

УДК 519.213

РОЗПОДІЛИ ФІБОНАЧЧІ

Ю.І. Волков

Изучается семейство арифметических распределений, которые являются обобщениями биномиального распределения. Получены асимптотические формулы для математического ожидания и дисперсии. Кроме того, найдены наиболее вероятные значения соответствующей случайной величины.

The family of arithmetical distributions, which the binomial distribution are a generalization, is studied. For the expectation and variance the asymptotic formulas are determine. Thereto, the most probable number of corresponding random variable are found.

Проводиться n незалежних випробувань Бернуллі з імовірністю успіху p . Ймовірність p_k того, що при такому експерименті отримаємо рівно k успіхів за умови, що за кожним успіхом слідує принаймні m ($m \geq 0$) невдач можна знайти за формулою:

$$p_k = \frac{C_{n-mk}^k (p/q)^k}{\sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^i (p/q)^i}, \quad k=0, 1, 2, \dots, [n/(m+1)], p+q=1. \quad (1)$$

Якщо $m=0$, то це звичайний біноміальний розподіл з параметрами (n, p) .

Розподіли, які визначаються за допомогою співвідношення (1), частинні випадки арифметичних (a, b, m, n) -розподілів.

Означення. Випадкова величина ξ має розподіл Фібоначчі з параметрами (a, b, m, n) , якщо вона приймає значення $k=0, 1, 2, \dots, [n/(m+1)]$ з ймовірностями

$$p_k = \frac{C_{n-mk}^k b^k a^{n-(m+1)k}}{\sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^i b^i a^{n-(m+1)i}}, \quad (2)$$

a, b довільні додатні числа, m, n – натуральні.

Якщо в (2) покласти $a=1, b=p/q$, то отримаємо (1), а у випадку $m=1, a=b=1$, отримаємо розподіл, який вивчав П.Філіппоні, [1].

Метою даної роботи є дослідження розподілів Фібоначчі, як то: дослідити поведінку $M\xi$ при $n \rightarrow \infty$, дослідити поведінку $D\xi$ при $n \rightarrow \infty$, знати найбільш ймовірне значення випадкової величини ξ .

Лема 1. Числа

$$u_n(a, b) := \sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^i b^i a^{n-(m+1)i} \quad (3)$$

задовольняють рекурентне співвідношення

$$u_{n+m+1} = au_{n+m} + bu_n, \quad u_0=1, u_1=a, \dots, u_m=a^m. \quad (4)$$

Співвідношення (4) впливає з такої тотожності:

$$C_{n+m-mi}^i + C_{n+m-mi}^{i-1} = C_{n+m-mi+1}^i.$$

Далі використовуватимемо характеристичне рівняння для рекурентного співвідношення (4):

$$z^{m+1} = az^m + b \quad (5)$$

Лема 2. Рівняння (5) має єдиний додатний корень $a < \lambda < a+2$. Всі інші корені цього рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ по модулю строго менші, ніж λ .

Доведення. На проміжку $[a, \infty]$ функція $f(z) := z^{m+1} - az^m - b$ строго монотонно зростає ($f'(z) = (m+1)z^m - maz^{m-1} = z^{m-1}((m+1)z - ma) > 0$), в точці a $f(a) = -b < 0$, а для досить великих z $f(z) > 0$, тому існує єдине λ , де $f(\lambda) = 0$.

Далі перепишемо рівняння (5) так:

$$w^{m+1} - \frac{a}{\lambda} w^m = \frac{b}{\lambda^{m+1}}, \text{ де } w = z/\lambda. \text{ Звідси } |w|^m \left| w - \frac{a}{\lambda} \right| = \frac{b}{\lambda^{m+1}}. \text{ Припустимо, що існує}$$

корінь $w_0 \neq 1$ і $|w_0| \geq 1$. Тоді $|w_0|^m \left| w_0 - \frac{a}{\lambda} \right| = \frac{b}{\lambda^{m+1}} \geq \left| w_0 - \frac{a}{\lambda} \right| > 1 - \frac{a}{\lambda}$, але $\frac{b}{\lambda^{m+1}} = 1 - \frac{a}{\lambda}$,

бо λ корінь рівняння (5), прийшли до протиріччя. Отже, $|w_0| < 1 \Leftrightarrow |z_0| < \lambda$, z_0 любий корінь рівняння (5), який не дорівнює λ .

Лема 3. Має місце рівність:

$$u_n(a, b) = C\lambda^n + C_1\lambda_1^n + \dots + C_m\lambda_m^n, \quad (6)$$

де сталі C, C_1, \dots, C_m знаходяться з початкових умов рекурентного співвідношення (4).

Рівність (6) випливає з того, що рекурентне співвідношення (4) – лінійне однорідне з постійними коефіцієнтами.

$$\text{Неважко показати, що, наприклад, } \ln C = \sum_{k=1}^m \ln \frac{a - \lambda_k}{\lambda - \lambda_k}.$$

Для знаходження математичного сподівання і дисперсії досліджуваного розподілу скористаємось генератрисою розподілу. Позначимо її через $P(z)$,

$$P(z) = \frac{u_n(a, bz)}{u_n(a, b)}, M_\xi = P'(1), D_\xi = P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2. \quad (7)$$

Для знаходження відповідних похідних спочатку знайдемо похідні по z від функцій $u_n(a, bz)$. Ці функції задовольняють рекурентне співвідношення

$$u_{n+m+1}(a, bz) = au_{n+m}(a, bz) + bu_n(a, bz), u_0 = 1, u_1 = a, \dots, u_m = a^m. \quad (8)$$

Характеристичне рівняння для цього рекурентного співвідношення

$$w^{m+1} = aw^m + bz. \quad (9)$$

Нехай $\lambda(z), \lambda_1(z), \dots, \lambda_m(z)$ розв'язки рівняння (9). Тоді

$$\lambda(1) = \lambda, \lambda_1(1) = \lambda_1, \dots, \lambda_m(1) = \lambda_m \quad (10)$$

$$u_n(a, bz) = C(z)(\lambda(z))^n + C_1(z)(\lambda_1(z))^n + \dots + C_m(z)(\lambda_m(z))^n, \quad (11)$$

функції $C(z)$, $C_1(z), \dots, C_m(z)$ можна знайти з початкових умов (8), а $C(1)=C$, $C_1(1)=C_1, \dots, C_m(1)=C_m$. Наприклад, $\ln C(z) = \sum_{k=1}^m \ln \frac{a - \lambda_k(z)}{\lambda(z) - \lambda_k(z)}$.

Будемо користуватись позначеннями: $C' = C'(1)$, $C_1' = C_1'(1)$, ..., $C_m' = C_m'(1)$ і аналогічними позначеннями для других похідних.

Теорема 1. *Мають місце асимптотичні рівності:*

$$M\xi = \frac{b}{mb + \lambda^{m+1}} n + C_M + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$$D\xi = \frac{ab\lambda^{2m+1}}{(mb + \lambda^{m+1})^3} n + C_M + C_D + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

де сталі C_M і C_D можна виразити через корені рівняння (5) (див. далі).

Доведення. Спочатку знайдемо похідні по z від розв'язків рівняння (9), користуючись цим рівнянням, отримаємо

$$\lambda'(z) = \frac{b\lambda(z)}{(\lambda(z))^{m+1} + mbz}, \quad \left(\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)} \right)' = - \frac{b(mb + (m+1)(\lambda(z))^m \lambda'(z))}{((\lambda(z))^{m+1} + mbz)^2}.$$

Звідси

$$\lambda' := \lambda'(1) = \frac{b\lambda}{\lambda^{m+1} + mb}, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)} \right)' \Big|_{z=1} = \frac{\lambda''(1)}{\lambda} - \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 = - \frac{b^2((2m+1)\lambda^{m+1} + m^2b)}{(\lambda^{m+1} + mb)^3}. \quad (15)$$

$$\lambda'' := \lambda''(z) \Big|_{z=1} = \frac{b^2 \lambda m (b(1-m) - 2\lambda^{m+1})}{(\lambda^{m+1} + mb)^3} \quad (16)$$

Аналогічні формули мають місце і для функцій $\lambda_k(z)$, $k=1, 2, \dots, m$.

Користуючись (11), знаходимо

$$P'(1) = \frac{C\lambda^n + C\lambda^{n-1}\lambda'n + C_1'\lambda_1^n + C_1\lambda_1^{n-1}\lambda_1' \dots + C_m'\lambda_m^n + C\lambda_m^{n-1}\lambda_m'n}{C\lambda^n + C_1\lambda_1^n + \dots + C_m\lambda_m^n} = \frac{C'}{C} + \frac{\lambda'}{\lambda} n + o(1), \quad (17)$$

при $n \rightarrow \infty$, бо $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, k=1, 2, \dots, m$ за лемою 2.

Якщо скористатись (14), то матимемо

$$M\xi = \frac{C'}{C} + \frac{b}{\lambda^{m+1} + mb} n + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

що доводить співвідношення (12) теореми.

З виразу для $\ln C(z)$ випливає

$$C_M := \frac{C'}{C} = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k'}{\lambda_k - a} - \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda_k - \lambda}, \quad (19)$$

а за формулами (14) цю сталу можна виразити через корені характеристичного рівняння (5).

Подібно до попереднього, знайдемо

$$P''(1) = \frac{C''}{C} + \frac{2C'}{C} \cdot \frac{\lambda'}{\lambda} n + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 n(n-1) + n \frac{\lambda''}{\lambda} + o(1), n \rightarrow \infty.$$

Якщо скористатись (7), (14), (15) і (17), то

$$D\xi = \frac{C'}{C} + \left(\frac{C'}{C}\right)' + \left(\frac{\lambda'}{\lambda} + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)'\right)n + o(1) = \frac{C'}{C} + \left(\frac{C'}{C}\right)' + \frac{ab\lambda^{2m+1}}{(\lambda^{m+1} + mb)^3} n + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (20)$$

що доводить співвідношення (13) теореми.

З виразу для $\ln C(z)$ випливає

$$C_D := \left(\frac{C'}{C}\right)' = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k''}{\lambda_k - a} - \left(\frac{\lambda_k'}{\lambda_k - a}\right)^2 - \frac{\lambda_k'' - \lambda''}{\lambda_k - \lambda} + \left(\frac{\lambda_k' - \lambda'}{\lambda_k - \lambda}\right)^2, \quad (21)$$

а за формулами (14) і (16) цю сталу можна виразити через корені характеристичного рівняння (5).

Наслідок 1. *Мають місце співвідношення:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M\xi}{n} = \frac{b}{mb + \lambda^{m+1}}, \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D\xi}{n} = \frac{ab\lambda^{2m+1}}{(mb + \lambda^{m+1})^3}. \quad (23)$$

Якщо в співвідношенні (22) взяти $m=1$, $a=b=1$, то отримаємо результат Філіппоні [1, Theorem 4, P.338].

Наслідок 2. *Нехай розподіл випадкової величини задається співвідношеннями (1). Тоді*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M\xi}{n} = \frac{p}{mp + q\lambda^{m+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D\xi}{n} = \frac{pq^2\lambda^{2m+1}}{(mp + q\lambda^{m+1})^3},$$

де λ додатний корінь рівняння $q\lambda^{m+1} = q\lambda^m + p$.

Наслідок 3. *Нехай $m=1$. Тоді*

$$M\xi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4b}}\right)n + C_M + o(1), \quad D\xi = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + 4b)^3}} n + C_M + C_D + o(1), n \rightarrow \infty,$$

де

$$C_M = \frac{a(a - \sqrt{a^2 + 4b})}{2(a^2 + 4b)}, \quad C_D = \frac{a((a^2 + 6b)\sqrt{a^2 + 4b} - a^3 - 8ab)}{2(a^2 + 4b)^2}.$$

Зокрема, якщо $a=b=1$, то

$$M\xi = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} n + \frac{1 - \sqrt{5}}{10} + o(1), \quad D\xi = \frac{\sqrt{5}}{25} n + \frac{\sqrt{5} - 2}{25} + o(1), n \rightarrow \infty.$$

Для знаходження найбільш ймовірного значення випадкової величини ξ можна діяти подібно тому, як це робиться у випадку біноміального

розподілу, тобто, потрібно розв'язати нерівність $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$ відносно k .

Обмежимося випадком $m=1$.

Теорема 2. Нехай

$$\mu := \frac{n(a^2 + 4b) - (a^2 + 2b) - \sqrt{a^2(a^2 + 4b)(n+1)^2 + 4b^2}}{2(a^2 + 4b)}. \quad (24)$$

Тоді найбільш ймовірними значеннями випадкової величини ξ будуть числа $[\mu]$ (ціла частина числа μ), якщо μ неціле, і μ та $\mu+1$, якщо μ ціле.

Доведення.
$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_{n-k-1}^{k+1} a^{n-2(k+1)} b^{k+1}}{C_{n-k}^k a^{n-2k} b^k} \geq 1, 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow$$

$$k^2(a^2 + 4b) - k(n(a^2 + 4b) - (a^2 + 2b)) + bn^2 - n(a^2 + b) \geq 0, 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Відповідний квадратний тричлен має такі корені:

$$k_{1,2} = \frac{n(a^2 + 4b) - (a^2 + 2b) \pm \sqrt{a^2(a^2 + 4b)(n+1)^2 + 4b^2}}{2(a^2 + 4b)},$$
 а звідси впливає результат

теорема, бо $k_1 > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Якщо параметри a та b натуральні, то можна займатись пошуками таких n , для яких μ ціле. У випадку $a=b=1$ відомо: μ ціле тоді і тільки тоді, коли $n=F_{4s}$, $s=1,2,\dots$, F_r – r -те число Фібоначчі [1, Theorem 6, P.340]. У випадку довільних натуральних a та b потрібно розв'язувати рівняння :

$$x^2 = Ay^2 + 4b^2, \quad A = a^2(a^2 + 4b). \quad (25)$$

Розглянемо випадки.

1). Якщо A повний квадрат, то шукаємо розв'язки серед піфагорових трійок.

2). Нехай A не є повним квадратом і $b=1$. Тоді рівняння (25) рівносильне рівнянню Пелля $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2(a^2 + 4)\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1$, найменший розв'язок якого $(a^2+2, 1)$, а тому (див., наприклад, [2]) можна отримати нескінченну множину розв'язків (x_s, y_s) рівняння (25) за формулами

$$x_s = 2^{-s} \left((a^2 + 2 + a\sqrt{a^2 + 4})^s + (a^2 + 2 - a\sqrt{a^2 + 4})^s \right),$$

$$y_s = \frac{2^{-s}}{a\sqrt{a^2 + 4}} \left((a^2 + 2 + a\sqrt{a^2 + 4})^s - (a^2 + 2 - a\sqrt{a^2 + 4})^s \right),$$

$$s=1,2,3,\dots$$

Ці формули можна перетворити, скориставшись тим, що

$$\frac{1}{2}(a^2 + 2 \pm a\sqrt{a^2 + 4}) = \left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2} \right)^2$$
 і тоді $x_s = t_{2s}$, $y_s = a^{-1}u_{2s-1}$, де

$$u_{2s-1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4}} (\lambda^{2s} - \lambda^{-2s}), \quad t_{2s} = (\lambda^{2s} + \lambda^{-2s}), \quad \lambda = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Далі n шукаємо серед чисел y_s-1 , а якщо врахувати таку властивість чисел u і

$$t: (a^2+4)u_{2s-1}-at_{2s}=2t_{2s-1}, \text{ то } \mu = \frac{t_{2s-1}-(a^2+3)a}{(a^2+4)a}, s=1,2,3,\dots$$

Якщо s парне, то $t_{2s-1}-a(a^2+3)$ ділиться націло на $a(a^2+4)$.

3). Нехай A не є повним квадратом і $b>1$. Тоді (див. ,наприклад, [1]) можна користуватись такою множиною розв'язків рівняння (25):

$$x_s = \frac{1}{2}(a^2 + 2b + \sqrt{A})(x_0 + y_0 \sqrt{A})^s + \frac{1}{2}(a^2 + 2b - \sqrt{A})(x_0 - y_0 \sqrt{A})^s,$$

$$y_s = \frac{1}{2\sqrt{A}}(a^2 + 2b + \sqrt{A})(x_0 + y_0 \sqrt{A})^s - \frac{1}{2\sqrt{A}}(a^2 + 2b - \sqrt{A})(x_0 - y_0 \sqrt{A})^s,$$

$s=1,2,3,\dots$, де (x_0, y_0) найменший нетривіальний розв'язок рівняння Пелля $x^2=Ay^2+1$.

П р и к л а д и .

a	1	1	1	1	1	2	3	3	4
b	1	3	4	9	10	1	1	3	1
n	20	1908	104	300	8768	203	1308	114	5795
μ	5	649	39	125	3699	29	109	19	365

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Piero Filippini. A note on the representation of integeres as a sum of distinct Fibonacci numbers// The Fibonacci Quarterly.–1986.–24, №4.–Р.332–335.
2. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах.–М.:Наука, 1978.

Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка

Надійшло 18 травня 2004р.