

УДК 511

ПРО ДЕЯКІ ПРОБЛЕМИ СТРУКТУРНОЇ ТЕОРІЇ ДОДАВАННЯ МНОЖИН

В.М. Євладенко , Л.В. Євладенко , Ю.П. Пігарьов

Дається короткий огляд результатів про залежність між інваріантами T і R в структурній теорії додавання множин. Акцентується увага на окремих ще не розв'язаних проблемах.

This is a short survey of some results of invariant T and R interdependence in the sets adding structural theory. The emphasis is made on some problems which haven't been investigated yet.

Загальноприйняті позначення: $K = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ – множина різних цілих чисел; $T(2 \cdot K) = T$ – число різних сум, утворених елементами множини K і K ; R – число різних додатніх різниць, утворених елементами множини K ; $2 \cdot R + 1 = \bar{R}$.

В 1966 році угорський математик П.Ердеш висунув припущення, що $T \leq \bar{R}$. Здавалось правдоподібним, що має місце також і нерівність $T \geq R + k$, де k – кількість елементів множини K . Тобто існувала гіпотеза, що

$$R + k \leq T \leq \bar{R} . \quad (1)$$

Але, як пізніше виявилось [1, 173], існують множини, для яких $T > \bar{R}$. Зокрема, такою є множина $K_1 = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14\}$. Вона складається з чотирьох відрізків послідовних цілих чисел: $[0, 1, 2]$, $[4, 5]$, $[9]$, $[12, 13, 14]$. При цьому множина K_1 має властивість *самоущільнення*: кількість цілих чисел третього відрізка /тобто 1/ дорівнює кількості відсутніх впорядкованих цілих чисел між першим і другим відрізками, тобто 1, адже відсутнім є одне число 3. Число ж цілих чисел четвертого відрізка (тобто 3) дорівнює числу відсутніх впорядкованих цілих чисел між другим і третім відрізками, тобто 3, адже відсутніми є три числа: 6, 7, 8.

Доведено, що для множин, які складаються з трьох відрізків послідовних цілих чисел, значення T і R задовольняють нерівностям (1).

В теоремі 1 роботи [2, с.52] будуються класи множин, для яких різниця $T - \bar{R}$ дорівнює будь-якому наперед заданому непарному натуральному числу. З цією метою розглянемо такі множини цілих чисел:

$$\{4 + 12s, 5 + 12s, 9 + 12s, 12 + 12s, 13 + 12s, 14 + 12s, \} = L_s, s \in N \cup \{0\};$$

$$\{0, 1, 2\} = A; A \cup L_0 = K_1; K_1 \cup L_1 = K_2, \dots, K_{n-1} \cup L_{n-1} = K_n \quad (n \in N).$$

При цьому: $T(2 \cdot K_s) = T_s$, R_s – число різних додатніх різниць, утворених елементами множини K_s , а $2 \cdot R_s + 1 = \bar{R}_s$ ($s \in N$).

Методом математичної індукції доводиться, що при будь-якому натуральному n для цих множин мають місце рівності:

$$T_n = 4 + 24n, \bar{R}_n = 5 + 22n . \quad (2)$$

Виходячи з цих нерівностей, будуються множини, для яких різниця $T - \bar{R}$ дорівнює будь-якому наперед заданому непарному натуральному числу, оскільки $T_n - \bar{R}_n = 2n - 1$.

В теоремі 2 цієї ж роботи додатково вводяться такі множини: $\{4 + 12n, 5 + 12n\} = B$; $K_n \cup B = K'_n$; $T(2 \cdot K'_n) = T'_n$; R'_n – число різних додатніх різниць, утворених елементами множини K'_n ; $2 \cdot R'_n + 1 = \bar{R}'_n$ і доводиться, що при будь-якому натуральному n маємо:

$$T'_n = 11 + 24n, \quad \bar{R}'_n = 11 + 22n. \quad (3)$$

Виходячи з рівностей (3), можна будувати множини, для яких різниця $T - \bar{R}$ дорівнює будь-якому наперед заданому парному натуральному числу, оскільки $T'_n - \bar{R}'_n = 2n$.

Отже, узагальненням теорем 1 і 2 є твердження: існують множини, для яких різниця $T - \bar{R}$ дорівнює будь-якому наперед заданому натуральному числу.

Тут же [2, с.54] вказано ще один спосіб одержання множин з додатною різницею $T - \bar{R}$, пов'язаний з використанням поняття *подібних* множин. Цим способом будуються множини, для яких $T - \bar{R} = n$, причому кожна з них породжує зчисленну множину подібних їй множин з такими ж самими величинами різниць $T - \bar{R}$.

В теоремі 3 [2, с.55] використовуються дві множини K_n і K'_n , які будуються індуктивно.

Множина K_n одержується наступним чином:

якщо $L_1 = \{0, 1, 2, 4, \dots, 2k\}$, а $L_S = \{a, a + 1, a + 2, a + 4, \dots, a + 2k\}$, то $L_{S+1} = \{2(a + 2k) + 1, (a + 2k) + 2, 2(a + 3k) + 3, 2(a + 2k) + 5, \dots, 2(a + 2k) + 2k + 1\}$ і $\bigcup_{S=1}^n L_S = K_n$ при будь-якому натуральному n .

Множина K'_n будується так:

нехай $L'_n = \{0, 1, 3, 5, 7, \dots, 2k + 1\}$ і якщо $L'_S = \{a, a + 1, a + 3, a + 5, \dots, a + 2k + 1\}$, то $L'_{S+1} = \{2(a + 2k + 1) + 1, 2(a + 2k + 1) + 2, 2(a + 2k + 1) + 4, \dots, 2(a + 2k + 1) + 2k + 2\}$, і $\bigcup_{S=1}^n L'_S = K'_n$ ($n \in \mathbb{N}$). При цьому $T(2K_n) = T_n$, $T(2K'_n) = T'_n$, а число різних додатніх різниць, утворених елементами множин K_n і K'_n , відповідно дорівнює R_n і R'_n .

Методом математичної індукції доводиться, що для побудованих множин K_n і K'_n при будь-яких натуральних k і n мають місце рівності:

$$R_n = 2k + (4k + 1) \frac{n(n-1)}{2}, \quad T_n = (3k + 2) \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{і}$$

$$R'_n = (2k + 1) + (4k + 3) \frac{n(n-1)}{2}, \quad T'_n = (3k + 3) \frac{n(n+1)}{2}.$$

Як наслідок з цієї теореми одержуємо, що при $n=7$ $R_7 - T_7 = 2k - 35$ і при $k \geq 18$ різниці $R-T$ дорівнюють будь-яким наперед заданим непарним натуральним числам, а $R'_7 - T'_7 = 2k - 20$ і при $k \geq 11$ різниці $R' - T'$ дорівнюють будь-яким наперед заданим парним натуральним числам. Отже, побудовано множини, для яких різниці $R-T$ дорівнюють будь-яким наперед заданим натуральним числам, тобто $R-T=n$.

В роботі [3, с.52] доводиться теорема 4, яка є узагальненням теореми 3

[2, с.55]. З цією метою будуються спеціальні множини K_n , для яких при будь-яких натуральних k і n мають місце рівності:

$$R_n = R_1 + \bar{R}_1 \cdot \frac{n^2 - n}{2}, \quad T_n = T_1 \cdot \frac{n^2 + n}{2}.$$

З теореми 4 одержуємо два наслідки.

Наслідок 1. Якщо K_1 – множина степенів з основою $a > 1$ ($a \in \mathbb{N}$) і різними натуральними показниками і $T(K_1) = k_1$, то

$$T(2K_1) = \frac{k_1^2 + k_1}{2}, \quad \text{а} \quad R_1 = \frac{k_1^2 - k_1}{2} \quad \text{і} \quad \bar{R}_1 = k_1^2 - k_1 + 1.$$

Використавши теорему 4, одержимо множину з такими значеннями T_2 і \bar{R}_2 : $T_2 = T_1 \cdot \frac{k_2^2 + k_2}{2}$, $\bar{R}_2 = \bar{R}_1 \cdot (k_2^2 - k_2 + 1)$. Застосувавши цю теорему $(m-1)$ раз, приходимо до множини, для якої

$$T_m = \prod_{i=1}^m \frac{k_i^2 + k_i}{2}, \quad \bar{R}_m = \prod_{i=1}^m (k_i^2 - k_i + 1).$$

Отже, при досить великих m ($m \in \mathbb{N}$) будемо одержувати множини з як завгодно великими значеннями T_m і \bar{R}_m .

Наслідок 2. Теорема 4 дає можливість будувати такі множини, для яких $R < T < R + T(k)$ і множини, для яких $T < R$.

Деякі з таких множин вказані в роботі [3, с.54]. Тут же наведені значення R і T для множин, що налічують 6, 7 та 8 елементів і дається класифікація цих множин за значеннями R і T . Відповідні множини взяті з таблиць 1, II роботи [4, с.189].

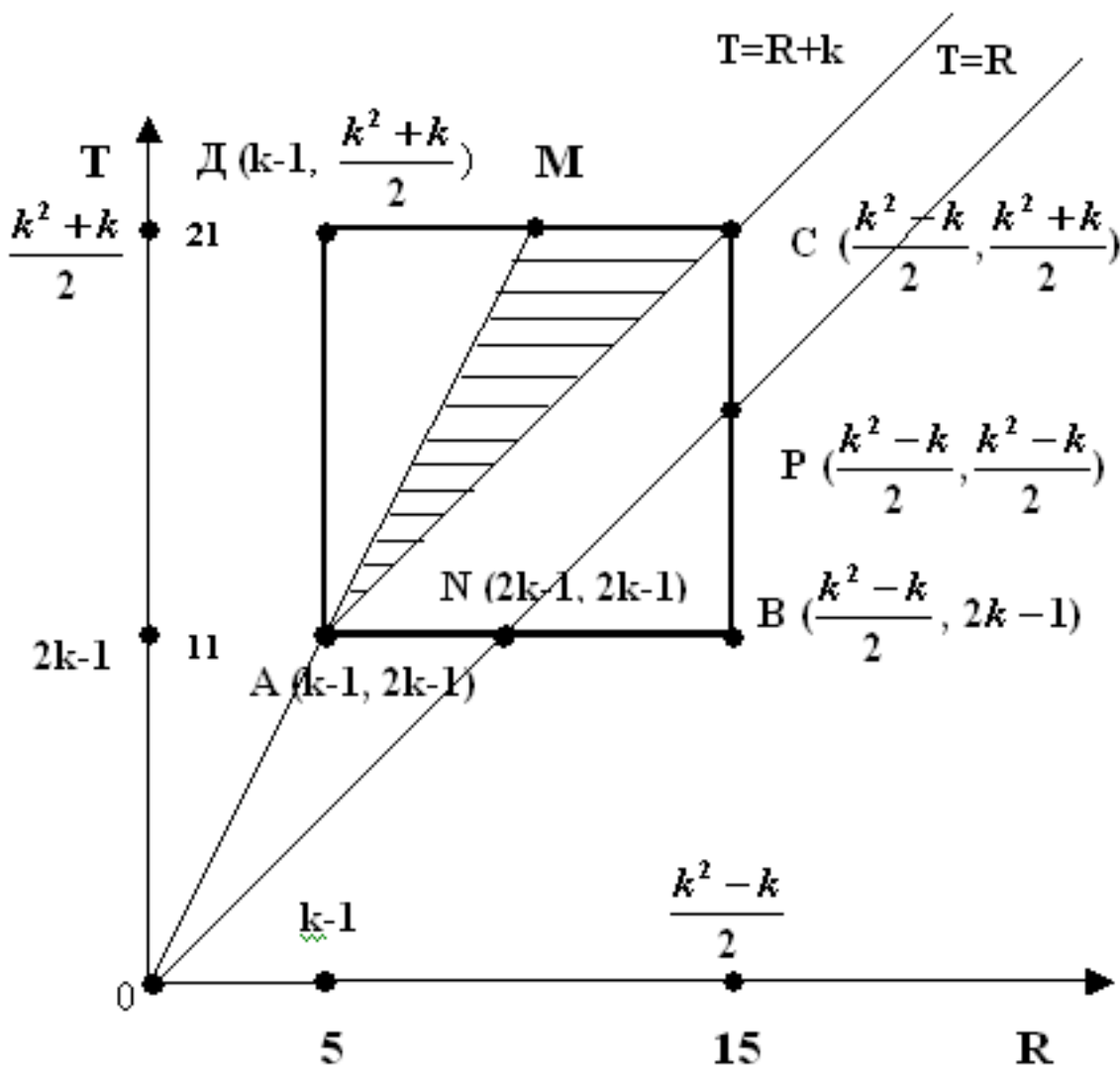
В статті [5] доведено теорему про існування множин, для яких $\bar{P} > c \cdot T$, де c – як завгодно велике дійсне число. Знайдено також значення $\frac{\ln T}{\ln R}$ у вершинах критичних трикутників і, як приклад, побудовано множину, для якої $\bar{R} \geq 100 \cdot T$.

Цікава геометрична інтерпретація залежностей між R , T і k дається в роботі [3, с.57]. Суть її полягає в наступному.

Відомо, що $2 \cdot k - 1 \leq T \leq \frac{k^2 + k}{2}$, а $k - 1 \leq R \leq \frac{k^2 - k}{2}$ [6, с.19, с. 57].

В прямокутній системі координат ROT побудуємо квадрат $ABCD$ (k), координатами вершин якого є: $A(k-1; 2k-1)$, $B\left(\frac{k^2 - k}{2}; 2k - 1\right)$, $C\left(\frac{k^2 - k}{2}; \frac{k^2 + k}{2}\right)$, $D\left(k - 1; \frac{k^2 + k}{2}\right)$. Цей квадрат зображений на мал. 1. при значенні $k=6$.

Для множини $L_1 = \{0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$, де $a_k \in N(i=1, 2, \dots, k-1)$, $T(L_1) = k$, $T(2 \cdot L_1) = T$. Число ж різних додатніх різниць елементів множини L_1 дорівнює R . Кожній множині $\{0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ поставимо у відповідність точку з координатами (R, T) .



Мал. 1 /для $k=6$./

Точки з координатами (R, T) не виходять за межі квадрата $ABCD(k)$. Рівняння діагоналі (AC) цього квадрата має вигляд $T = R + k$. Пряма $T = \bar{R} = 2 \cdot R + 1$ проходить через вершину A і перетинає сторону $[CD]$

квадрата в точці $M\left(\frac{k^2 + k - 2}{4}; \frac{k^2 + k}{2}\right)$. При цьому утвориться так званий

критичний трикутник $AMC(k)$. Виявляється, що при $k \leq 7$ точки з координатами (R, T) не виходять за межі відповідного критичного трикутника, а при $k \geq 8$ уже знайдуться такі точки, які цій властивості не задовольняють. Зокрема, при $k=8$ такою точкою є точка з координатами $(12, 26)$, що відповідає множині $\{0, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 14\}$ [3, с.58, мал.2]. Переважна більшість точок, що відповідають восьмиелементним множинам, попадають в критичний трикутник $AMC(8)$.

Якщо побудувати бісектрису $T=R$, то вона перетне сторону квадрата $ABCD(k)$ ($k \geq 5$) в точках $N(2 \cdot k - 1; 2 \cdot k - 1)$ і $P\left(\frac{k^2 - k}{2}; \frac{k^2 - k}{2}\right)$. При цьому

утвориться трапеція $ANPC(k)$ і трикутник $NPB(k)$ (мал. 1). Виявляється [3, с.58], що існують множини, для яких відповідні точки попадають у внутрішню область трапеції $ANPC(k)$, а також множини, відповідні точки яких попадають у трикутник $NPB(k)$ [3, с.58].

Якісна залежність між інваріантами R і T характеризується відношенням $\ln T / \ln \bar{R}$. Нехай α – нижня границя цієї послідовності для будь-яких множин K , а β – верхня границя цієї послідовності.

В роботі [1, с.172] доведено, що $\alpha \geq 3/4$, а $\beta \leq 4/3$.

Зокрема, для множини $\{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14\}$ $T=28$, $P=21$, $\ln T / \ln P = \ln 28 / \ln 43 \approx 0,89$. Виявляється, що для різних інших відомих множин $\ln T / \ln \bar{P} > 0,89$. Проблемою залишається відшукання таких множин, для яких $3/4 < \ln T / \ln \bar{P} < 0,89$, тобто множин, для яких вказане відношення попадає в інтервал $(0,75; 0,88)$, зокрема, наближається до $0,75$.

Що ж стосується β – верхньої границі послідовності $\ln T / \ln \bar{P}$, то можна вказати такий набір множин, для яких послідовність значень $\ln T / \ln \bar{P}$ є зростаючою і наближається до $\beta=4/3$. Такою, зокрема, є послідовність: $\ln 28 / \ln 27 \approx 1,011$; $\ln 26 / \ln 25 \approx 1,0222$; $\ln 59 / \ln 55 \approx 1,0175$; $\ln 51 / \ln 47 \approx 1,0212$; $\ln 67 / \ln 61 \approx 1,0228$; $\ln 83 / \ln 75 \approx 1,0235$; $\ln 99 / \ln 89 \approx 1,02372$; $\ln 115 / \ln 103 \approx 1,02378$. Очевидно, що кожне з даних відношень менше $4/3$. Проблемою є відшукання таких множин, для яких $\ln T / \ln \bar{P} > 1,024$, і таких, що $(\ln T / \ln \bar{P} - 4/3)$ є як завгодно мале дійсне число.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Пигарев Ю.П., Фрейман Г.А. О зависимости между инвариантами R и T : Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств. – М.: Союзполиграфпром при ГК СМ СССР, 1973. – С. 172–174.

2. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Про залежність між інваріантами R і T . //Наукові записки. – Вип. 12. Серія: Фізико-математичні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 1997. – С. 51–55.
3. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Залежність між інваріантами R і T . // Наукові записки. – Вип. 57. Серія: Математичні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. – С. 52–59.
4. Асафова Г.А. Об одном типе логических квадратов шестого порядка: Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств. – М: Союзполиграфпром при ГК СМ СССР, 1973. – С. 189–190.
5. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Деякі питання структурної теорії додавання множин. //Наукові записки. – Вип. 65. Серія: Математичні науки. –Кіровоград: КДПУ ім. В.Винниченка, 2006. – С.67–69.
6. Фрейман Г.А. Начала структурной теории сложения множеств. – Казань, 1966. – 140с.

*Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка*

Надійшло 16 січня 2006 р.