$ або $R_3 = 0$, 15) $A_{23}A_{31} = 0$ або
$R_2 = 0$, 16) $A_{43}A_{32} = 0$ або $R_2 = 0$.

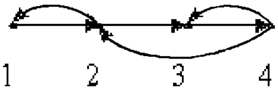
46)



1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{21} = A_{23}A_{31}$ або $A_{21} = A_{24}A_{41}$, 3) $A_{34} = A_{32}A_{24}$
або $A_{34} = A_{31}A_{14}$, 4) $R_1 = A_{14}A_{41}$, 5) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$,
6) $R_4 = A_{41}A_{14}$, 7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$, 9) $A_{12}A_{24} = 0$,

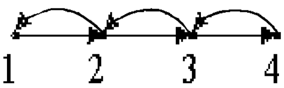
10) $A_{24}A_{41} = A_{31}A_{12} = A_{43}A_{31} = 0$, 11) $R_1 = 0$ або $A_{14}A_{43} = 0$,
12) $A_{13} = 0$ або $R_3 = 0$, 13) $R_1 = 0$ або $A_{24}A_{41} = 0$, 14) $A_{32}A_{24} = 0$ або $R_3 = 0$,
15) $A_{23}A_{31} = 0$ або $R_2 = 0$, 16) $A_{43}A_{32} = 0$ або $R_2 = 0$, 17) $R_4 = 0$ або $A_{41}A_{12} = 0$, 18) $A_{31}A_{14} = 0$ або $R_4 = 0$.

47) – 48)



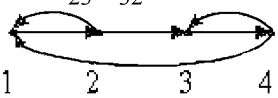
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{34}A_{42}A_{21}$,
5) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 6) $A_{41} = A_{42}A_{31}$, 7) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{21}$,
8) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 9) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 10) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 11) $A_{42}A_{23} = 0$, 12) $A_{13} = 0$
або $R_1 = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $A_{41} = 0$ або $R_1 = 0$, 15) $A_{32} = 0$ або
$R_3 = 0$.

49) – 51)



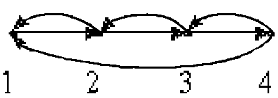
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{32}A_{21}$,
5) $A_{41} = A_{43}A_{32}A_{21}$, 6) $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 7) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{21}$, 8) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 9) $R_2 = A_{21}A_{12}$ або $R_2 = A_{23}A_{32}$, 10) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) $A_{13} = 0$ або $R_1 = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 14) $A_{31} = 0$ або $R_1 = 0$,
15) $A_{24} = 0$ або $A_{23}A_{32} = 0$, 16) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 17) $A_{42} = 0$ або $R_4 = 0$,
18) $A_{42} = 0$ або $A_{23}A_{32} = 0$.

52)



1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{34}A_{41}$,
5) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{21}$, 8) $R_2 = A_{21}A_{12}$,
9) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 10) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 11) $A_{31} = 0$ або $R_3 = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або $R_1 = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $R_2 = 0$, або $A_{42} = 0$.

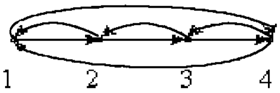
53)



1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{32}A_{21}$ або $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 5) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{21}$,
7) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 8) $A_{41}A_{12} = 0$ або $A_{21}A_{12} = 0$, 9) $R_2 = A_{21}A_{12}$ або $R_2 = A_{23}A_{32}$,
10) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) $A_{13} = 0$ або $R_1 = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 14) $A_{31} = 0$ або $R_1 = 0$, 15) $A_{24} = 0$
або $A_{23}A_{32} = 0$, 16) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 17) $A_{34}A_{41} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$,

18) $R_4 = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$, 19) $A_{43}A_{32} = 0$ або $A_{23}A_{32} = 0$.

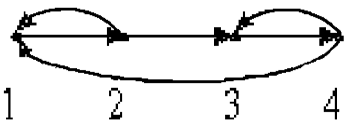
54)



1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$ або $A_{13} = A_{14}A_{43}$, 2) $A_{24} = A_{23}A_{34}$ або $A_{24} = A_{21}A_{14}$,
3) $A_{31} = A_{32}A_{21}$ або $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 4) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$,
5) $R_1 = A_{12}A_{21}$ або $R_1 = A_{14}A_{41}$, 6) $R_2 = A_{21}A_{12}$ або $R_2 = A_{23}A_{32}$,
7) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 8) $R_4 = A_{41}A_{14}$ або $R_4 = A_{43}A_{34}$,
9) $A_{12}A_{21} = 0$ або $A_{12}A_{23} = 0$, 10) $A_{12}A_{21} = 0$ або $A_{32}A_{21} = 0$,
11) $A_{12}A_{23} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 12) $A_{32}A_{21} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$,
13) $A_{23}A_{32} = 0$ або $A_{23}A_{34} = 0$, 14) $A_{23}A_{32} = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$,
15) $A_{23}A_{34} = 0$ або $A_{43}A_{34} = 0$, 16) $A_{43}A_{32} = 0$ або $A_{43}A_{34} = 0$,
17) $A_{41}A_{14} = 0$ або $A_{21}A_{14} = 0$, 18) $A_{21}A_{14} = 0$ або $A_{21}A_{12} = 0$,
19) $A_{41}A_{12} = 0$ або $A_{41}A_{14} = 0$, 20) $A_{21}A_{14} = 0$ або $A_{21}A_{12} = 0$,
21) $A_{14}A_{41} = 0$ або $A_{14}A_{43} = 0$, 22) $A_{14}A_{43} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$,
23) $A_{34}A_{43} = 0$ або $A_{34}A_{41} = 0$, 24) $A_{34}A_{41} = 0$ або $A_{14}A_{41} = 0$.

Умови для розглядуваних кілець отримуються в ході наступних міркувань. Зупинимось, наприклад, на кільці з сагайдаком

52)



Так як кільце A – нетерове, то за лемою Накаями циклічний бімодуль A_{14} строго включає в себе підмодуль $A_{14}R_4 = R_1A_{14}$. Із точки 1 в точку 4 немає стрілки, отже $A_{14}/(A_{14}R_4 + A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34}) = 0$ і $A_{14} = A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34}$. Із точки 1 в точку 3 немає стрілки, отже $A_{14}/(R_1A_{13} + A_{12}A_{23} + A_{14}A_{43}) = 0$ і $A_{13} = A_{12}A_{23} + A_{14}A_{43}$. Із точки 2 в точку 4 немає стрілки, отже $A_{24}/(A_{21}A_{14} + R_2A_{24} + A_{23}A_{34}) = 0$ і $A_{24} = A_{21}A_{14} + A_{23}A_{34}$.

Маємо $A_{13} = A_{12}A_{23} + (A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34})A_{43}$.

Так як $A_{12}A_{23} \supseteq (A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34})A_{43}$, то 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 2). $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$; 3). $A_{24} = A_{23}A_{34}$.

Аналогічно 4) $A_{31} = A_{34}A_{41}$; 5) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$; 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$.

В точці 1 немає петлі, тому $R_1/(R_1^2 + A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{14}A_{41}) = 0$. Тоді за лемою Накаями $R_1 = A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{14}A_{41}$. Враховуючи рівності 1)-6) отримаємо:

7) $R_1 = A_{12}A_{21}$. Повністю аналогічно

8) $R_2 = A_{21}A_{12}$; 9) $R_3 = A_{34}A_{43}$; 10) $R_4 = A_{43}A_{34}$.

За лемою 1 модуль P_1 – ланцюговий.

$$P_1R^2 = (R_1, A_{12}R_2, A_{13}, A_{14}). \quad P_1R^3 = (R_1^2 + A_{13}A_{31}, A_{12}R_2, A_{13}R_3, A_{14}).$$

Якщо $R_1 \neq 0$ і $A_{13} \neq 0$, то за лемами 2 і 3 $P_1R^2 / P_1R^3 = u_1 + u_3$, що неможливо для ланцюгового модуля.

Отже, маємо 11) $R_1=0$ або $A_{13}=0$. Аналогічно, розглянувши ланцюговий модуль P_3 і його підмодулі, отримаємо 12) $R_3=0$ або $A_{31}=0$. Ті ж міркування щодо лівих ланцюгових модулів Q_2 і Q_4 приводять до умов: 13) $A_{24}=0$ або $R_4=0$ і 14) $R_2=0$ або $A_{42}=0$.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.
2. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.
3. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.
4. Michler G. Structure of semi-perfect hereditary noetherian rings // J.Algebra. – 1969. – V. 13. – P. 327-344.
5. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. – К.: Вища шк., 1980. – 192 с.
6. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.
7. Morita K., Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. 1958. – V. 6. – P. 83-142.
8. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Нетеровы бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1988. – Т.40, №4. – С. 435-440.
9. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.
10. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // К., 1975. – 58 с. – (Препр. АН Украины. Ин-т математики; 75.1).
11. Яременко Ю.В. Мінори четвертого порядку нетерових бірядних кілець з ациклічним базовим сагайдаком // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2001. - №1. – С. 67-74.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 20 жовтня 2004 р.