УДК517

ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТІ ЄНСЕНА МЕТОДОМ ШТУРМА

О.П. Макарчук

Доводиться нерівність Єнсена методом Штурма.

The inequality of Ensen are proved by methods of Shturm.

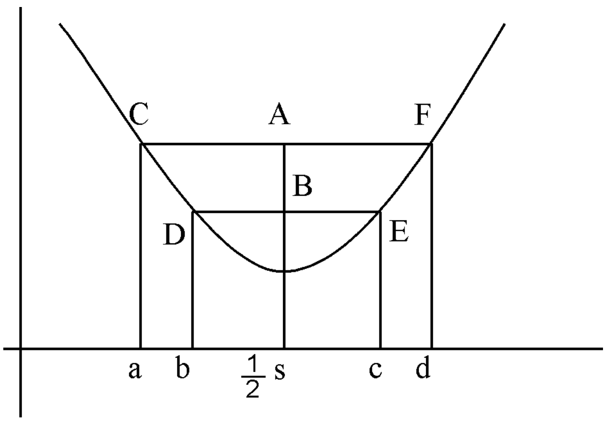
Для опуклої вниз функції $f(x)$ і дійсних чисел $x_1, x_2,\ldots,x_n$ доведемо нерівність Єнсена:

$$1/n(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n))\geq f(1/n(x_1+x_2+\ldots+x_n)) \qquad (1)$$

Спочатку доведемо лему:

Лема. Для чисел $a\leq b\leq c\leq d$, що задовольняють рівність: $a+d=b+c=S$, виконується нерівність: $f(a)+f(d)\geq f(b)+f(c)$.

Доведення. Фактично це означає, що при зближенні чисел x і y при їх сталій сумі вираз $f(x)+f(y)$ не збільшується. Ця нерівність має досить наглядне геометричне ілюстрування.



На малюнку зображені точки $C(a,f(a))$, $D(b,f(b))$, $E(c,f(c))$, $F(d,f(d))$ і середини A та B відрізків CF і DE відповідно. Точка не виходить за межі “чаші” CDEF, тому ордината точки A не менша за ординату точки B, тобто $½(f(a)+f(d))\geq ½(f(b)+f(c))$, або $f(a)+f(d)\geq f(b)+f(c)$, що і потрібно було довести.

Однак звісно для більшої чіткості потрібні алгебраїчні міркування, які ґрунтуються на означенні опуклості.

Зрозуміло, що знайдеться $\lambda є[0,1]$ таке, що $b=\lambda a-(1-\lambda)d$, тоді $c=a+d-b=a+d-\lambda a--(1-\lambda)d=(1-\lambda)a+\lambda d$. Враховуючи опуклість функції $f(x)$, маємо: $f(b)+f(c)=f(\lambda a+(1-\lambda)d)+f((1-\lambda)a+\lambda d)\leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(d)+(1-\lambda)f(a)+ \lambda f(d)=f(a)+f(d)$.

Тепер перейдемо до безпосереднього доведення нерівності (1). Позначимо середнє арифметичне чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ через A. Якщо не всі дані числа рівні між собою, то найменше з них менше A, а найбільш - більше A. Нехай, скажімо, $x_1<A$, $x_2>A$. Замінивши x_1 на A, а x_2 на $x_1+ x_2-A$, ми зберігши суму цих чисел зблизимо їх. При чому середнє арифметичне A не зміниться, а ліва частина нерівності (1) за лемою не збільшиться. Якщо в новому наборі чисел є нерівні, то виконуємо ту саму операцію. Так як на кожному кроці збільшується кількість чисел, рівних A, через скінченне число кроків всі числа стануть рівними і ми прийдемо до набору, для якого ліва і права частина нерівності (1) рівні. Так як при цьому на кожному кроці ліва частина нерівності не зростала, а права залишилась незмінною, то нерівність (1) правильна.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Наука, 1965. – 342 с.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Наука, 1965. – 347 с.
3. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967. – 252 с.
4. Болтянский В. Г. Ялгом И. М. Геометрические задачи на максимум и минимум. – В кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. V. – М.: Наука, 1966. – 421 с.
5. Вортянський П. Е. Методи мінімізації функцій. // У світі математики. Том 5, вип.. 3, 1983. – с. 22–27

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 20 березня 2006 р.