

УДК 517.98

ЗГОРТКИ З НЕПЕРЕРВНИМИ ВЕКТОРНИМИ МІРАМИ

В. О. Романов

Доводяться теореми неперервності згорток для кожної з основних топологій в просторі векторних мір.

The theorems of continuity of convolutions for every of the basic topologies in a space of vector measures are proved.

Відомо [1, 2], що для скалярних мір в топологічних лінійних просторах операція згортки має суттєве значення при побудові теорії розподілів та теорії наближень. У зв'язку з подальшим розвитком функціонального аналізу виникає потреба в дослідженні векторних мір, в тому числі неперервних [3, 4]. Згортки з такими мірами можуть бути використані при побудові розв'язків задачі Коші [5,6]. Тому дослідження згорток з неперервними векторними мірами є актуальними як для розвитку самої теорії міри, так і до застосувань до теорії розподілів, диференціальних рівнянь та теорії наближень. Метою даної статті є одержання результатів про неперервність згорток в основних топологіях простору векторних мір.

1. Згортки з векторними мірами. Під векторними мірами розуміємо зчисленно адитивні функції множини, які визначені на сигма-алгебрі борелевських підмножин повного сепарабельного метризовного топологічного лінійного простору X , приймають значення в сепарабельному банаховому просторі Y та мають скінченну повну варіацію.

Нехай m є векторною мірою. Тоді для кожного функціоналу f із спряженого до Y простору композиція $f \circ m$ цього функціоналу з m є скалярною мірою на X . Оскільки простір X є сепарабельним та метризовним, то з результатів роботи [7, с.62-63] випливає, що для кожної борелевської множини E функція $f \circ m (E - x)$ аргументу x є вимірною на цьому просторі. Таким чином, векторна функція $m (E - x)$ аргументу x є слабо вимірною на X . Оскільки простір Y , в якому вона приймає значення, є сепарабельним, то за теоремою Пеггіса [8, с. 187] ця векторна функція є також сильно вимірною. Оскільки для кожного x норма вектора $m (E - x)$ не перевищує повної напівваріації цієї векторної міри m , то ця норма є інтегрованою відносно кожної цілком скінченної скалярної міри на X з невід'ємними значеннями. Тому за теоремою Бохнера [8, с. 190] векторна функція $m (E - x)$ є інтегрованою за Бохнером відносно вказаної міри з невід'ємними значеннями. Це дає змогу ввести наступне означення.

Означення 1. Згорткою векторної міри m та скалярної знаковмінної міри ρ скінченної повної варіації називається така векторна міра $m * \rho$, значення якої на кожній борелевській множині E дорівнює різниці інтегралів Бохнера від векторної функції $m(E - x)$ аргументу x простору X відносно компонент розкладання Жордана знаковмінної міри ρ .

Зауваження 1. Дане означення є узагальненням означення згортки двох скалярних мір на X . Згортка скалярних мір на X розглядається в роботах [1, с. 150], [2, с. 44], [7, с.62-63].

Нехай H є лінійним підпростором простору X . Нагадаємо [4], що векторна міра називається H -неперервною в даній топології, якщо для кожного напрямку h з H нескінченно малі зсуви вздовж h приводять до нескінченно малої стосовно даної топології зміни векторної міри.

Нагадаємо також, що в просторі векторних мір основними є топології збіжності на системі вимірних множин, збіжності за напівваріацією та збіжності за варіацією [9].

2. Випадок топології збіжності на системі вимірних множин. Спочатку нагадаємо, що варіація $v(m)$ векторної міри m має як функція множини властивість зчисленної адитивності [7, с.104], а тому вона є мірою, причому скалярною та невід'ємною.

Нагадаємо також, що верхня грань даної сім'ї скалярних мір – це така міра, яка мажорує кожну з мір цієї сім'ї і яка не перевищує кожної з інших мажорантних мір даної сім'ї.

Позначимо через B одиничну кулю спряженого до Y простору.

Лема 1. *Варіація $v(m)$ векторної міри m співпадає з верхню гранню сім'ї невід'ємних мір $v(f m)$, що є варіаціями композицій даної векторної міри з функціоналами f , які належать множині B .*

Доведення. Із теореми Гана – Банаха випливає, що для кожної борелевської підмножини E простору X норма в просторі Y вектора $m(E)$ дорівнює $\sup\{f m(E), f \in B\}$. Оскільки $f m(E)$ не перевищує $v(f m)(E)$, то звідси легко одержати, що $v(m)$ не перевищує верхньої грані сім'ї мір $v(f m)$. З іншого боку, кожна з таких мір $v(f m)$ мажорується мірою $v(m)$, а тому верхня грань сім'ї цих мір не перевищує міри $v(m)$.

Теорема 1. *Нехай B знову є одиничною кулею спряженого до Y простору. Тоді для H -неперервності векторної міри m в топології збіжності на системі вимірних множин необхідно і досить, щоб для всіх функціоналів f з множини B скалярні міри $f m$ були H -неперервними.*

Доведення. Необхідність випливає з того факту, що композиція H -неперервної векторної міри та лінійного неперервного функціоналу є скалярною H -неперервною мірою. Обґрунтуємо достатність. Згідно з пропозицією 2 роботи [10, с. 770]» варіація H -неперервної скалярної міри теж H -неперервна. Тому з леми 1 даної статті випливає, що варіація нашої векторної міри співпадає з верхню гранню деякої сім'ї H -неперервних невід'ємних мір. Але тоді з леми 1 роботи [11, с.105] випливає, що варіація H -неперервна. Згідно з теоремою 1 роботи [11, с. 105-106], цього досить для H -неперервності самої векторної міри в топології збіжності на системі вимірних множин. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай векторна міра m є H -неперервною в топології збіжності на системі вимірних множин. Тоді її згортка з довільною*

скалярною знакозмінною мірою ρ скінченної повної варіації теж H -неперервна в топології збіжності на системі вимірних множин.

Доведення. Позначимо нашу згортку через Q . Тоді для кожної борелевської множини E простору X , довільної збіжної до нуля числової послідовності (t_n) , кожного вектора h з підпростору H та довільного функціоналу f із спряженого до Y простору величина $f(Q(E + t_n h))$ дорівнює інтегралу від функції $(f_m)(E + t_n h - x)$ аргументу x простору X відносно міри ρ .

Послідовність підінтегральних функцій є рівномірно обмеженою (вона обмежується повною варіацією міри f_m) і збігається на просторі X до функції $f_m(E - x)$ аргументу x . Тому можна застосувати теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла, звідки випливає H -неперервність скалярної міри $f(Q)$. Для завершення доведення залишається застосувати теорему 1.

3. Випадок топології збіжності за напівваріацією. Спочатку нагадаємо, що через m^h позначається зсунута векторна міра, значення якої на довільній борелевській множині E дорівнює $m(E + h)$.

Теорема 3. *Згортка H -неперервної за напівваріацією векторної міри m та довільної скалярної міри ρ скінченної повної варіації теж H -неперервна за напівваріацією.*

Доведення. Знову позначимо нашу згортку через Q . Тоді для довільного вектора h з підпростору H , кожного дійсного числа t та довільних неперерізних борелевських множин A та E величина $[(Q^h - Q)(A) - (Q^h - Q)(E)]$ дорівнює інтегралу відносно ρ від функції $[(m^h - m)(A - x) - (m^h - m)(E - x)]$ аргументу x простору X .

Підінтегральна функція мажорується повною напівваріацією векторної міри $(m^h - m)$. Звідси випливає, що норма інтеграла не перевищує добутку повної напівваріації векторної міри $(m^h - m)$ на константу, яка дорівнює повній варіації міри ρ . Але тоді норма величини $[(Q^h - Q)(A) - (Q^h - Q)(E)]$ теж не перевищує згаданого добутку. Оскільки неперервні борелевські множини A та E можна змінювати, то з урахуванням пропозиції 1 роботи [12, с. 3 Ю] одержуємо, що і повна напівваріація векторної міри $(Q^h - Q)$ не перевищує згаданого добутку. Звідси і випливає твердження теореми.

4. Випадок топології збіжності за варіацією.

Теорема 4. *Згортка H -неперервної за варіацією векторної міри m та довільної скалярної міри ρ скінченної повної варіації теж H -неперервна за варіацією.*

Доведення. Знову позначимо нашу згортку через Q . Тоді для довільного вектора h з підпростору H , кожного дійсного числа t та довільної борелевської множини E величина $(Q^h - Q)(E)$ дорівнює інтегралу відносно міри ρ від функції $(m^h - m)(E - x)$ аргументу x простору X .

Тому для довільної системи із скінченного числа неперерізних борелевських множин E_n сума норм величин $(Q^h - Q)(E_n)$ не перевищує

інтеграла відносно варіації $v(p)$ скалярної міри p від суми норм величин $(m_{th} - m)(E_{p-x})$, а ця остання не перевищує повної варіації векторної міри $(m_{th} - m)$. Тому після переходу в лівій частині нерівності до верхньої грані по множині всіх систем із скінченної кількості непереоізних бооелевських множин E_p одержуємо, що повна варіація векторної міри $(Q_{th} - Q)$ не перевищує добутку повної варіації векторної міри $(m_{th} - m)$ на константу, яка дорівнює повній варіації скалярної міри p . Звідси і випливає твердження теореми 4.

БІБЛЮГРАФІЯ

1. Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Обобщённые функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах // Тр. Моск. Матем. О-ва. –1971.–т. 24.–С. 133–174.
2. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, – М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. Романов В.А. Пределы аналитических векторных мер // Укр. Матем. Журн. – 1992. – т. 44, № 8. – С. 1133 – 1135.
4. Романов В.А. Векторные меры различных классов гладкости и их пределы // Там же. – 1995. – т. 47, № 4. – С. 512 – 516.
5. Романов В.А. Применение мер к дифференциальным уравнениям. Кировоград: Редакционно–издательский центр Кировоградского Гос. Педаг. Ун – та, 2000.–24с.
6. Романов В. О. Різні види неперервності початкової умови в задачі Коші для векторних мір // Наук. Зал. Кіров. Держ. Педаг. Ун – ту. Сер. Фіз.-матем.наук. –2002. – вип.43. – С. 79 – 82.
7. Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А, Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
8. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962.–895 с.
10. Романов В. А. Интегральные операторы, порождаемые H -непрерывными мерами//Укр. Матем. Журн.– 1989. –т, 41, №6.–С. 769–773.
11. Романов В. О. Напрями неперервності та границі векторних мір // Наук. Зап. Кіровогр. Держ. Педаг. Ін-ту. – 1995. –т. 10. – С. 104 –108.
12. Романов В.А. О неэквивалентности трёх определений непрерывных направлений для векторных мер//Матем. Заметки.– 1995. –т, 57, №2.– С. 310 –312.

*Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка*

Надійшло 6 квітня 2004р.