УДК 519.17

АЛГЕБРИ ГРАФА І ВІДОБРАЖЕННЯ $B^{(Q)}$

К.М.Шевченко

У цій роботі розглядається зв'язок подвійних суміжнісних алгебр довільного графа та його гомеоморфного образу. Отримані результати узагальнюються на випадок симетрично орієнтованих симетрично 1-мічених графів без кратних дуг з петлею в кожній вершині.

In this work is considered the connection of double adjacency algebras of any graph and its homeomorphic image. Received results are generalized for symmetrically oriented symmetrically 1-marked graphs without multiple arcs and with one loop in each vertex.

Вступ. Проблема ізоморфізму графів тісно пов'язана з теорією груп підстановок, для яких існують комутаторні алгебри, описані у Вейля [1]. Одним з напрямків дослідження цієї проблеми є застосування лінійної асоціативної алгебри, яка дає систему інваріантів графа, настільки сильну, що перші знайдені графи, для яких застосування цієї алгебри не розв'язало проблеми ізоморфізму, мали порядок 26 [2]. Алгебри графів дозволяють розв'язувати в комплексі проблеми ізоморфізму, побудови групи автоморфізмів, повної системи інваріантів графа та знаходження всіх графів даного порядку, для яких дана група підстановок є групою автоморфізмів [3-5]. Необхідність ідентифікації графів виникає і в теорії і безпосередньо з практичних проблем, зокрема в процесі автоматизації інформаційної служби в хімії. Вейсфейлер і Леман в 1968 р.[6] спробували розв'язати поставлену перед ними хіміками проблему пошуку алгоритму канонізації графа саме за допомогою алгебри графа.

Ще в 1959 р. Бос і Меснер [7] описали множину матриць, яка тепер називається стандартним базисом матричної алгебри, і побудували ряд конструкцій, які дають можливість для практичних застосувань. Ідейно це започатковано ще в 1939 р. У вивчення подібних об'єктів великий внесок зробив Хігмен у своїх працях про когерентні конфігурації [8-9]. У Біггса [10] описано суміжнісну алгебру графа. За аналогією описана в [6] алгебра графа нижче називається подвійною суміжнісною. За її допомогою проблему ізоморфізму та пов'язані з нею проблеми розв'язано для класу квазізовніплощинних графів (KVP-графів) [11,3-5], а потім і для класів деяких їх φ-образів [12-13].

Ці класи графів замкнені відносно гомеоморфізмів [14]. Дана стаття присвячена питанням зв'язку між алгебрами графа G і його гомеоморфного образу і між відповідними алгебрами графа $G_й$, тінню якого є граф G, і утвореного з нього графа меншого порядку. Викладені в цій статті результати потрібні, щоб обгрунтувати розв'язання проблеми ізоморфізму для класів деяких φ-образів квазізовніплощинних графів за допомогою алгебр. Ці результати доповідались на П'ятій Міжнародній Науковій Конференції імені академіка М.Кравчука [15].

1. Означення [16]. *Подвійною лінійною асоціативною алгеброю над по-лем P називається система* $(A,\oplus,\otimes,\circ,\{\omega_a / a \in P\})$, *за умови, що системи* $(A,\oplus,\otimes,\{\omega_a / a \in P\})$ *і* $(A,\oplus,\circ,\{\omega_a / a \in P\})$ *є лінійними асоціативними алгебрами над полем P.*

Нехай M_n – множина всіх квадратних матриць порядку n над полем Q, $\circ$- поелементне множення матриць.

Твердження 1 [16]. *Система* $(M_n,\div,\bullet,\circ\{\omega_q / q \in Q\})$, $\omega_q(M)=qM$, $q \in Q$, *є по-двійною лінійною асоціативною алгеброю над полем Q.*

Позначимо через Å будь-яку підалгебру алгебри $(M_n,\div,\circ,\{\omega_q / q \in Q\})$, а через Ä - будь-яку підалгебру алгебри $(M_n,\div,\bullet,\circ\{\omega_q / q \in Q\})$.

Означення. *Стандартним базисом [16] алгебри Å називається множина* $\{E_\mu\}_{\mu=1}^{r}$ *її ненульових матриць, для якої виконується умова*

$$(\forall \mu,\mu\ )(\mu,\mu' \in N_r)\left(E_\mu \circ E_{\mu'} = \begin{cases} E_\mu, \mu' = \mu, \\ 0, \mu' \neq \mu \end{cases}\right). \qquad (1)$$

Різні стандартні базиси однієї алгебри можуть відрізнятися не більш ніж упорядкуванням (нумерацією) їх елементів. Нижче скрізь розглядається той стандартний базис, нумерація елементів якого зручна для даного доведення. Це не обмежує загальності висновків.

Означення [16]. *Зростаючою послідовністю алгебр Å, породженою множиною* $\{M_l\}_{l=1}^{s}$, *називається послідовність*

$$A_1, A_2, \ldots, A_t, \ldots, \qquad (2)$$

де $A_1 = \overset{\circ}{A}(\{M_l\}_{l=1}^{s})$, $A_{t+1} = \overset{\circ}{A}(\{E_{t,\mu}\}_{\mu=1}^{s} \cup \{E_{t,\mu'} \bullet E_{t,\mu''} : \mu',\mu'' \in N_{r_t}\})$, *(3)* $\{E_{t,\mu}\}_{\mu=1}^{s}$ - *стандартний базис алгебри* A_t, *t=1,2,… .*

Означення [16]. *Зростаючою послідовністю різних алгебр Å, породженою множиною* $\{M_l\}_{l=1}^{s}$, *називається максимальна по включенню підпослідовність послідовності (2), всі елементи якої різні.*

Теорема 1 [16]. *Зростаюча послідовність різних алгебр Å, породжена множиною* $\{M_l\}_{l=1}^{s}$, *закінчується алгеброю Ä(*$\{M_l\}_{l=1}^{s}$*).*

2. Нижче мова йде про неорієнтовані графи G без кратних ребер і про орієнтовані графи Gй без кратних дуг.

Означення [16]. *1-міченим графом називається пара* $(G_й, f_й)$, $f_й$: $G_й^{1} \to N$, $G_й^{0} = \{a_i\}_{i=1}^{n}$, *- множина вершин,* $G_й^{1}$ *– множина дуг графа* $G_й$, $f_й(G_й^{1}) = \{\tau_\iota\}_{\iota=1}^{b}$ *- множина міток дуг графа* $G_й$.

Означення [16]. *Орієнтований граф* $G_й$ *називається симетрично орієнтованим, якщо* $(\forall a_i, a_j \in G_й^{0})((a_i a_j) \in G_й^{1} \Rightarrow ((a_j a_i) \in G_й^{1})$.

Означення [16]. *Симетрично орієнтований 1-мічений граф називається симетрично 1-міченим, якщо* $(\forall a_i, a_j, a_k, a_l \in G_й^{0})((f_й((a_i a_j)) = f_й((a_k a_l)) \Rightarrow f_й((a_j a_i)) = f_й((a_l a_k))) \wedge (k \neq l \Rightarrow f_й((a_i a_i)) \neq f_й((a_l a_k))))$.

Число $\tau_\iota = f_й((a_i a_j))$ називається міткою дуги $(a_i a_j)$.

Нижче скрізь під $G_й$ розуміємо симетрично орієнтований симетрично 1-мічений граф.

Означення [16]. *Тінню графа $G_й$ називається простий граф G з тими ж множиною вершин і суміжністю, що і в графі $G_й$.*

Степінь вершини a_i в графі G позначається через $\rho(a_i, G)$. Граф $G_й$ задається набором $\{A_{u,\tau_t}\}_{t=1}^{b}$ τ-матриць, що відповідають міткам його дуг і в сумі дають матрицю A=A(G)=(a_{ij}) суміжності вершин графа G.

Означення [16]. *Ізоморфізмом одного графа $G_й$ на другий називається такий ізоморфізм тіні G графа $G_й$ на тінь відповідного графа, який зберігає мітки дуг графа $G_й$.*

Проблеми ізоморфізму і симетрії довільних скінченних графів з кратними чи зваженими ребрами зводяться до тих же проблем для графів $G_й$.

Означення. *Головним орбіталом графа $G_й$ називається орбітал, тобто система транзитивності групи автоморфізмів графа $G_й$ на множині пар суміжних вершин графа $G_й$.*

Означення. *Подвійною суміжнісною алгеброю графа $G_й$ називається алгебра $\ddot{A}\left(\{A_{u,\tau_t}\}_{t=1}^{b} \cup \{E_n, J_n\}\right)$, де E_n, J_n – одиничні елементи повної матричної алгебри матриць порядку n відносно операцій звичайного і поелементного множення відповідно.*

Скрізь нижче під алгеброю графа розуміємо його подвійну суміжнісну алгебру.

Означення. *Будемо говорити, що алгебра графа $G_й$ розділяє пари (a_t ,a_s), (a_k ,a_l) (дуги (a_ta_s), (a_ka_l)$\in G_й^1$), якщо в стандартному базисі алгебри графа $G_й$ існує матриця $E_\mu=(e_{\mu,ij})$, в якій $e_{\mu,ts}=1$, $e_{\mu,kl}=0$; не розділяє дуги (a_ta_s), (a_ka_l), якщо існує така матриця $E_\mu=(e_{\mu,ij})$, в якій $e_{\mu,ts}= e_{\mu,kl}=1$.*

Означення. *Будемо говорити, що алгебра графа $G_й$ визначає орбітал O графа $G_й$, якщо вона не розділяє пари (a_t ,a_s), (a_k ,a_l) (дуги (a_ta_s), (a_ka_l)$\in G_й^1$), якщо (a_ta_s), (a_ka_l) $\in$O, і розділяє пари (a_t,a_s), (a_k,a_l), якщо (a_ta_s) $\in$O, (a_ka_l) $\notin$O.*

3. Розглянемо довільний зв'язний граф $G_й$, тінь G якого має хоча б одну вершину, степінь якої більший 2. Позначимо через c_j його підграфи, визначені наступними умовами. Тінь кожного підграфа c_j складається з вершин і ребер простого ланцюга або простого цикла графа G, всі вершини якого, крім кінцевих, мають степінь 2 в G, а степені кінцевих – 1 або більші 2. Нехай c_j, j=1(1)k, - всі підграфи графа $G_й$, визначені цими умовами.

Позначимо через S_1 множину дуг усіх підграфів c_j, j=1(1)k, включаючи петлі в їх вершинах, а через S_2 – множину всіх інших дуг графа $G_й$.

В [6] доведено факт, сформульований тут у вигляді наступного твердження.

Твердження 2. *Існує така нумерація вершин графа $G_й$, при якій діагональні матриці E_μ стандартного базису його алгебри визначають розбиття квадратної матриці порядку n на блоки: для кожного діагонального блока існує діагональна матриця E_μ , в якій вся головна діагональ цього блока* *заповнена одиницями, а всі інші елементи в E_μ - нулі. Ненульові елементи будь-якої недіагональної матриці з того ж стандартного базису алгебри графа $G_й$ всі знаходяться в одному з блоків цього розбиття.*

Нижче будемо розглядати ту нумерацію вершин графа $G_й$, яка описана в твердженні 2.

Лема 1. *Алгебра графа $G_й$ розділяє будь-які дві петлі $(a_sa_s)\in S_1$, і $(a_ra_r)\in S_2$.*

*Доведення***.** Нехай $(a_la_l)\in S_1$, $\rho(a_l,G)\le 2$. Оскільки $\rho(a_r,G)>2$, то вже алгебра графа G розділяє ребра, інцидентні вершинам a_r, a_l, бо ці вершини мають різні степені в графі G . Це доведено в [6]. Алгебра графа G є підалгеброю алгебри графа $G_й$. Елементи стандартного базису алгебри графа G є сумами елементів E_μ стандартного базису алгебри графа $G_й$. Тому і алгебра графа $G_й$ розділяє петлі (a_ra_r), (a_la_l).

Нехай тепер (a_la_l), $(a_sa_s)\in S_1$, $\rho(a_l,G)\le 2$, $\rho(a_s,G)>2$, $(a_ra_r)\in S_2$. Розглянемо будь-яку дугу (a_ra_m) графа $G_й$ і дугу (a_sa_l). Нехай $E_\mu=(e_{\mu,ij})$ – будь-яка матриця стандартного базису алгебри графа $G_й$. Нехай E_1 - матриця, в якій $e_{1,sl}=1$. Тоді з твердження 2 випливає, що $e_{1,rm}=0$, бо $\rho(a_l,G)\le 2$, $\rho(a_m,G)>2$. Значить, алгебра графа $G_й$ розділяє дуги (a_sa_l) і (a_ra_m). Якщо степені вершин a_s і a_r в графі G різні, то алгебра графа $G_й$ розділяє петлі (a_sa_s), (a_ra_r). Якщо ж $\rho(a_s,G)=\rho(a_r,G)$, то розглянемо матрицю $D=(d_{ij})$, яка є сумою таких матриць E_μ, що для кожної дуги (a_ra_t) графа $G_й$ в цю суму входить матриця E_μ, в якій $e_{\mu,rt}=1$, і навпаки, для кожного $d_{rp}=1$ (a_ra_p) – дуга графа $G_й$, інцидентна вершині a_r. Матриця E_1 не входить в цю суму, бо $e_{1,rm}=0$. Тому в s-тому рядку матриці D менше одиниць, ніж в r-тому. Дійсно, кількість одиниць в її r-тому рядку рівна $\rho(a_r,G)$, що дорівнює $\rho(a_s,G)$. Але в s-тий рядок матриці D не входить 1, яка позначає дугу (a_sa_l), бо $e_{1,sl}=1$. Матриця D^T, отримана з матриці D транспонуванням, також належить до алгебри графа $G_й$. В матриці $D\cdot D^T$ кожен елемент головної діагоналі дорівнює сумі елементів рядка матриці D з тим же номером. Тому s-тий і r-тий елементи її головної діагоналі різні. Матриця $D\cdot D^T$ належить до алгебри графа $G_й$, тому є лінійною комбінацією елементів E_μ. А тому знайдеться діагональна матриця E_μ, в якій $e_{\mu,ss}=1$, $e_{\mu,rr}=0$. Таким чином алгебра графа $G_й$ розділяє петлі (a_sa_s) та (a_ra_r).

Лема 2. *Алгебра графа $G_й$ розділяє будь-які дві дуги $(a_la_t)\in S_1$, $(a_ra_m)\in S_2$.*

*Доведення***.** Щодо дуг (a_ra_m), $(a_la_s)\in S_1$, $\rho(a_s,G)>2$, доведення леми 2 є частиною доведення леми 1. А якщо $\rho(a_l,G)\le 2$, $\rho(a_t,G)\le 2$, то алгебра графа $G_й$ розділяє петлі (a_la_l) і (a_ra_r), а також (a_sa_s) і (a_ma_m), бо $\rho(a_r,G)>2$, $\rho(a_m,G)>2$. З твердження 2 випливає, що тоді алгебра графа $G_й$ розділяє і дуги (a_la_t) та (a_ra_m).

Означення. *Через $b^{(1)}(G)$ позначимо граф, отриманий з G видаленням зірки (a_i), $\rho(a_i,G)=1$, через $b^{(2)}(G)$ – граф, отриманий з G видаленням зірки (a_j), $\rho(a_j,G)=2$, (a_ja_k), $(a_ja_l)\in(a_j)$, якщо $(a_ka_l)\in G^1$, і заміною зірки (a_j) ребром (a_ka_l), якщо $(a_ka_l)\notin G^1$.*

Означення. *Через $b^{(q)}(G_й)$, $q=1,2$, позначимо граф, тінь якого співпадає з $b^{(q)}(G)$.*

Позначимо через $G_{й,a}$ граф, отриманий з $G_й$ приписуванням всім його дугам нових міток. Однакові мітки отримують ті й лише ті дуги, які не розділяє алгебра графа $G_й$.

За допомогою перетворень $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ видалимо з графа $G_й$ всі дуги, що належать до S_1 , та всі ізольовані вершини, які при цьому утворяться. Потім знову приєднаємо до утвореного графа $(b^{(q)})^s(G_й)$ всі щойно видалені вершини і петлі при них (тільки для спрощення подальших доведень) а також нові дуги $(a_l a_d)$ для тих a_l , $a_d \in c_j^0$, $l\neq d$, що $\rho(a_l ,G)>2$, $\rho(a_d ,G)>2$, $(a_l a_d)\notin G_й^1$. Якщо пара (a_t ,a_s), $\rho(a_t ,G)>2$, $\rho(a_s ,G)>2$, a_t , $a_s\in c_1^0$, належить до множини вершин не лише графа c_1 , а графів $c_1,c_2,\ldots,c_r$, то позначимо через $G_{й,t,s}$ об‘єднання всіх таких підграфів $c_1,c_2,\ldots,c_r$ (рівність t=s допускається), з мітками, які їх дуги мають у графі $G_{й,a}$. Припишемо всім дугам $(a_t a_s)\in c_j^0$, $\rho(a_t ,G)>2$, $\rho(a_s ,G)>2$, $j=1(1)k$, що належать до новоутвореного графа, нові мітки, яких не має жодна інша дуга графа $G_й$. Двом дугам, які належали і до графа $G_й$, приписуємо однакові мітки тоді й лише тоді, коли алгебра графа $G_й$ їх не розділяє, а двом приєднаним дугам $(a_l a_d)$, (a_t ,a_s) – коли алгебра графа $G_й$ не розділяє пари вершин (a_l ,a_d), (a_t ,a_s) і коли відповідні їм підграфи $G_{й,l,d}$, $G_{й,t,s}$ ізоморфні, причому існує такий ізоморфізм $\psi:G_{й,l,d} \to G_{й,t,s}$, що $\psi(a_l)=a_t$, $\psi(a_d)=a_s$. Побудувати ізоморфізм підграфа $G_{й,l,d}$ на підграф $G_{й,t,s}$ легко, бо ці графи квазізовніплощинні, а для квазізовніплощинних графів існує ефективний алгоритм встановлення їх ізоморфності чи неізоморфності [5]. Приписування нових міток визначає відношення еквівалентності Φ на множині всіх дуг $(a_t a_s)$, $\rho(a_t , G)>2$, $\rho(a_s , G)>2$, a_t ,$a_s\in c_j^0$, $j=1(1)k$. Дуги з однаковими мітками еквівалентні, з різними – ні. Утворений таким чином граф позначимо через G_a .

Зауваження 1. Графи $G_й$ і $G_{й,a}$ мають однакові групи автоморфізмів, оскільки подвійна суміжнісна алгебра довільного графа не розділяє подібні пари його вершин. Аналогічно, і введення нових міток дуг графа $G_й$ і приєднаних дуг, яке визначає відношення Φ, не порушує симетрії графа $G_й$.

Нижче еквівалентними називаються ті й лише ті дуги графа G_a , які знаходяться у відношенні Φ.

Теорема. *Алгебра графа $G_й$ визначає головні орбітали графа $G_й$ тоді й лише тоді, коли алгебра графа G_a визначає головні орбітали графа G_a і є підалгеброю алгебри графа $G_й$.*

Доведення. Необхідність. Нехай алгебра графа $G_й$ визначає його головні орбітали. Тоді, якщо вона не розділяє пари (a_l ,a_d), (a_t ,a_s), для яких $(a_l a_l)$, $(a_d a_d)$, $(a_t a_t)$, $(a_s a_s)\in S_1$, $\rho(a_l ,G)>2$, $\rho(a_d , G)>2$, $\rho(a_t , G)>2$, $\rho(a_s , G)>2$, то петлі $(a_l a_l)$, $(a_t a_t)$ при l=d, t=s а також, при $(a_l a_d)$, $(a_t a_s)\in G_й^1$,дуги $(a_l a_d)$, $(a_t a_s)$ еквівалентні.

Нехай тепер $(a_l a_d)$, $(a_t a_s)$ - такі еквівалентні дуги графа G_a,еквівалентних дуг відповідні пари вершин не можуть належати до од-ного орбіталу, бо такі дуги мають різні мітки в графі G_a). Тоді алгебра графа G_a не розділяє ці дуги, як і подвійна суміжнісна алгебра будь-якого графа.

Нехай тепер $(a_l ,a_d)\in$O, $(a_p ,a_q)\notin$O, але дуги $(a_l a_d)$, $(a_p a_q)$ еквівалентні в графі G_a . Припустимо, що алгебра графа G_a не розділяє $(a_l a_d)$ і $(a_p a_q)$, $(a_p a_q)\in G_a^1$. Якщо $(a_l a_d)$, $(a_p a_q)\in G_й^1$, то (a_l ,a_d), (a_p ,a_q) належать до головних орбіталів графа $G_й$. Якщо припустити, що всі вони належать до одного орбіталу графа $G_й$, то автоморфізм θ графа $G_й$, який відображає (a_l ,a_d) на (a_p ,a_q), індукує автоморфізм θ_a графа G_a , бо в лемі 2 доведено, що алгебра графа $G_й$ розділяє будь-які дві петлі, одна з яких належить до S_1, а друга – до S_2 . Отже, множина вершин зв'язної частини графа G_a складає деяку множину повних орбіт групи автоморфізмів графа $G_й$. Але автоморфізм θ_a відображає (a_l ,a_d) на (a_p ,a_q) , отже, ці пари належать до одного орбіталу графа G_a всупереч умові. Якщо $(a_l a_d)\notin G_й^1$, $(a_p a_q)\in G_й^1$, то $(a_l a_d)$ і $(a_p a_q)$ в графі G_a нееквівалентні, адже алгебра графа $G_й$ розділяє будь-яку пару дуг $(a_l a_d)\notin G_й^1$, $(a_p a_q)\in G_й^1$. Це також суперечить умові.

Нехай тепер $(a_l a_d)\notin G_й^1$, $(a_p a_q)\notin G_й^1$. За означенням відношення Φ з того, що $(a_l a_d)$ і $(a_p a_q)$ еквівалентні, випливає, що відповідні їм графи $G_{й,l,d}$ та $G_{й,p,q}$ ізоморфні. Звідси випливає, що для кожної дуги графа $G_{й,l,d}$ знайдеться така дуга графа $G_{й,p,q}$, що алгебра графа $G_й$ не розділяє ці дуги. Але алгебра графа $G_й$ визначає головні орбітали графа $G_й$, тому існує автоморфізм графа $G_й$, який відображає кінці однієї з цих дуг на кінці другої. Але кожен такий автоморфізм відображає весь підграф $G_{й,l,d}$ на $G_{й,p,q}$ і пару (a_l ,a_d) на (a_p ,a_q). Це відомо з загальної теорії ізоморфізму графів. Тому і в цьому випадку залишаються справедливими міркування, проведені вище для $(a_l a_d)$, $(a_p a_q)\notin G_й^1$, і висновок, що $(a_l a_d)$ і $(a_p a_q)$ належать до одного орбіталу графа G_a всупереч умові. Отже, алгебра графа G_a визначає його головні орбітали.

Достатність. Нехай алгебра графа G_a визначає головні орбітали графа G_a, $(a_l a_d)$ і $(a_p a_q)$ – дві дуги графа $G_й$, які є і в графі G_a , тільки, можливо, з іншими мітками. Якщо пари (a_l ,a_d) та (a_p ,a_q) належать до одного орбіталу графа $G_й$, то алгебра графа $G_й$ їх не розділяє, як і подвійна суміжнісна алгебра будь-якого графа. Нехай тепер пари (a_t ,a_s) та (a_r ,a_m) належать до різних орбіталів графа $G_й$. Якщо припустити, що алгебра графа $G_й$ їх не розділяє, то їх не розділяє і алгебра графа G_a , бо за умовою алгебра графа G_a є підалгеброю алгебри графа $G_й$. Але тоді вони належать до одного орбіталу O графа G_a , бо за умовою алгебра графа G_a визначає головні орбітали графа G_a . Нехай θ_a – такий автоморфізм зв'язної частини графа G_a , що $\theta_a(a_t)=a_r$, $\theta_a(a_s)=a_q$. Нехай тепер (a_l ,a_d) та (a_p ,a_q) – такі пари вершин графа G_a , що a_l , $a_d\in c_1^0$, $\rho(a_l ,G)>2$, $\rho(a_d ,G)>2$, $a_p ,a_q\in c_2^0$, $\rho(a_p ,G)>2$, $\rho(a_q ,G)>2$, $\theta_a(a_l)=a_p$, $\theta_a(a_d)=a_q$. (За означенням відношення Φ такі пари вершин будь-який автоморфізм зв'язної частини графа G_a може відображати лише одну на другу, а не на іншу пару вершин графа G_a). Тоді за означенням відношення Ф відповідні цим парам вершин графи $G_{й,l,d}$ та $G_{й,p,q}$ ізоморфні, причому існує такий ізоморфізм ψ: $G_{й,l,d} \rightarrow G_{й,p,q}$, що $\psi(a_l)=a_p, \psi(a_d)=a_q$. Але тоді автоморфізм θ_a можна продовжити ізоморфізмом ψ. Продовживши аналогічним чином даний автоморфізм θ_a зв'язної частини графа G_a ізоморфізмами ψ всіх графів $G_{й,l,d}$ на відповідні їм графи $G_{й,p,q}$, ми отримаємо автоморфізм графа $G_й$, який відображає (a_t, a_s) на (a_r, a_m) . Але це суперечить умові, що пари (a_t, a_s) та (a_r, a_m) належать до різних орбіталів графа $G_й$. Тому припущення, що алгебра графа $G_й$ не розділяє ці пари, приводить до суперечності. Алгебра графа $G_й$ їх розділяє. Отже, алгебра графа $G_й$ визначає головні орбітали графа $G_й$.

Зауваження 2. Теорема має місце і тоді, коли замінити граф $G_й$ простим графом G, бо простий граф можна розглядати, як симетрично орієнтований граф, всі дуги якого мають однакові мітки.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления – М., 1947. – 408 с.
2. Адельсон-Вельский Г.М., Вейсфейлер Б.Ю., Леман А.А., Фараджев И.А. Об одном примере графа, не имеющего транзитивной группы автоморфизмов // ДАН СССР, 185, 5., 1969. – С.975-976.
3. Хоменко Н.П.,Шевченко Е.Н. Полная система инвариантов KVP-графа // Теория графов. – К.: Ин-т математики АН УССР , 1977. – С.189-196.
4. Шевченко Е.Н. Группа KVP-графа // Теория графов. – К.: Ин-т математики АН УССР , 1977. – С.197-201.
5. М.П.Хоменко, К.М.Шевченко. Дослідження проблем виділення і підрахунку, ізоморфізму і симетрії графів алгебричними методами// ДАН УРСР, Сер.А, 10, 1980. – С.22-26.
6. Вейсфейлер Б.Ю.,Леман А.А. Приведение графа к каноническому виду и возникающая при этом алгебра// Сб. ВИНИТИ, Сер.2, 9, 1968. – С.12-16.
7. Bose R.C.,Mesner D.M. On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs// Ann. Math. Stat. V. 30,1959/ - P.28-38.
8. Higman D.C. Coherent configurations. I// Rend. Sem. Padova. 44, 1970. – P.1-25.Math. (Roma). V.13, London – N.Y., 1974. – P.467-477.
9. Higman D.C. Shur relations for weighted adjacency algebras // Symp. Math. (Roma). V13,London-N.Y.,1074.-P.467-477.
10. .Biggs N. Algebraic Graph Theory. – Cambridge. Cambridge Univ. Press., 1974. – 169 p.
11. Н.П.Хоменко,Е.Н.Шевченко. KVP-графы// Препринт Ин-та математики АН УССР, 77.17. – К., 1977.- 48 с.
12. Шевченко К.М. Розв'язання проблеми ізоморфізму і відшукання головних орбіталів $(KVP)_1$-графів //Матеріали 7-ої Міжнародної Наукової Конференції імені академіка М.Кравчука, К., 1998. – С.505.
13. Шевченко К.М. Розв'язання проблеми ізоморфізму для деяких φ-образів порядку n-2 максимальних зовніплощинних графів порядку n // Матеріали Українського математичного конгресу 2001, секція 1 "Алгебра і теорія чисел" – К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – С.56.
14. К.М.Шевченко. Квазізовніплощинні графи // Наукові записки КДПУ ім.В.Винниченка. Сер.:фізико-математичні науки, Вип.11, 1996. – С.27-37.

15. Шевченко К.М. Алгебри графів і відображення $b^{(q)}$ // П‘ята Міжнародна Наукова Конференція імені академіка М.Кравчука, 1996. – С.494.
16. Хоменко Н.П., Шевченко Е.Н. Алгебры графов // Структура и топологические свойства графов. Препр.81.28. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С.34-54.

Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка

Надійшло 15 квітня 2004р.