УДК 619.1

ПРО ХАРАКТЕРИСТИКИ АРЕХ-ГРАФІВ.

В. І. Петренюк ,Т.В. Петровська

Запропоновано дві нові характеристики множини точок планарних графів, які породжені числом досяжності циеі множини для дослідження арех-графів.

Two new characteristics set of points planar graph which are generated by the reachability number of this set for investigation apex-graphs

В роботах В. Мохи [6] було введено поняття арех- графа, який можливо створити із площинного графа та зірки шляхом φ-перетворення заданого на деякій множині точок X площинного графа G та кінцевих вершинах зірки St(g). В [4,5] було отримано верхню оцінку роду шляхом вивчення структурних властивостей множині точок X площинного графа G.

Метою подальшоі роботи стало розширення характеристики $\theta_G(X)$ множини точок X та введення нової $\partial\theta(G,X)$ –характеристики .

Основні поняття та позначення узяті із [1]$\div$[3]. Для неорієнтованого без петель графа G, $G = G^0 \cup G^1$, розглянемо мінімальне укладання $f : G \to \sigma_V$, де V=$\gamma(G)$, σ_V-замкнутий орієнтовний многовид, $S_G(G^0, f) = \sigma_v \setminus f(G^0 \cup G^1)$.

На множині 2–клітин $\{\Delta_i\}_1^N$, N=$\left|S_G(G^0, f)\right|$, визначаємо граф $F(G^0, \sigma_V)$ - граф межування 2-кліток кліткового укладення графа G в 2-многовид σ_V. Тобто, дві вершини графа межування суміжні тільки за наявності спільного ребра їхніх границь відповідних 2-клітин. Для множини точок X, $X \subset G^0 \cup G^1$, визначають мінімальну множину 2-кліток $\Delta_i \in S_G(X)$ на границі яких "виходять" точки із X графа G. В [4] було введено $\theta_G(X)$ – характеристику множини $S_G(X)$, яка стосувалася наявності у трьох 2-кліток спільної вершини, або ними утвореного простого цикла довжини ≥ 3 графа $F(G^0, \sigma_V)$.

Задача полягає у введення іншої характеристики $\partial\theta(G,X)$ множини точок X та її використання з метою "приклеювання" ручки h до них так, щоб замість чотирьох 2-клітин мати дві 2-клітини із $\sigma_{V+1}\setminus f'(G)$ на границі яких виходять всі ті точки, що виходили на границі чотирьох 2-кліток.

Означення 1: Будемо говорити, що множина точок X, $S_G(X)=\{\Delta_i\}_1^3$, із числом досяжності $t_G(X)=3$ та $\theta_G(X)=0$ має $\partial\theta_G(X)=1$, якщо виконуються наступні умови:

1) $(\bigcap_{i=1}^{3} \partial\Delta_i = \varnothing) \Lambda (f : G \to \sigma_V ; f -$реалізує $t_G(X))$;
2) $(\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2 \cap (G^1 \cup G^0) \neq \varnothing) \Lambda (\partial\Delta_3 \cap \partial\Delta_2 \cap (G^1 \cup G^0) \neq \varnothing)$;
3) $(\exists\Delta_0)(\Delta_0 \in \sigma_V(G, f) / S_G(X))\left[(\partial\Delta_0 \cap \partial\Delta_i \cap G \in e_i)(i = 1,2,3)\right]$;

4) $\left(\exists f' : G' \to \sigma_{V+1}\right)\left[(f'(e_1 \cup e_3) \subset h(\Delta_1, \Delta_0)) \wedge (f' \mid G / \{e_1, e_{13}\} = f \mid G / \{e_{13}\})\right]$;

де $h(\Delta_1, \Delta_0)$ - трубка ("ручка") приклеєна φ-перетворенням до 2-кліток Δ_0 та Δ_2; причому для такого укладення f′ виконуються співвідношення:

а) $f'(\partial\Delta_2 / \partial\Delta_0) \cup f'(\partial\Delta_0 / (\partial\Delta_1 \cup \partial\Delta_2 \cup \partial\Delta_3) \cup f'(e_1) \cup f'(e_2)) = \partial\Delta_1'$;

б) $f'(\partial\Delta_1 / e_1) \cup f'(e_2) \cup f'(\partial\Delta_2 \cap \partial\Delta_0) \cup f'(\partial\Delta_3 / \partial\Delta_0) \cup f'(e_3) \cup f(\partial\Delta_2 \cap \partial\Delta_0) = \partial\Delta_2'$;

в) $(f'(X) \subseteq \partial\Delta_1' \cup \partial\Delta_2'') \wedge (f'(X) \cap \partial\Delta_1' \neq \varnothing) \vee (f'(X) \cap \partial\Delta_2' \neq \varnothing)$,

де $\Delta_i \in \sigma_{V+1}(G, f')$.

Означення 1.0. Будемо говорити, що множина точок X, де $X \subset G^0 \cup G^1$, $S_G(X)=\{\Delta_i\}_1^t$, $t=t_G(X)$–число досяжності множини X на σ_V, $t \geq 3$, та θ-характеристикою $\theta_G(X)=0$, має $\partial\theta$ характеристику $\partial\theta_G(X)$ рівну k, k>0, якщо існує 2-кліткове вкладення $f' : G \to \sigma_{V+k}$, де V=V(G) – род графа G при якому $f'(X)$ є досяжною на поверхні роду V+k, тобто $t_G(X, \sigma_{V+k}) = 1$, за умови, що з точністю до перенумерації мають місце співвідношення:

а) $(\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2 \cap G^1 \neq \varnothing)(\partial\Delta_2 \cap \partial\Delta_3 \cap G^1 \neq \varnothing) \wedge (\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_3 = \varnothing)$;

б) $(\exists\Delta_0)(\Delta_0 \in \sigma_V(G, f) / S_G(X))\left[(\partial\Delta_0 \cap \partial\Delta_i \cap G^1 \neq \varnothing) \wedge (i = 1(1)3)\right]$.

Означення 2: Будемо говорити, що ребро U, $U \in G^1$ суттєве відносно $\partial\theta_G(X)$, де $X \subseteq G^1 \cup G^0$, при операції видалення ребра, якщо має місце нерівність:

$\partial\theta_{G\backslash U}(X) < \partial\theta_G(X)$, де $G\backslash U=(G^0, G^1, \{U\})$.

Означення 3: Будемо говорити, що ребро U, U∈G′ суттєве відносно $\partial\theta_G(X)$, $X \subseteq G^1 \cup G^0$, при операції зтискання ребра, якщо має місце нерівність: $\partial\theta_{G_U}(X) < \partial\theta_G(X)$, де G_U визначимо наступним φ-перетворенням:

$\varphi(G \setminus (a,b), a \dot{+} b) = (G_{(ab)}, a^*)$.

Означення 4: Будемо називати граф G – мінімальнм відносно $\partial\theta_G(X)$, якщо кожне ребро графа G є суттєвим відносно $\partial\theta_G(X)$ при операціях зтискання чи видалення цього ребра, де $X \subseteq G^0 \cup G^1$.

Означення5: Будемо називати граф G-t мінімальним відносно t, $t=t_G(X)$ ($rut=\theta_G(X)$) якщо видалення чи зтискання довільного ребра U, $U \in G^1$, зменшує обидві характеристики множини X-точок графа G, де під точкою розумітимемо або вершину, або внутрішню точку ребра графа.

Лема 1: Мають місце наступні твердження:

1) Графи K_4 та $K_{2,3}$ є 2-мінімальними відносно $t_G(G^0)$.
2) Графи наведені в списку 1 (в додатку до цієї статті) є 3-мінімальними відносно $t_G(G^0)$.
3) Графи із списку 1 є мінімальними відносно $\theta_G(G^0)$, де $\theta_G(G^0)=1$, $\partial\theta_G(G^0)=0$.

4) Для графа G-φ-образа графа G_1+G_2 при φ-перетворенні визначеному на ребрах чи їх частинах наступним чином:

$$\varphi(G_1+G_2,\sum_{i=1}^{n}U_{1i}\underset{0}{+}U_{2i})=(G,\sum_{i=1}^{n}U_i^*),\ \text{де}\ p_1(L(G_1+G_2,G)\geq 0)$$

та графа G_0 гомеоморфного $K_{2,3}$ існує φ-перетворення визначено на простих циклах наступним чином:

$\varphi(G+G_0,z+z_0)=(L,z^*)$, де $t_G(G^0)=2$,

має місце рівність: $\partial\theta_j(J^0)\geq 1$, де $t_j(J^0)=3$.

Доведення леми 1: Твердження 1), 2), 3), не потребують доведення. Для наочності доведення твердження 4) використаємо рис. 1:

Розглянемо множину точок X графа G, яка має число досяжності t, $t=t_G(X)$, та 2-кліткове вкладення f, f: $G\to\sigma_V$, яке реалізує число t.

Нехай $S_G(X)=\{\Delta_i\}_1^t$, $S_G(X)\subset\sigma_V(G,f)$. Покладемо, що t=3. Оскільки $\theta_G(X)=0$, то це означає, що не має місце співвідношення:

$$(\bigcap_{i=1}^{3}\partial\Delta_i=\varnothing)\wedge((\partial\Delta_1\cap\partial\Delta_2\cap G^1\neq\varnothing)\wedge(\partial\Delta_1\cap\partial\Delta_3\cap G^1\neq\varnothing)\wedge(\partial\Delta_2\cap\partial\Delta_3\cap G^1\neq\varnothing))$$

.

Згідно визначення 1 маємо побудувати 2-кліткове вкладення $f',f':G\to\sigma_{V+1}$ на основі вкладення f. Для цього приклеїмо ручку $h(\Delta_1,\Delta_0)$ до 2-кліток Δ_1, Δ_0, які задовольняють визначенню 1, застосувавши φ-перетворення із [1]. А також наступні співвідношення:

а) $f'|\bigcup_{i=4}^{n}\partial\Delta_i\cap G^1=f|\bigcup_{i=4}^{n}\partial\Delta_s\cap G^1, n=\left|\sigma_V(G,f)/\{\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3\}\right|$

б) $\partial\Delta_1'=f'(\partial\Delta_2/\partial\Delta_0)\cup f'(\partial\Delta_0/(\partial\Delta_1\cup\partial\Delta_2\cup\partial\Delta_3))\cup f'(e_1)\cup f'(e_2)$

в) $\partial\Delta_2'=f'(\partial\Delta_1\cap G^1\setminus e_1)\cup f'(e_2)\cup f'(\partial\Delta_2\cap\partial\Delta_0)\cup f'(\partial\Delta_3/\partial\Delta_0)\cup$
$f'(e_3)\cup f'(\partial\Delta_2\cap\partial\Delta_0)$

г) $(f'(X)\subseteq\partial\Delta_1'\cup\partial\Delta_2')\wedge((f'(X)\cap\partial\Delta_1'\neq\varnothing)\vee(f'(X)\cap\partial\Delta_2'\neq\varnothing))$,

при цьому $\Delta_i'\in\sigma_{V+1}(G,f')$.

В загальному випадку $X=G^0$. Наступні графи G матимуть $\partial\theta_G(G^0)=1$ та наведені в списку 2 додатку разом із вкладенням $f':G\to\sigma_1$.

Відмітимо, що граф г) зтягуватиметься до графа ж), а граф й) отримано із з) шляхом стискання ребра. Доведення леми закінчено.

Теорема: Нехай G-t–мінімальний площинний граф такий, що $X=G^{0,}$ $\theta_G(X)=\theta$, $\partial\theta_G(X)=\partial\theta$. Існує φ-перетворення наступного виду:

$\varphi(G_1+G_2+G_3,R)=(J,R^*)\wedge(p_1(J(\varphi))\geq 0)$

де $(G_i\cong K_4)$ або $(G_i\cong K_{2,3})$, R- означатиме множину пар простих циклів чи пар ланцюгів, визначених на множині точок графів G_i, i=1(1)3, R^* - результат попарного ототожнення ланцюгів чи циклів, в результаті якого маємо $(J\cong G)\wedge(\partial\theta=1)$.

Доведення теореми випливає з наведеної вище леми.

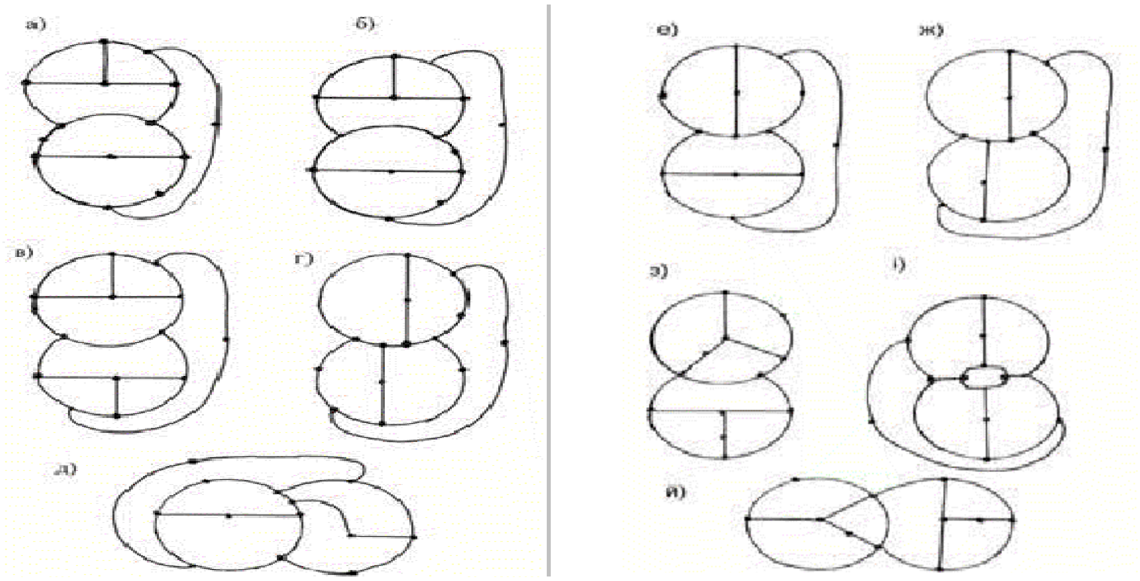

Рис. 1. Графи із списку 2

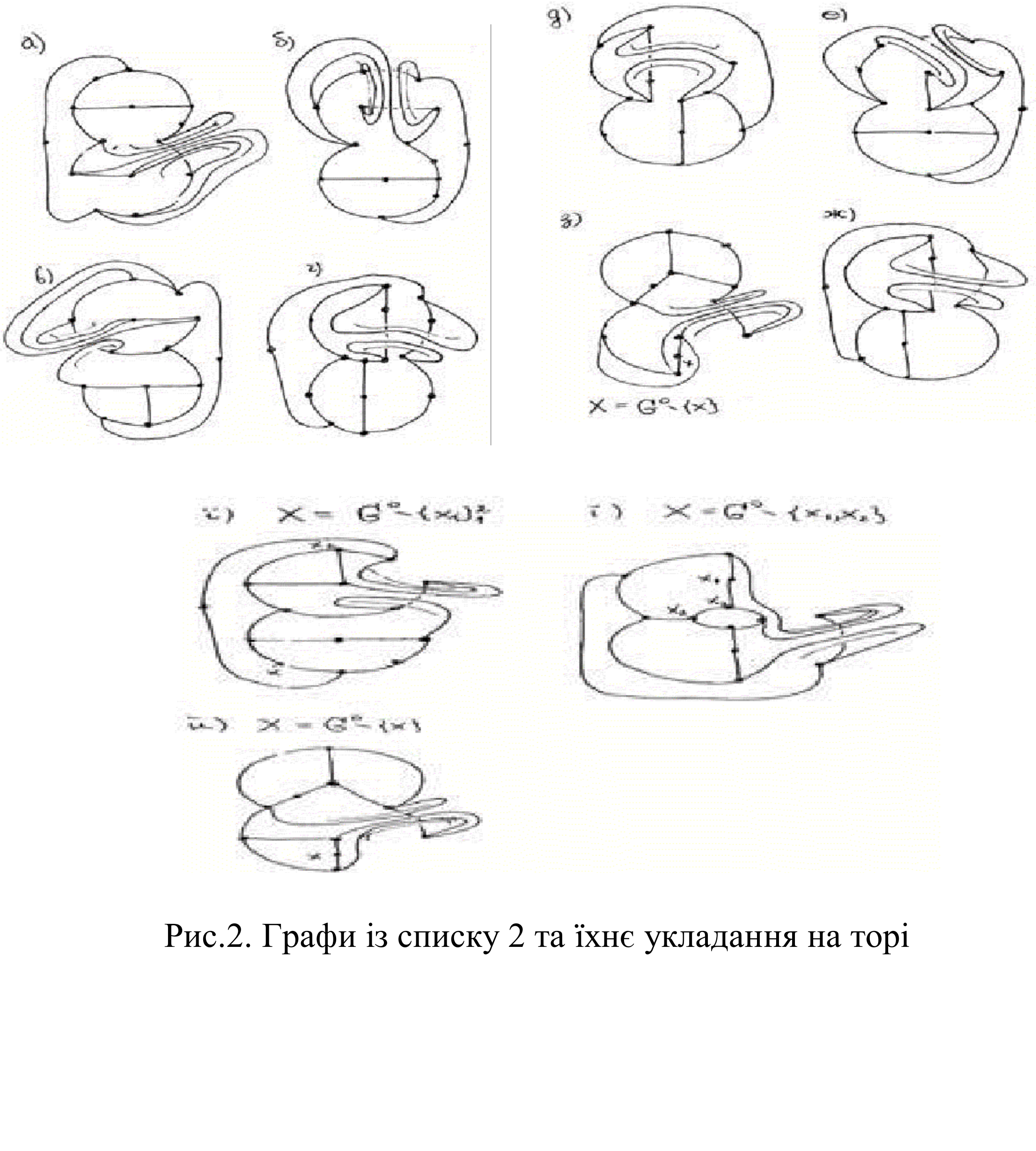

Рис.2. Графи із списку 2 та їхнє укладання на торі

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів.// препринт ИМ АНУ, Киев, 1973
2. Хоменко М. П. Топологические аспекти теории графов. // препринт ИМ АНУ, Киев, 1971
3. Хоменко Н. П. Островерхий Е. Б. Существенные елементи и род графа. // препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ Киев 1972
4. Петренюк В. І. Об оценке рода специальних графов. // деп. рукопис в УкрНИИТИ №1415 15.11.1986
5. Петренюк В. І. О струкруре плоских графов с заданним числом достижимости некоторого множества точек. // деп. рукопис в УкрНИИТИ N 814 19.08.1985
6. B. Mochar. Face covers and the genus of apex graphs, J. Combin. Theory, Ser. B 82 (2001) 102-117. []

Кіровоградський національний
технічний університет *Надійшло 21 жовтня 2004 р.*