УДК 534+517

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМИ

З.Ю. Філер

Системи із запізненням стали об'єктом систематичного дослідження із середини XX століття. Моделювання цих об'єктів веде до диференціальних рівнянь із запізненим аргументом. Як їх інтегрування, так і вивчення стійкості вимагають некласичних підходів.

The delaed sistems became object of regular research from the middle 20 century. Modelling of these objects gives the differential equations with late argument. Both their integration, and reseaching of stability, demand nonclassical approaches.

Вступ. Системи із запізненням стали об'єктом систематичного дослідження з середини XX стор., коли у радіотехніці з'явилися лінії затримки та швидкодія (тактова частота) пристроїв почали вимагати врахування часу переходу сигналу (зусилля) з одного кінця провідника (стержня) до іншого завдяки скінченій швидкості хвильових процесів у ньому. З початком космічної ери навіть швидкість світла не забезпечує практичної миттєвості передачі сигналу. Так, час на посилання керуючого сигналу з ЦУП на Землі до його отримання об'єктом на Місяці та відправлення сигналу – відповіді й прийняття його ЦУП досягає майже 3 с. За цей час ситуація на керованому об'єкті суттєво змінюється, що й обмежує можливості дистанційного управління ним із Землі. Ще безнадійніше управління із Землі об'єктом на Марсі, відстань від якого, навіть у протистоянні, більше, ніж від Місяця у 125 разів. Навіть мікромініатюризація сучасних ЕОМ не відміняє необхідності враховувати наявність запізнення у передачі даних по їх шинах й окремих елементах при вже досягнутій швидкодії за рахунок високої тактової частоти роботи ЕОМ. Математичне моделювання цих об'єктів здійснюється за допомогою або систем рівнянь в частинних похідних з граничними умовами у вигляді звичайних диференціальних рівнянь (ДР), або звичайних диференціальних рівнянь із членами, частина яких має аргумент із запізненням на час переходу відповідного сигналу (зусилля). Рівняння мають принципові відміни від класичних систем. Як їх аналітичне та чисельне інтегрування, так і з'ясування стійкості вимагають узагальнень класичних підходів. Цим проблемам та методиці їх викладання й присвячена стаття автора.

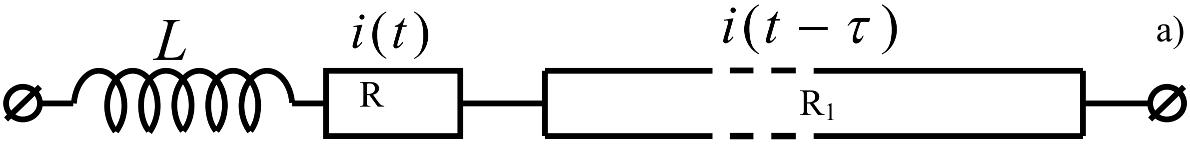
У курсах математики та фізики педагогічних навчальних закладів та технічних ВНЗ ці питання або не розглядають взагалі або розглядають їх тільки на описовому рівні, незважаючи на невпинне зростання ролі таких систем у техніці. Автор розглядав їх як у викладанні в Донецькому політехнічному інституті (ДПІ) курсу «Диференціальні рівняння» та в спецкурсі, присвяченому проектуванню вібросистем за допомогою ЕОМ, так і використовував у дослідженні протяжних об'єктів (горизонтальних віброплощадок для формування виробів із бетонних сумішей, віброударного способу послаблення вугільного масиву, коливанням вертикальних трубопроводів (райзерів) тощо) у 1970 – 80 –х рр.. Викладаючи математичний аналіз у КДПУ, автор розглядав відповідну тему із студентами 2 – 3 – х курсів спеціальностей «Математика – фізика» та «Фізика – математика», давав теми для курсових та дипломних робіт. Разом із студентами були розроблені оригінальні алгоритми. По деяких аспектах були і публікації в журналах та тезах доповідей [1, 2, 3]. У 2002-2004 навчальних роках матеріал викладався в спецкурсі «Елементи теорії коливань при різанні металів» для студентів спеціальності «Трудове навчання», який читався на 3 та 5 курсах. У поточному 2005-06 навчальному році таким системам була присвячена значна частина спецкурсу "Стійкість лінійних систем" для магістрантів спеціальності "Математика".

1. Трохи історії. *Диференціальними рівняннями* першого порядку *із запізненням (*ДРЗ) τ називають рівняння $x'(t)=f(x(t), x(t-\tau), t)$. Величина τ може бути сталою, або залежати від t і навіть x(t). Вперше окремі такі рівняння з'являються у публікаціях Кондорсе (1771 р.), але систематичне вивчення таких рівнянь починається лише у XX стор., особливо в кінці 40-х рр. (А.Д. Мишкіс у СРСР, Е.М. Райт і Р. Беллман у США). Вони знаходять багато застосувань у теоріях автоматичного управління, автоколивань, при дослідженні горіння в ракетних двигунах, у проблемах довгострокового прогнозування в економіці, біофізиці, багатьох інших проблемах науки й техніки. Це стимулює бурхливий розвиток теорії ДРЗ. Їх ще називають рівняннями *з післядією*. Вони з'являються завжди, коли у фізичній, біологічній чи технічній задачі сила (вплив), яка діє на матеріальну точку (тіло, популяцію) залежить від швидкості та/чи положення її не тільки в даний момент, а й в якісь попередні моменти, які відрізняються на $\tau_к$ одиниць. Наявність запізнення може стати причиною нових явищ, зокрема, автоколивань, які самозбуджуються, нестійкості процесів тощо. Великий внесок у вивчення проблем ДРЗ уніс відомий математик Л.Е. Ельсгольц та його учні [4].

2. Прості фізичні задачі, які приводять до ДР із запізненням. Крім указаних у попередніх пунктах ситуаціях, пов'язаних із скінченністю швидкості розповсюдження сигналів (сил), у техніці застосовуються елементи, у яких їх затримка створюється спеціально [5]. Це так звані *лінії затримки*. Їх застосовують в імпульсних пристроях. Електричні лінії затримки мають τ до десятків мксек, а ультразвукові – до тисяч мксек. Генератори затриманих імпульсів мають електронний релаксаційний пристрій з одним стійким станом рівноваги (мультивібратором) та пристроєм формування імпульсів. Час затримки τ може плавно регулюватися пропорційно управляючій напрузі. Такі лінії застосовують у ядерній фізиці, в індикаторах та інших елементах радіолокаційних станцій, в пристроях кодування та декодування імпульсів, у електронних комутаторах. Найпростішою схемою є ланцюг з котушкою з індуктивністю L, резистором R та довгою лінією з сумарним опором R_1 та з часом τ проходження по ній струму. Механічним прикладом є коливання тіла з масою m на пружних елементах з жорсткістю C та на довгому канаті з сумарною жорсткістю C_1, час проходження силового імпульсу по якому дорівнює τ (Рис. 1).

Фізичні системи із запізненням

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + R_1 i(t-\tau) = 0$$



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Cx(t) + C_1 x(t-\tau) = 0$$

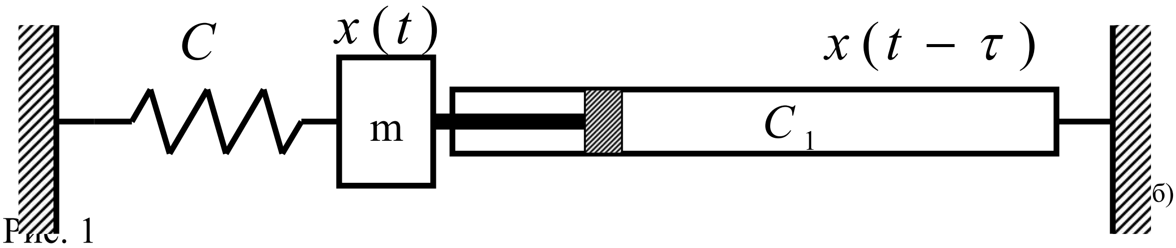
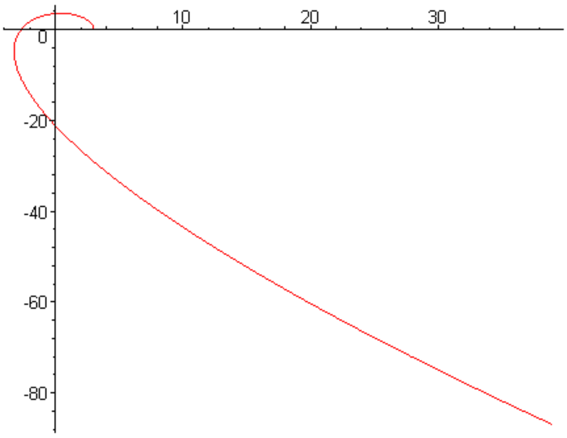


Рис. 1



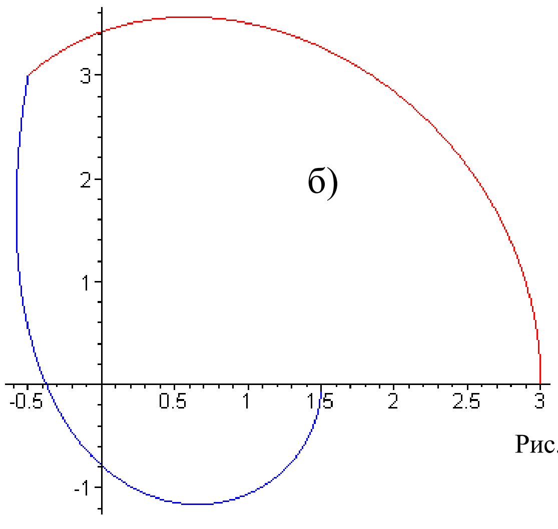
Годографи:

а) не фінітизований;
б) фінітизований без запізнення;
в) фінітизований із запізненням.

а)

$$1{,}5y^{(4)}(t) + 4y'''(t) + 5y''(t) + 7y'(t) + 3y(t) = 0$$

$$1{,}5y^{(4)}(t) + 4y'''(t) + 5y''(t) + 5y'(t) + 2y'(t-1) + 3y(t) = 0$$



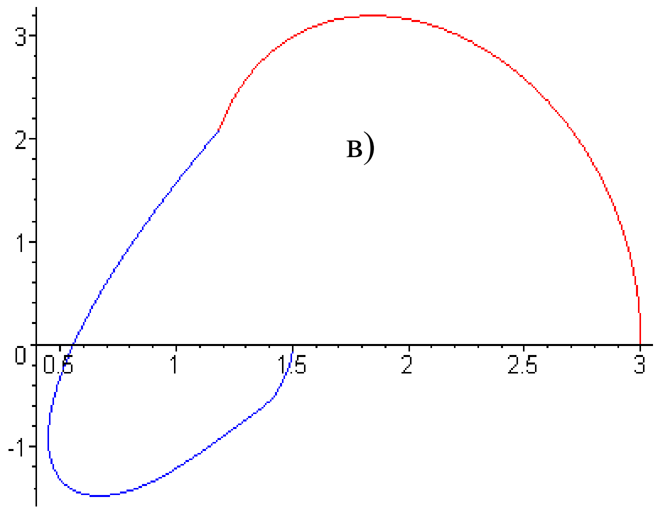


Рис. 2

Прикладами системи рівнянь із змінним τ є моделі різноманітних наслідків змін сонячної активності (СА), бо навіть електромагнітні хвилі доходять до Землі від активних зон на Сонці за 8 хвилин, а потоки часток від плям (в основному, протонів) рухаються із швидкістю 300…1000 км/сек. й доходять до Землі за 2…5 діб. Тільки після цього, як сигнал дійде до відповідної земної сфери, він почне змінювати її стан. Завдяки зміні положення плями відносно центрального меридіану в зв'язку з власним обертанням Сонця та рухом Землі по орбіті, величина τ буде теж змінюватися.

Для рівнянь із запізненням аналогом задачі Коші для рівняння $x'(t)=f(x,t)$ з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ є вище наведене рівняння з умовою $x(t) = \varphi(t)$ при $t\in[t_0 - \tau, t_0]$, де $\varphi(t)$ є задана *початкова функція*. Її розв'язання чисельним методом достатньо стандартно; треба лише зберігати у пам'яті на кожному відрізку довжиною τ значення розв'язку на попередньому такому відрізку. Найбільш просто організувати цей процес удається при сталому τ. Для цього необхідно зберігати й оновлювати на кожному кроці масив значень $x(t)$ на проміжку зліва від поточного t довжиною τ. У простих випадках можна шукати й аналітичний вираз розв'язку у вигляді функції, заданої різними формулами на кожному з відрізків довжини τ, починаючи від точки $t_0 - \tau$.

3. Автономні лінійні ДР із запізненнями. Для випадку ДРЗ 1-го порядку маємо рівняння $x'(t) = ax(t) + вx(t-\tau) + c$, де a, в, c – сталі. Методи його розв'язання схожі з методами розв'язання звичайних лінійних ДР (без запізнення) зі сталими коефіцієнтами. Для відповідного однорідного рівняння

$$x'(t)=ax(t)+вx(t-\tau) \qquad (1)$$

виділимо три методи:

1) Операційний метод розв'язання ДР із запізненнями. Він ґрунтується на теоремі запізнення операційного числення: якщо образом функції f(t) при перетворені Лапласа є функція F(p), то образом функції $f(t - \tau)$ є добуток F(p) на $e^{--p\tau}$. Разом з теоремою *диференціювання оригінала* та властивістю лінійності оператора Лапласа замість диференціального рівняння отримаємо лінійне відносно F(p) алгебраїчне рівняння $pF(p)-x(o)=(a+be^{-p\tau})F(p)+c/p$. Звідси $F(p)=(x(0)+c/p)/(p-(a+be^{-p\tau}))$. Відповідний *оригінал* можна знайти за спеціальними таблицями.

2) Метод Ейлера пошуку часткового розв'язку однорідного рівняння у вигляді показникової функції exp(λt). Це дає х*арактеристичне рівняння*

$$F(\lambda) \equiv \lambda-(a+вe^{-\lambda\tau})=0. \qquad (2)$$

Його ліва частина є *квазіполіном.* У загальному випадку воно має безліч [4, с. 70] комплексних коренів; при дійсних *а* та *в* корені комплексно спряжені. Комплексному $\lambda = \alpha + i\beta$ відповідають члени типу $e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$ з довільними сталими C_1 і C_2. Вони відповідають *затухаючим* коливанням з декрементом $\alpha < 0$ та *наростаючим коливанням* з інкрементом $\alpha > 0$ та частотою β.

3) Розкладання по степенях малого запізнення. Замінюючи $x(t-\tau)$ за формулою Тейлора на $x(t)-\tau x'(t)$, отримаємо наближене звичайне диференціальне рівняння (без запізнення) $x'*(1+\tau в) = (а+в)x$, характеристичне рівняння якого $\lambda(1+\tau в) = (а+в)$ має один дійсний корінь, який відповідає розв'язку $x = C*\exp((а+в)/(1+\tau в)t)$. При $(а+в)/(1+\tau в)>0$ очевидне необмежене наростання $x(t)$, тобто нестійкість розв'язків. Утримання члену другого степеня відносно τ дає рівняння 2-го порядку з малим параметром при старшій похідній. При довільному завданні початкових умов утворюється швидка зміна розв'язку в *примежовому шарі*. Наявність у "задачі Коші" довільної аналітичної початкової функції $\varphi(t)$ адекватно завданню нескінченої послідовності її похідних у початковій точці t_0 , а це й відповідає ДР *нескінченого* порядку.

4. Методи пошуку коренів квазіполіному (2). Для функції $F(\lambda)$ маємо при дійсному λ похідну $F'(\lambda) = 1+\tau в e^{-\lambda\tau}$. При в<0 воно має один дійсний корінь $\lambda_0=\ln(\tau|в|)/\tau$, який дає точку екстремуму функції $F(\lambda)$. Друга похідна $F''(\lambda) = -\tau^2 в e^{-\lambda\tau}$ при цьому додатна, тому ця точка дає *мінімум*. Якщо він додатній, тобто $F(\lambda_0) > 0$, то дійсних коренів характеристичне рівняння немає. Для пошуку *комплексних* коренів ми пропонуємо такий *метод*. Взявши для дійсної частини кореня наближення $\alpha_0 = \lambda_0$, для уявної β_0 частини з формули Тейлора отримаємо рівняння $F(\lambda_0) - F''(\lambda_0)/2\beta_0^2 \approx 0$. Звідси $\beta_0^2 \approx 2F(\lambda_0)/F''(\lambda_0)$. Далі для початкового наближення до комплексного кореня $\lambda=\alpha+i\beta$ отримаємо $\lambda_1=\alpha_0+i\beta_0$. Його можна вточнити далі методом Ньютона *ітераціями* $\lambda_1:=\lambda_1- F(\lambda_1)/F'(\lambda_1)$, бо $F'(\lambda_1)\neq 0$. Про це є згадка в [4, с. 75], але не сказано, як знайти *початкове* наближення. Пропоноване нами початкове значення α_0 дійсної частини кореня є *точним* для квадратичної функції $F(\lambda)$. У [4, с. 74] вказуються *асимптотичні* формули для великих за модулем коренів (формула (28)). Для уточнення їх можна теж використати метод Ньютона. Легко врахувати й третю похідну функції $F(\lambda_0)$, замінюючи $(i\beta)^3$ на $-i\beta_0^2\beta$. Це дасть для β *квадратне* рівняння з членом першого степеня відносно β з коефіцієнтом $-i\beta_0^2F'''(\lambda_0)/6$. Поява комплексних коренів у таких системах свідчить про *збудження* за рахунок запізнення *коливань* у системі, яка без запізнення немає власних коливальних властивостей. Відома в медицині "хвороба алкоголіків" *тремор*, коли дрижать руки, є наслідком запізнень у передачі сигналів у системі око-мозок-рука.

5. Стійкість систем зі сталими запізненнями. Якщо *найбільша* дійсна частина коренів характеристичного полінома від'ємна, то розв'язки ДРЗ *асимптотично стійкі*. Але для встановлення стійкості зовсім немає потреби пошуку цих коренів. Для звичайних ДР зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+ a_1y' + a_0y = 0 \qquad (3)$$

необхідною умовою є *додатність* всіх $a_к$. Але вона не є *достатньою*, що засвідчує простий приклад: характеристичний многочлен $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 6$ має дійсний корінь $\lambda_1 = -2$ та пару комплексних коренів з дійсною частиною $+^1/_2$, що свідчить про *нестійкість* розв'язків. Існує багато ознак – *критеріїв* (необхідних та достатніх умов) асимптотичної стійкості (Рауса, Гурвіца, Льєнара – Шипара тощо), які використовують нерівності для виразів, побудованих з коефіцієнтів характеристичного рівняння. На жаль, вони *не* узагальнюються на рівняння із запізненнями.

5.1. Критерій Михайлова. У 1938 році А.В. Михайловим запропонований геометричний критерій асимптотичної стійкості систем, які описуються рівняннями (3): для стійкості розв'язків необхідно й достатньо, щоби годограф функції $F(i\omega)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$ зробив *поворот* Φ навколо точки O на кут $n\pi/2$. При $\Phi < n\pi/2$ рівняння нестійке [6, с. 797 - 798]. Ми довели, використовуючи принцип аргументу, що цей критерій переноситься й на системи зі сталими запізненнями. При цьому крім степеневих членів $a_0 - a_2\omega^2 + \ldots\ i(a_1\omega - a_3\omega + \ldots)$ будуть ще степенево -тригонометричні доданки $в_0\cos\omega\tau_0 + в_1\omega\sin\omega\tau_1 - в_2\omega^2\cos\omega\tau_2 + \ldots + i(в_1\omega\cos\omega\tau_1 - в_0\sin\omega\tau_0 + \ldots)$. Недоліками цього критерія є його "геометричний" характер й нескінченість проміжку зміни ω. Ми ще на початку 80-х рр. запропонували як "алгебраїзацію" критерія Михайлова, так і його фінітизацію, використовуючи це в курсі "Диференціальні рівняння" у Донецькому політехнічному інституті (ДПІ). Ще раніше у "Методичних указівках,,," [7, с. 39] пропонувалося заміною $\omega = \text{tg} z$ фінітизувати проміжок зміни аргументу характеристичного полінома на $[0,\pi/2[$, а для фінітизації діапазону зміни довжини радіуса – вектора r розглядати його орт r/r. Якщо взяти заміну $\omega = \text{tg}(\pi/2z)$, то проміжок для діапазону z буде [0; 1[. Для рівняння без запізнення це дасть годограф функції $r(\varphi) = a_0\cos^n\varphi - a_2\cos^{n-2}\varphi * \sin^2\varphi + \ldots + i\sin\varphi(a_1\cos^{n-1}\varphi - a_3\cos^{n-3}\varphi * \sin^2\varphi + \ldots)$, $\varphi = \pi/2z$, якщо помножити на додатній множник $\cos^n\varphi$. Фактично, це вже дає *фінітизацію* критерія, бо як діапазон зміни аргументу z, так і довжина радіуса - вектора $r(\varphi)$ скінчені.

Для системи ДР $x' = Ax$ із сталою матрицею A, в ролі вектора $r(\varphi)$ можна прийняти визначник $\det(A\cos\varphi - iE\sin\varphi)$. При цьому початковий крок можна вибрати порядку 1; якщо при зменшенні кроку вдвічі кут повороту радіуса – вектора суттєво не зміниться, то по його величині можна зробити висновок про стійкість. Для членів із запізненням множник $\exp(-i\text{tg}\varphi)$ має модуль 1, що не заважає фінітизації.

5.2. Фінітизація критерія Михайлова. Пізніше автор запропонував розглядати годограф, складений з двох дуг: перша відповідає проміжку $\omega \in [0;1]$, а друга – напіввісі $\omega \in (1;+\infty)$. Для другої дуги пропонується заміна $\omega = 1/z$, $z \in (0;1)$. Для цієї другої дуги будуємо радіус – вектор $r_1 = z^n r$. Скалярний множник зберігає кути (перетворення подібності з центром у точці O), але фінітизує нескінчений розворот годографу типу спіралі. На жаль, при такій заміні для рівнянь із запізненням з'являються тригонометричні члени з нескінченно зростаючим аргументом τ/z. Але, наявність при них множників типу $z^{к}$ дає границю 0 для них при $z\to0$. Можна отримати й одне рівняння фінітизованого годографа заміною $\omega= z/(1-z)$.

Унаочнення – побудова фінітизованого годографу - не є необхідним. Кут повороту можна знаходити чисельно, розбивши проміжки $[0;\Omega]$ для ω (Ω- достатньо велике число) та (0;1) для z на достатньо малі частини й знаходити поворот годографа на кожній частині, додаючи ці повороти, поки не дійдемо до кінця. В разі нерівності для знайденої суми $\Phi<n\pi/2$ необхідно повторити розрахунок, поділивши кожен крок навпіл. При наближеному збереженні цієї суми можна зробити висновок про нестійкість розв'язків. Похибка відношення $m=2\Phi/\pi$ може досягати 0.4. Такий алгоритм реалізовано в статтях [1,2,3]. В останні роки автор запропонував повну "алгебраїзацію" критерія, замінивши пошук суми частинних поворотів розв'язанням задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. При цьому не вимагається високої точності, бо для величини $m = \Phi/(\pi/2)$ потрібно округлення до цілого значення m. При $m = n$ рівняння *стійке*; при $m < n$ – воно *нестійке*. Розроблені учнями автора програми тестовані і можуть використовуватися для синтезу систем, які описуються як звичайними ДР, так і ДРЗ.

5.3. Пошук запасу стійкості систем ДР. *Факт* стійкості може не задовольняти дослідника, особливо, коли він розв'язує задачу синтезу системи. *Точно* реалізувати фізичні (технічні) параметри системи нереально, а при малому *запасі стійкості* (коли відстань від уявної осі коренів характеристичного рівняння мала), не вдається гарантувати стійкість реальної системи. Запас стійкості можна оцінювати модулем найбільшої дійсної частини коренів характеристичного квазіполіному. Завдяки додатності всіх його коефіцієнтів максимум $\mathrm{Re}\,\lambda<-(a_0+в_0)/(a_1+в_1)$. Ця оцінка може бути достатньо грубою; її можна вточнити, відшукавши перший справа дійсний корінь або першу справа пару комплексно – спряжених коренів за методикою, описаною в п. 4. Автором за допомогою учнів побудовані прикладb, коли система, яка описується звичайними диференціальними рівняннями, стійка, але при заміні члена $ay(t)$ на $a_1y(t) + вy(t - \tau)$ при $a = a_1+в$ воно стає нестійким. На рис. 2 показані їх годографи.

Висновки

1. Крім висвітлення відомих фактів та методів їх вивчення, автором запропоновано деякі нові підходи. Зокрема,

2. Пояснюється причина появи нескінченої множини комплексних коренів характеристичного полінома навіть при наявності одного елемента із затримкою передачі сигналу: процес стає хвильовим і його дискретний спектр стає нескінченим. Математично це відповідає розкладанню функції $y(t - \tau)$ в нескінченний степеневий ряд по степенях τ з коефіцієнтами – похідними в точці t.

3. Пропонуються чотири варіанти фінітизації критерія Михайлова, які можна використовувати як для побудови годографу, що унаочнює процес

установлення стійкості системи, так і для встановлення самого факту стійкості системи, яка описується як одним рівнянням високого порядку, так і системою лінійних автономних ДР.

4. Пропонується алгоритм знаходження комплексного кореня характеристичного квазіполіному, який використовує дійсні корені його похідної для отримання дійсної та уявної частин наближення для нього.

5. Пропонується метод оцінки запасу стійкості за допомогою знаходження дійсної частини найближчого до уявної осі кореня.

6. Наводиться приклад стійкої системи, яка при заміні одного з елементів сумою членів без запізнення та з запізненням із коефіцієнтами, сума яких зберігається, стає нестійким.

7. Матеріали статті можуть бути використані як у курсах фізики та технічних дисциплін, так і при вивченні курсу “Диференціальні рівняння”, де розглядаються відповідні питання (стійкості та аналізу систем із запізненнями), зокрема, у спецкурсі “Стійкість лінійних систем”, та в курсі “Системи автоматичного управління (регулювання)”.

***

Автор вдячний своїм учням О. Дрозду, О. Дрєєву, О. Донцю, О.Музиченку, без допомоги яких запропоновані ним алгоритми не були б реалізовані на сучасних ПЕОМ. Наведені рисунки були побудовані дипломником автора О.Донцем.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Філер З. Дрозд О. Критерій стійкості лінійних систем із запізненнями// // Всеукр. конф. «Диференц. – функціональні рівняння та їх застосування». Тези доп. – К.: Ін-т мат. НАН Укр., 1996. – С. 188.
2. Филер З.Е., Дрозд А.П. Реализация на ЭВМ критерия устойчивости Михайлова для линейных систем с запаздыванием// Науч. тр. Лётной Академии. Вып. 11, ч. 1. – Кировогр.: ГЛАУ, 1997. С. 198 – 2001.
3. Дрозд А.П., Филер З.Е. Критерий Михайлова устойчивости линейных систем с запаздываниями и его реализация на ЭВМ// Теория и системы управления. Изв. АН Рос.Федер., 1999, № 3. – С. 7 – 9.
4. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
5. Кривицкий Б.Х. Задержка временная// В кн.: Физический энциклопедический словарь. Т. 2. – М.: Сов. Энциклоп., 1962. – С. 28.
6. Розов И.Х. Михайлова критерий// В кн.: Математическая энциклопедия. Т.3. – М.: Сов. Энциклоп., 1982. – С. 797-798.
7. Филер З.Е. Методические указания к изучению курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (для студентов специальности 0647 «Прикладная математика»). – Донецк: ДПИ, 1979. – 52 с.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 18 березня 2006 р.