УДК 515.1

СИНГУЛЯРНОСТИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ГОМОЛОГИЙ НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

О.П.Бондарь

Рассматриваются критические точки гладких функций на многообразиях с точки зрения теории гомологий и дополняются известные инварианты – ранги относительных групп гомологий.

We describe the ranks of homology groups of conic critical points on 3-deminsional manifolds.

Теория особенностей гладких функций имеет обширную область приложения в различных направлениях науки, техники, экономики: в теории упругих конструкций, оптике, термодинамике, лазерной физике, биологии, моделировании экономических процессов. Поэтому наиболее полная характеристика этих особенностей, а также их взаимосвязь со структурой множеств и характером функций, заданных на них, является важной задачей.

Различные аспекты теории особенностей функций на многообразиях рассматриваются в современной математике (см., напр., [1]). Мы рассмотрим критические точки гладких функций на многообразиях с точки зрения теории гомологий, дополнив известные инварианты – ранги относительных групп гомологий. Напомним ([2],[3]) некоторые определения.

Точка p n-мерного гладкого многообразия M называется **конической** точкой гладкой функции f, заданной на M, если в некоторой окрестности $U\subset M$ точки p прообраз $f(p)$ в U гомеоморфен конусу с вершиной в точке p над несвязным объединением (n-2)-мерных связных многообразий L_i без края:

$$f^{-1}(f(p))\cap U = \mathrm{Con}(p,\bigsqcup L_i).$$

На сфере, ограничивающей шаровую окрестность в U точки p, конус отсекает так называемое **“приклеиваемое” множество** – несвязное объединение (n-1)-мерных многообразий, ограниченных L_i, для которого значения функции f не превосходят ее значения в точке p.

Пусть $\{x\}_i$ - множество изолированных критических конических точек функции $f\colon M\to R$ на поверхности уровня $f^{1}(c)$ многообразия M. На множестве $M^c = \{x\epsilon M\colon f(x)\le c\}$ рассмотрим относительные группы гомологий

$$H_k(M^c,M^c\setminus\{x\}_i).$$

В силу изолированности критических точек под группой $H_k(M^c,M^c\setminus\{x\}_i)$ будем понимать группу

$$H_k(M^c,M^c\setminus U\{x\}_i),$$

где $U\{x\}_i$ - множество достаточно малых окрестностей точек $\{x\}_i$. Рассмотрим целые числа $\beta_k(M^c,M^c\setminus\{x\}_i)$, где $\beta_k(X,Y)=\dim H_k(X,Y)$ (над соответствующим полем) – так называемые числа Бетти пары (X,Y). Если на поверхности уровня $f^{-1}(c)$ расположена единственная критическая точка x, то числа $\beta_k(M^c,M^c\backslash x)$ могут служить характеристикой этой критической точки. Заметим, что ранги относительных групп гомологий не могут полностью характеризовать критическую точку, но с некоторой дополнительной информацией о критической точке они могут служить ее характеристикой.

Утверждение. На гладком компактном связном трехмерном многообразии M существует гладкая функция f:M→R, имеющая четыре конических критических точки: точку минимума, точку максимума, критическую точку, для которой β_1=m, β_2=0, “приклеиваемое” множество – несвязное объединение m+1 двумерного диска и критическую точку, для которой β_1=1, β_2=m, “приклеиваемое” множество – замыкание двумерной сферы без несвязного объединения m+1 двумерного диска (m – некоторая константа).

Доказательство основано на преобразовании функции, имеющей на многообразии в точности четыре критических уровня: минимума, максимума, содержащего только критические точки индекса один и содержащего критические точки индекса два, и применении теоремы [2].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Шарко В.В. Функции на многообразиях.-Киев:Наук.думка,1990.-196с.
2. Бондарь О.П. Теорема о слиянии критических точек в точку.-// Некоторые вопросы современной математики.-Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998.-436с.
3. Зейферт Г., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом.- М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1947.-132с.

Кіровоградська державна льотна академія України

Надійшло 8 листопада 2004р.