УДК 517.54

ІНТЕГРАЛ ШВАРЦА ДЛЯ ЗЧИСЛЕННО-ЗВ'ЯЗНОЇ КРУГОВОЇ ОБЛАСТІ*)

Л.О.Дундученко

Построена формула, обобщающая известную формулу Шварца на случай счетно-связной круговой $\delta-$области, у которой центры граничных окружностей расположены на конечном числе прямых, принадлежащих одному пучку. С помощью этой формулы можно восстановить регулярную и однозначную функцию достаточно общего вида внутри рассмотренной области по значениям её вещественной части на границе области.

A formula is found which generalizes the already known Schwarz formula for the case of calculated-connected circular $\delta-$domain which has not more than a calculated set of cluster points of boundary components. The value of each single-value and regular function of a rather wide class in the midlle of the domain may be established by means of this formula if the values of its real part on the domain boundary are known.

1.Будемо розглядати зчисленно-зв'язані кругові $\delta-$області B_∞ на *z*-площині, що визначаються умовами : 1) B_∞ є повна *z*-площина, з якої вилучено зчисленну множину кругів $\left|z-a_k\right| \le R_k$, $\left|a_j-a_k\right| > R_j + R_k$ при $j \ne k; j,k = 1,2,...$; 2) центри всіх граничних кіл Γ_k: $\left|z-a_k\right| = R_k$, k=1,2…, мають щонайбільше зчисленну кількість точок скупчення ξ_k, k=1,2,…, в тому числі, можливо, й точку $\xi_0 = \infty$; 3) B_∞ має властивість $\delta-$ізольованості, тобто існує таке фіксоване число $\delta, \delta > 0$, що перетин двох кілець $Q_k^{(\delta)}: R_k < \left|z-a_k\right| < R_k(1+\delta)$ і $Q_j^{(\delta)}: R_j < \left|z-a_j\right| < R_j(1+\delta)$ є порожня множина при $j \ne k; j,k = 1,2,....$

Через $\overline{B}_\infty$ позначимо замикання області B_∞, $\overline{B}_\infty \equiv B_\infty \cup \partial B_\infty \cup \left\{\xi_k\right\}_{k=0}^{\infty}$.

2. Розглянемо в області B_∞ клас $\Im(B_\infty)$ однозначних та регулярних функцій *w=f(z)*, що мають властивості: 1) *f(z)* неперервна в $\overline{B}_\infty$; 2) якщо *f(z)=u(z)+iv(z),* то $\max\left|u(z)\right| \le b_n$ й $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Цей клас–непорожній. Наприклад, нехай B_∞ така, що $a_1=0$, $a_n=2^n$, $R_1=1$, $R_n \le \frac{1}{4}, 0 < \delta \le \frac{1}{2}$, тоді $w = \ln\frac{2z+1}{2z-1} \in \Im(B_\infty)$, (ln1=0). Інші нетривіальні приклади функцій класу $\Im(B_\infty)$ випливають безпосередньо з результатів Грьотша [1] та з інших [2,3].

---

*) Ця публікація – передрук (за згодою автора – випускника Кіровоградського державного педагогічного інституту 1951 року) статті автора з ДАН УРСР, №9 Сер.А, 1972, с.778-781.

3. Будемо розглядати сім'ю функцій

(1) $$w = F_k(z;\zeta_k), k = 1,2,...,(\zeta_k = a_k + R_k e^{i\theta}; z \in B_\infty)$$

Кожна функція цієї сім'ї при фіксованому ζ_k однолисто відображає B_∞ на праву півплощину з скінченними та прямолінійними купюрами, паралельними уявній осі так, що Γ_k переходить в уявну вісь та в кільці $Q_k^{(\varepsilon)}$ цю функцію можна подати у вигляді

(2) $$F_k(z;\zeta_k) = \frac{z + \zeta_k - 2a_k}{z - \zeta_k} + \psi_k(z;\zeta_k).$$

Тут $\psi_k(z;\zeta_k)$- однозначна функція, неперервна по ξ_k, $\xi_k \in \Gamma_k$, та регулярна в кільці

$$R_k(1-\varepsilon) < |z - a_k| < R_k(1+\varepsilon)$$

де $0<\varepsilon<\delta, \varepsilon -$досить мале число, що не залежить від k, k=1,2,…. На колі Γ_k ця функція набирає чисто уявних значень, і нормується у вищезгаданому кільці розкладом

(3) $$\psi_k(z;\zeta_k) = ... + \frac{c_{-1}(\zeta_k)}{z - a_k} + c_1(\zeta_k)(z - a_k) + ...$$

Отже,

$$\operatorname{Re} F_k(\zeta_k^*;\zeta_k) \equiv p_k^{(k)} = 0, \zeta_k^* \in \Gamma_k, k = 1,2,...;$$

(4) $$\operatorname{Re} F_k(\zeta_j;\zeta_k) \equiv p_j^{(k)}(\theta) > 0, (\zeta_j^* \in \Gamma_j; j \neq k)$$

є неперервні функції $\theta, \theta = \arg(\zeta_k - a_k), 0 \le \theta \le 2\pi$, і якщо θ=const, тобто $\xi_k \in \Gamma_k$-фіксоване, то і $p_j^{(k)} = const > 0$.

Існування та єдиність таких функцій випливає з відомої теореми Гільберта [4] про відображення на площину з паралельними купюрами та з принципу симетрії.

4.Л е м а 1. Нехай M, $M \subset B_\infty$-довільний компакт. Якщо $z \in M$, то для кожного n, n=1,2,…, має місце оцінка

(5) $$F_n(z;\zeta_n) \le C(\delta;M),$$

де стала $C \equiv C(\delta;M)$ залежить лише від δ та вигляду M.

Доведення. Нехай n– довільне натуральне число, яке ми зафіксуємо. Припустимо спочатку, що $M \cap Q_n^{(\delta)} -$непорожня множина. Оскільки $\operatorname{Re} F_n(z;\zeta_n) > 0$ при $z \in Q_n^{(\delta)}$ та $\int\limits_\gamma F_n(z;\zeta_n)\cdot(z - a_n)^{-1}dz = 2\pi i$, де $\gamma: |z - a_n| = \rho, R_n < \rho = const < R_n(1+\delta)$, то $F_n(z;\zeta_n)$ можна подати в $Q_n^{(\delta)}$ структурною формулою [5]

(6) $$F_n(z;\zeta_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(te^{-i\theta})d\mu_{1\zeta_n}(\theta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\frac{q}{t}e^{i\theta})d\mu_{2\zeta_n}(\theta) - 1$$

де $z \in Q_n^{(\delta)}$; $t = \dfrac{z - a_n}{R_n(1+\delta)}$; $q = \dfrac{1}{1+\delta} < 1$; $\mu_{i\zeta_n}(\theta)$,

j=1,2-неспадні на відрізку функції, нормовані умовами

(7) $$\mu_{i\zeta_n}(-\pi + 0) = \mu_{i\zeta_n}(-\pi) = 0; \mu_{i\zeta_n}(\pi) = 2\pi,$$

інтеграли розуміємо як стільтьєсові. Нарешті,

$$F(x) = \frac{1+x}{1-x} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}(x^n - x^{-n}), q < |x| < 1.$$

Покладемо $d = \inf|z - \zeta_n| > 0, z \in M$. Тоді за принципом максимуму модуля одержимо $|F_n(z;\zeta_n)| \le |F_n(\xi;\zeta_n)|$, де $z \in M$, а ξ- деяка точка кола $|z - a_n| = R_n(1+d), 0 < d < \delta$.

Відомо [6], що має місце точна оцінка

(8) $$|F_n(\xi;\zeta_n)| \le F(r) + F(\frac{q}{r}) - 1 \equiv C(\delta, M)$$

де $q < r = \dfrac{1+d}{1-d} < 1$, й права частина залежить лише від δ та вигляду *M*, що й потрібно було довести у цьому випадку. Якщо ж $M \cap Q_n^{(\delta)}$ – порожня множина, то доведення леми випливає з нерівності

$$\max_{z \in M}|F_n(z;\zeta_n)| \le \max_{z \in \aleph}|F_n(z;\zeta_n)|$$

де $M \subset C$, а С- компакт з B_∞ такий, що $C \cap Q_n^{(\delta)}$- не порожня множина.

Лему доведено.

Л е м а 2. (див, наприклад, [7]). Якщо u_1 та u_2 дві однозначні та регулярні в B_∞ гармонічні функції, неперервні в B_∞, такі, що збігаються на границі ∂B_∞, то $u_1 \equiv u_2$ в B_∞.

5. Побудуємо тепер формулу Шварца для класу $\Im(B_\infty)$. Нехай $f(z) \in \Im(B_\infty)$. Покладемо $u_n(\theta) = \operatorname{Re} f(a_n + R_n e^{i\theta}), 0 \le \theta \le 2\pi; n = 1,2....$

з властивостей функцій класу $\Im(B_\infty)$ випливає неперервність $u_n(\theta)$ на відрізку $[0;2\pi]$ та її періодичність з періодом 2π. Припустимо, що функції $u_n(\theta)$, *n*=1,2.. задано.

Побудуємо однозначну та регулярну функцію *w=f(z)* класу $\Im(B_\infty)$(з точністю до чисто уявної сталої), яка задовольняє умови $u_n(\theta) = \operatorname{Re} f(a_n + R_n e^{i\theta})$. З цією метою розглянемо функцію

(9) $$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{0}^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(\theta) F_n(z; a_n + R_n e^{i\theta}) d\theta$$

Ця функція однозначна і регулярна в B_∞, бо $F_n(z;\zeta_n)$ неперервно залежить від параметра $\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$, а ряд за лемою 1 збігається рівномірно та абсолютно в області B_∞. Якщо тепер $z \to \zeta_k^0$ зсередини B_∞ по довільному шляху, $\zeta_k^0 = a_k + R_k e^{i\theta_k^0} (k = 1,2..)$, то з властивостей функцій (2) та з властивостей інтеграла Пуассона для області $|z - a_k| \geq R_k$ випливає, що

$$\lim_{z \to \zeta_k^0} \mathrm{Re}\,\Phi(z) = u_k(\theta_k^0) + \lambda_k \tag{10}$$

де

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_\nu(\theta) p_k^{(\nu)}(\theta) d\theta = const (k = 1,2,..). \tag{11}$$

Покажемо, що $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda = const. (\|\lambda\| < \infty)$. Для цього розглянемо однозначну та регулярну в B_∞ функцію $f(z) - \Phi(z) = u_0(z) + iv_0(z)$. Зрозуміло, що $u_0(z)$ - однозначна гармонічна та обмежена в B_∞ функція. Доведемо, що $u_0(z) \equiv const$. Дійсно, яким би не було число *h*, геометричне місце точок області B_∞, де $u_0(z) = h$ не може мати кратних точок або бути замкненою кривою, бо інакше $u_0(z) + iv_0(z)$ була б неоднозначною в B_∞. Отже, всі криві в B_∞, де $u_0(z) = h$, повинні закінчуватись або на граничних колах Γ_n, *n*=1,2,.. або в точках скупчення $\xi_n, n = 0,1,2...$, яких за умовою, зчисленна множина. Але тоді *h* є одне з таких чисел: або $\lambda_n, n = 1,2,...$, або $u_0(\xi_n), n = 0,1,2,...$, тобто, виявляється, що $u_0(z)$ є неперервна в $\overline{B}_\infty$ і приймає лише зчисленну множину значень. Це й приводить до абсурду, якщо серед вищезазначених чисел є неоднакові.

Отже, приймаючи до уваги вищевикладене та лему 2, маємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(\theta) F_n(z; a_n + R_n e^{i\theta}) d\theta - \lambda + i\beta, \tag{12}$$

де β – довільна дійсна стала, а $\lambda = const$, що визначається за формулою (11), причому *k* може бути довільним натуральним числом.

Формула (12) і є шукана формула Шварца для класу $\Im(B_\infty)$.

БІБЛІОГРАФІЯ

1.Grotzsch H. Uber konforme Abbildung unendlich vielfach zusammenhangender schlichter Bereiche mit endlich vielen Haufungsrandkomponenten //Leipz.Ber., 81, 2, 51 (1929), 51-86.
2. Koebe P. //Gotting. Nachr.,112, 337 (1908), 68 (1909).
3. Georgi K., Diss., Jena, 1915.
4. Курант R. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. – М.: ИЛ, 1953.
5. Заморович В.А. // ДАН СССР, 86, 465 (1952).
6. Dunducenko L.E. // Anal. Rom. –Soviet, Mat. – Fiz., 3/3 (1959).
7. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного, т.2. – М.: ИЛ, 1952.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 21 жовтня 2005 р.