УДК 518.3 / 681.142.2

ОПТИМАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С ЯДРАМИ ТИПА ФУНКЦИИ ГРИНА

П. Н. Денисенко

The algorithm of applying the V. K. Dzyadyk a-method of solving the Volterra integral equations with polynomial coefficients to the integral equations of more general type – with polynomial coefficients, kernels and limits on integral is developed. The method optimality by precision order is proved.

В роботі побудовано алгоритм застосування a-методу В. К. Дзядика розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра з многочленними коефіцієнтами до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь більш заглього вигляду – з коефіцієнтами, ядрами та межами інтегрування – многочленами. Доказана оптимальність цього алгоритму по порядку точності.

Введение. ЛИУМК – это линейное интегральное уравнение

$$F[y] = 0\ ,\ F[y] := L[y] + g;\ L[y] := A\,y + K_1[y] + \cdots + K_k[y]; \qquad (1)$$

которое удовлетворяет следующим требованиям:

– ядра $K_1, \ldots, K_k$ линейных интегральных операторов $K_1[y], \ldots, K_k[y]$ являются известными многочленами независимых переменных x, t;

– коэффициент A, свободный член g и пределы интегрирования $c_1, d_1, \ldots, c_k, d_k$ линейных интегральных операторов $K_1[y], \ldots, K_k[y]$ являются известными многочленами независимой переменной x;

– в точке ноль коэффициент A не имеет нулей – уравнение (1) не имеет особенности вида

$$A(0) = 0 \qquad (2)$$

– решение уравнения (1) единственное и является функцией переменной x аналитической в точке ноль

$$y := solve(\ F[y] = 0\ ) := c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n + \cdots; \qquad (3)$$

Линейные интегральные уравнения с многочленными коэффициентами (1) являются тем типом интегральных уравнений, который наиболее часто используется в математических моделях процессов физики и техники [1]. ЛИУМК (1) без особенности (2) определяют часть специальных функций математической физики:

– элементарные – *sin(x), cos(x), exp(x), arctg(x), ln(x+1), . . . ,*

– высшие трансцендентные – функции Эйри, . . .

Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Mathcad, …

стали естественной средой математического моделирования. СКА не имеют процедур для решения ЛИУМК (1). СКА имеют эффективные средства программирования символьного преобразования алгебраических многочленов. Поэтому для математического моделирования объектов описываемых ЛИУМК (1) в СКА актуальна задача построения приближенного метода решения ЛИУМК имеющего следующие характеристики:

– решением ЛИУМК (1) является алгебраический многочлен степени n

$y_n := solve(\ approx(F[y] = 0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ) = c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n\ ;$ (4)

– метод является оптимальным по порядку точности аппроксимации в пространстве $C_{[a,b]}$

$C_n := \|\ y - y_n\ \|_{C[a,b]} / E[\ n\ ,\ y\ ,\ C_{[a,b]}\ ] < \infty\ ,\ \|\ y\ \|_{C[a,b]} := max_{x\ \in\ [a,b]}\ |\ y(x)\ |;$ (5)

где величина наилучшего приближения функции y (3) алгебраическими многочленами степени n в пространстве $C_{[a,b]}$

$E[\ n\ ,\ y\ ,\ C_{[a,b]}\ ] := inf(\ \{c_0, \ldots, c_n\},\ \|\ y - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\ \|_{C[a,b]}\ )$ (6)

Метод 1 – алгоритм решения ЛИУМК (1) а-методом В.К. Дзядыка:

1. Вычислить многочлен

$F[\ main\_pol(n)\ ] := subs(y = main\_pol(n)\ ,\ F[y]);$ (7)

– преобразовать оператором $F[\ y\ ]$ уравнения (1) многочлен порядка n с символьными коэффициентами

$\{\ c_0\ ,\ c_1\ ,\ \ldots\ ,\ c_n\ \} := \{\ c_0(n)\ ,\ c_1(n)\ ,\ \ldots\ ,\ c_n(n)\ \};$ (8)

классического вида

$main\_pol(n) := c_0 + c_1 * x + \cdots + c_n \cdot x^n\ ;$ (9)

2. Вычислить порядок дополнительного многочлена а-метода В.К. Дзядыка решения ЛИУМК Вольтерра [2].– порядок многочлена (7)

$m = deg(\ F[main\_pol(n)\ ]\ );$ (10)

3. Вычислить дополнительный многочлен а-метода В. К. Дзядыка решения ЛИУМК Вольтерра [2] на отрезке $[-1,1]$

$E(m\ ,\ n\ ) := \tau_1 \cdot f_{n+1}(\ x\ ) + \cdots + \tau_{m-n} \cdot f_m(x)\ ;$ (11)

Многочлен имеет параметры m (10) и n, символьные коэффициенты

$\{\ \tau_1, \ldots, \tau_{m-n}\ \} = \{\tau_1(n), \ldots,\ \tau_{m-n}(n)\ \}$ (12)

и базис – многочлены Чебышева первого рода

$f_i(x) = cheb(\ i\ ,\ x\ ) = cos(\ i\ arccos(\ x\ )\ )\ ,\ i = 0,\ 1, \ldots;$ (13)

4. Перенести многочлен (11) линейно на отрезок аппроксимации $[a,b]$
$E(m\ ,\ n\ ,\ z(x)) := subs(x = z(x)\ ,\ E(m,\ n)\ );\ z(x) := 2\ (x\text{-}a)\ /\ (b\text{-}a)\ \text{-}\ 1;$ (14)

5. Вычислить аппроксимацию ЛИУМК (1) a-методом В. К. Дзядыка решения ЛИУМК Вольтерра [2] – систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)
$S = \{\ coefTayl(\ F[\ main\_pol(n)\ ] + E(m,n,z(x))\ ,\ i\ ) = 0,\ i = 0\ ,\ .\ .\ .\ ,\ m\ \}\ ;$ (15)

– вычислить коэффициенты Тейлора суммы многочленов $F[\ main\_pol(n)\ ]$ (7) и $E(m\ ,\ n\ ,\ z(x))$ (14) и приравнять их нулю.

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (15) и вычислить значения коэффициентов (8), (12) многочленов y_n (4) и $E(m,n,z(x))$ (14).

7. Вычислить искомую аппроксимацию y_n (4) решения уравнения (1) – преобразовать значения коэффициентов (8) в многочлен с этими коэффициентами.

Замечание 1. По технологии программирования аналитических приближенных методов решения функциональных уравнений в системе алгебраического программирования APS метод 1 преобразован в процедуру на языке APLAN [3]. Эта процедура решает весь класс ЛИУМК (1) без особенности вида (2).

3. Метод 1 как алгоритм проекционного метода.

Пространство Гильберта $H = L_2(a,b;\rho)$ имеет:

– элементы – функции $y,\ u,\ v,\ .\ .\ . := y(x),\ u(x),\ v(x),\ .\ .\ .\ ;\ x \in [a,b]$;

– базис – многочлены Чебышева первого рода (13) линейно перенесенные

$z(x)$ (14) на отрезок $[a,b]$ – $cheb(n,z(x))\ ,\ n = 0,1,\ .\ .\ .\ ;$

– коэффициенты Фурье-Чебышева по этому базису

$a_n(y) := (\ y\ ,\ cheb(n,z(x))\ )_{L2(a,b;\rho)}\ ,\ n = 0,\ 1,\ .\ .\ .\ ;$

– ряд Фурье-Чебышева функции на отрезке $[a,b]$

$y = a_0(y)\cdot cheb(0,z(x)) + \cdot\cdot\cdot + a_m(y)\cdot cheb(m,z(x)) + \cdot\cdot\cdot ;$

– скалярное произведение $(\ u\ ,\ v\ )_{L2(a,b;\rho)}$ и норму

$||\ y\ ||_{L2(a,b;\rho)}^{\ 2} := (\ y\ ,\ y\ )_{L2(a,b;\rho)} := a_0(y)^2 + \cdot\cdot\cdot + a_m(y)^2 + \cdot\cdot\cdot ;$

– оператор вычисления частной суммы ряда Фурье-Чебышева порядка n функции на отрезке $[a,b]$

$S_n[c_0\cdot cheb(0,z(x)) + \cdot\cdot\cdot + c_n\cdot cheb(n,z(x)) + \cdot\cdot\cdot :=$

$c_0\cdot cheb(0,z(x)) + \cdot\cdot\cdot + c_n\cdot cheb(n,z(x))\ ;$ (16)

Оператор S_n (16) проектирует пространство $L_2(a,b;\rho)$ в пространство алгебраических многочленов степени $n - H_n$, $H_n \subset L_2(a,b;\rho)$

$S_n : L_2(a,b;\rho) \to H_n$

и порождает проекционный метод решения уравнения (1)

$S_n[\, L[\, y_n \,] + g \,] = 0 \ (y_n \in H_n - y_n := main\_pol(n); \ )$ (17)

Теорема 1. *Пусть линейное интегральное уравнение (1) имеет свободный член – многочлен – $g \in H_m$ и оператор*

$L : L_2(a,b;\rho) \to L_2(a,b;\rho)\ , \ H_n \to H_m$

Тогда аппроксимация (15) уравнения (1) эквивалентна системе – уравнение (17) и тождества

$(F[\, main\_pol(n) \,]\ , \ cheb(i,z(x))\ )_{L2(a,b;\rho)} + \tau_{i-n} = 0\ , \ i = n+1\ , \ . \ . \ . \ , \ m$ (18)

Доказательство. Оператор $F[\ y\ ]$ уравнения (1) преобразует пространство H_n в пространство H_m . Поэтому аппроксимация (15) уравнения (1) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений

$(\ F[main\_pol(n)] + E(m,n,z(x))\ , \ cheb(i,\ z(x))\ )_{L2(a,b;\rho)} = 0\ , \ i = 0\ , \ . \ . \ . \ , \ m$ (19)

относительно коэффициентов (8), (12) многочленов *main_pol(n) , E(m,n,z(x)).*

Для коэффициентов Фурье-Чебышева многочлена имеет место тождество

$(a_0 \cdot cheb(0,z(x)) + \cdots + a_i \cdot cheb(i,z(x)) + \cdots, \ cheb(i,z(x))\ )_{L2(a,b;\rho)} := a_i$

Поэтому: – имеют место тождества

$(E(m,n,z(x))\ , \ cheb(i,z(x))\ )_{L2(a,b;\rho)} = 0\ , \ i = 0\ , \ . \ . \ . \ , \ n\ ;$

$(E(m,n,z(x))\ , \ cheb(i,z(x))\ )_{L2(a,b;\rho)} = \tau_{i-n} = 0\ , \ i = n+1\ , \ . \ . \ . \ , \ m\ ;$

– первые n+1 уравнения системы (19) имеют вид

$(F[\, main\_pol(n) \,]\ , \ cheb(i,z(x))\ )_{L2(a,b;\rho)} = 0\ , \ i = 0\ ,1\ , \ . \ . \ . \ , \ n\ ;$ (20)

– остальные уравнения имеют вид (18).

Оператор $S_n\ [\ F[y_n\ ]\ ]$ уравнения (17) преобразует пространство H_n в это же пространство. Поэтому, и согласно определения (16) оператора S_n , уравнение (17) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (20).

Замечание 2. В.К.Дзядык построил а-метод решения ЛИУМК Вольтерра [2] как алгоритм решения уравнений этого типа проекционным методом (17).

4. Существование решения уравнения (1) методом 1.

Теорема 2. *Пусть:*

– линейное интегральное уравнение (1) имеет свободный член – многочлен и оператор

$L : L_2(a,b;\rho) \to L_2(a,b;\rho)$, $H_n \to H_m$

– оператор проектирования S_n (16) преобразует пространство $L[\ H_n\ ]$ в пространство H_n взаимно однозначно.

Тогда существует и единственно решение аппроксимации (15) уравнения (1) – коэффициенты аппроксимирующего многочлена y_n (4);

– коэффициенты дополнительного многочлена $E(m,n,z(x))$ (14).

Доказательство. Если выполнены условия теоремы, то, согласно основной теореме сходимости проекционных методов [4] (с. 192 , теорема 15.1), существует и единственно решение $y_n \in H_n$ уравнения (17). Согласно теореме 1, аппроксимация (15) уравнения (1) эквивалентна уравнению (17) и тождествам (18).

Замечание 3. Проекционные методы имеют эффективные средства [4] (с. 193 – 195) для проверки условий теоремы 2.

5. Оценка погрешности метода 1.

Теорема 3. *Пусть:*

– линейное интегральное уравнение (1) имеет оператор $L : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$;

– оператор L имеет линейный обратный оператор L^{-1} ;

– аппроксимация (15) уравнения (1) имеет единственное решение:

– коэффициенты аппроксимирующего многочлена y_n (4);

– коэффициенты дополнительного многочлена $E(m,n,z(x))$ (14).

Тогда для погрешности аппроксимации многочленом y_n решения y интегрального уравнения (1) имеет место тождество

$y(x) - y_n(x) = L^{-1}\,[\ E(m,n,z(x))\ ]$; (21)

и справедливо неравенство

$\|\ y - y_n\ \|_{C[a,b]} < W_{n+1} \cdot |\tau_1(n)| + \cdots + W_m \cdot |\tau_{m-n}(n)|$, (22)

где

$W_i := \|\ L^{-1}[\ cheb(i,z(x))\ ]\ \|_{C[a,b]}$; (23)

Доказательство. Согласно условия 3 теоремы, известна невязка системы уравнений (15). Оператор L линейный. Поэтому разность уравнения (1) и аппроксимации этого уравнения a-методом В. К. Дзядыка – эквивалента СЛАУ (15) –

$L[\ y_n\ ] + g + E(m,n,z(x)) = 0$ ($y_n \in H_n$ -- $y_n := main\_pol(n);$)

является уравнением относительно погрешности метода $y - y_n$

$L[y - y_n] = E(m,n,z(x))$

Согласно условия 2 теоремы, решение этого уравнения имеет вид (21).

Неравенство (22) непосредственно следует из тождества (21).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и последовательность значений коэффициента W_i , $i = 0, 1, . . .$ (23) имеет конечный предел*

$lim_{n \to \infty} || L^{-1} [cheb(n,z(x))] ||_{C[a,b]} = W < \infty$ (24)

Тогда справедливо неравенство

$lim_{n \to \infty} || y - y_n ||_{C[a,b]} / (|\tau_1(n)| + \cdot\cdot\cdot + |\tau_{m-n}(n)|) \le W < \infty$ (25)

Доказательство. Неравенство (25) непосредственно следует из тождеств (21) и (24).

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и решение СЛАУ (15) имеет один отличный от нуля коэффициент невязки $\tau_i = \tau_i(n)$.*

Тогда справедливо тождество

$|| y - y_n ||_{C[a,b]} = W_{n+i} |\tau_i(n) |$ (26)

Доказательство. Тождество (21) в этом случае принимает вид

$y(x) - y_n(x) = L^{-1}[cheb(n+i,z(x))] \ \tau_i(n)$ (27)

Тождество (26) следует из тождества (27), согласно очевидного тождества

$|| L^{-1} [cheb(n+i , z(x))] \ \tau_i(n) || = || L^{-1}[cheb(n+i , z(x))] || \, |\tau_i(n) |$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и уравнение (1) является корректной задачей --*

$|| L^{-1} ||_{C[a,b] \to C[a,b]} := sup_{y \in C[a,b]} || L^{-1}[y] ||_{C[a,b]} / || y ||_{C[a,b]} < \infty$

Тогда имеют место неравенства (22) и (25), где

$Wi \le || L^{-1} ||_{C[a,b] \to C[a,b]}$, $W \le || L^{-1} ||_{C[a,b] \to C[a,b]}$

Доказательство. Согласно определения многочленов Чебышева, имеет место тождество

$|| cheb(i,z(x)) ||_{C[a,b]} =|| cheb(i,x) ||_{C[-1,1]} = 1$

Согласно определения нормы оператора, имеет место неравенство

$|| L^{-1} [cheb(i,z(x))] ||_{C[a,b]} \le || L^{-1} ||_{C[a,b] \to C[a,b]} || cheb(i,z(x)) ||$

Из полученных тождества и неравенства, очевидно, непосредственно следуют доказываемые неравенства.

6. Оптимальность метода 1.

Теорема 4. *Пусть:*

– линейное интегральное уравнение (1) имеет оператор $L : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$;

– оператор L *имеет линейный обратный оператор* L^{-1};

– аппроксимация (15) уравнения (1) имеет единственное решение:

– коэффициенты аппроксимирующего многочлена y_n *(4);*

– коэффициенты дополнительного многочлена $E(m,n,z(x))$ *(14).*

– матрица

$\{ Q_n \} = \{ a_{i,j}(L^{-1}) , i , j = n+1 , . . . , deg(F[main\_pol(n)]) \}$, (28)

где

$a_{i,j}(L^{-1}) := (L^{-1}[cheb(i,z(x))] , cheb(j,z(x)))_{L2(a,b;\rho)}$;

имеет обратную $\{ Q_n\}^{-1}$.

Тогда имеет место неравенство

$|| y - y_n ||_{C[a,b]} / E[n , y , C_{[a,b]}] \le U_n \cdot V_n \cdot max_{i=n+1, . . . ,m} W_i$, (29)

где коэффициенты правой части имеют следующие значения:

– коэффициенты W_i *– определены тождеством (23),*

$V_n := max\_(|C_1|+\cdot\cdot\cdot+|C_{m-n}|=1 , || \{ Q_n \}^{-1} \{ C_1 , . . . , C_{m-n} \}^T ||_{l2}$; (30)

– норма матрицы $\{Q_n\}^{-1} : l \to l_2$ *– обратной матрице* $\{Q_n\}$ *(28) ,*

$U_n := E[n, y, L_2(a,b;\rho)] / E[n,y,C_{[a,b]}]$; (31)

Доказательство. Неравенство (29) непосредственно следует из теоремы 3 и лемм 1 и 2.

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и имеют конечные пределы последовательности:*

– значений коэффициента W_i *(23) – предел (24);*

– значений коэффициента V_n *(30) – значений нормы матриц обратных матрицам (28)*

$lim_{n \to \infty} max\_(|C_1|+. . .+|C_{m-n}|=1 , ||\{ Q_n \}^{-1} \{ C_1 , . . . , C_{m-n}\}^T ||_{l2} := V < \infty$ (32)

– значений коэффициента U_n *(31)*

$lim_{n \to \infty} E[n, y, L_2(a,b;\rho)] / E[n,y,C_{[a,b]}] = U < \infty$; (33)

Тогда последовательность значений коэффициента оптимальности (5) решения ЛИУМК (1) по методу 1 имеет конечный предел и имеет место неравенство

$lim_{n \to \infty} C_n = lim_{n \to \infty} || y - y_n ||_{C[a,b]} / E[n , y , C_{[a,b]}] = C, C \le U V W < \infty$; (34)

Доказательство. Неравенство (34) непосредственно следует из неравенств (29), (24), (32), (33).

Следствие 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и решение СЛАУ (15) имеет один отличный от нуля коэффициент невязки* $\tau_i = \tau_i(n)$.

Тогда для оценки коэффициента оптимальности (5) решения ЛИУМК по методу 1 имеет место тождество

$|| y - y_n ||_{C[a,b]} / |(y, cheb(n+i,z(x)))_{L2(a,b;\rho)}| = W_{n+i} V_n$, (35)

где

$V_n := |1/ L^{-1}[cheb(n+i,z(x))] , cheb(n+i,z(x)))_{L2(a,b;\rho)}|$; (36)

Доказательство. Тождество (35) непосредственно следует из тождеств (26) и (36).

Лемма 1. *Пусть:*

– *линейное интегральное уравнение (1) имеет оператор* $L : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$;

– *оператор L имеет линейный обратный оператор* L^{-1};

– *аппроксимация (15) уравнения (1) имеет единственное решение:*

– *коэффициенты аппроксимирующего многочлена y_n (4);*

– *коэффициенты дополнительного многочлена $E(m,n,z(x))$ (14).*

– *матрица* $\{ Q_n \}$ (28) *имеет обратную* $\{ Q_n\}^{-1}$.

Тогда имеет место тождество

$\{ \tau_1(n), . . . , \tau_{m-n}(n) \}^T = \{Q_n\}^{-1}\{ a_{n+1}(y), . . . , a_m(y) \}^T$ (37)

и справедливо неравенство }

$(| \tau_1(n)| + . . . + | \tau_{m-n}(n)|)^2 \le V_n^2 (a_{n+1}^2(y) + . . . + a_m^2(y))$ (38)

Доказательство. Тождество (21) эквивалентно системе тождеств

$(y(x) - y_n(x) , cheb(i,z(x)))_H = (L^{-1} [E(m,n,z(x))] , cheb(i,z(x)))_H$,

где $i = 0 , 1 , . . . ; H= L_2(a,b;\rho)$;

Часть этой системы – уравнения с номером $i = n + 1 , . . . , m$, где $m := deg(F[main\_pol(n)])$; очевидно, имеет вид

$\{ a_{n+1}(y) , . . . , a_m(y) \}^T = \{ Q_n \} \{ \tau_1(n) , . . . , \tau_{m-n}(n) \}^T$

По условиям леммы, матрица $ \{ Q_n \}$ имеет обратную. Поэтому тождество (37) является решением рассмотренной части этой системы.

Неравенство (38) является непосредственным следствием тождества (37).

Следствие 6. *Пусть выполнены условия леммы 1 и имеет место асимптотическое тождество (32).*

Тогда справедливо неравенство}

$lim_{n \to \infty}(|\tau_1(n)| +. . .+ |\tau_{m-n}(n)|)^2 / (a_{n+1}^2(y) + . . . + a_m^2(y)) \le V^2 < \infty$; (39)

Доказательство. Неравенство (39) непосредственно следует из тождеств (37) и (32).

Следствие 7. *Пусть выполнены условия леммы 1 и решение СЛАУ (15) имеет один отличный от нуля коэффициент невязки* $\tau_i = \tau_i(n)$.

Тогда справедливо тождество

$| \tau_i(n) | = V_n |(y, cheb(n+i,z(x)))_{L2(a,b;\rho)} |$, (40)

где коэффициент V_n *определен тождеством (36).*

Доказательство. Тождество (40) непосредственно следует из тождества (37).

Лемма 2. Пусть:

– линейное интегральное уравнение (1) имеет оператор $L : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$*;*

– оператор L имеет линейный обратный оператор L^{-1}*;*

– аппроксимация (15) уравнения (1) имеет единственное решение:

– коэффициенты аппроксимирующего многочлена y_n *(4);*

– коэффициенты дополнительного многочлена E(m,n,z(x)) (14).

– матрица $\{ Q_n \}$ (28) *имеет обратную* $\{ Q_n\}^{-1}$.

Тогда имеет место неравенство

$|| y - y_n ||_{C[a,b]} / E[n , y , L_2(a,b;\rho)] \le V_n \cdot max_{i=n+1,\, . . . ,m} W_i$ (41)

Доказательство. Согласно теореме 3 и лемме 1 имеет место неравенство

$|| y - y_n ||_{C[a,b]}{}^2 / (a_{n+1}{}^2(y) + . . . + a_m{}^2(y)) \le V_n \cdot max_{i=n+1,\, . . . ,m} W_i$ (42)

где

$a_{n+1}{}^2(y) + . . . + a_m{}^2(y) \le a_{n+1}{}^2(y) + . . . + a_m{}^2(y) + . . . := || y - S_n[y] ||_{L2(a,b;\rho)}$

Частная сумма ряда Фурье-Чебышева функции $S_n[y]$ является многочленом наилучшего приближения этой функции в пространстве $L2(a,b;\rho)$ и

$|| y - S_n[y] ||_{L2(a,b;\rho)} = E[n , y , L_2(a,b;\rho)]$

Поэтому неравенство (41) следует из неравенства (42).

Следствие 8. *Пусть выполнены условия леммы 2 и имеют место тождества (24) и (32).*

Тогда справедливо неравенство

$lim_{n \to \infty} || y - y_n ||_{C[a,b]} / E[n , y , L_2(a,b;\rho)] \le V \cdot W < \infty$ (43)

Доказательство. Неравенство (43) является непосредственным следствием неравенства (41).

Следствие 9. *Пусть выполнены условия леммы 2 и решение СЛАУ (15) имеет один отличный от нуля коэффициент невязки* $\tau_i = \tau_i(n)$.

Тогда справедливо тождество (35).}

Доказательство. Тождество (35) непосредственно следует из тождеств (26) и (40).

7. Пример 1. Решение интегрального уравнения Фредгольма

$y - 100 \int_0^x (1-x)\, t\, y(t)\, dt - 100 \int_x^1 (1-t)\, x\, y(t)\, dt - 1 = 0$ (44)

В работе [5] (с. 63) построен аналитический приближенный метод решения уравнения (44). Метод основан на аппроксимации уравнения (44) кубическими интерполяционными сплайнами. По методу вычислена [5] сеточная функция с 21 узлом

$\{ y_{20}(i/20) , i = 0, . . . , 20 \}$ *:=spline_method(F[y]=0 (44), [0,1] , q = 20) ;*

Погрешность аппроксимации этой функцией точного решения уравнения (44)

$max_{i=0, . . . , 20}| y(i/20) - y_{20}(i/20) | = 3\ 10^{-5}; y = ch(10 x-5)/ch(5);$ (45)

Погрешность аппроксимации функции y (45) многочленом или сплайном, интерполирующим сеточную функцию y_{20}, очевидно, больше 3 10^{-5}.

Функция y (45) – аналитическая во всей комплексной плоскости и четная относительно точки 1/2. Отличные от нуля коэффициенты Фурье-Чебышева функции y (45) на отрезке $[0,1]$

$\{ (y, cheb(n,2x-1))_{L2(0,1;\rho)} , n = 2 , 4 , . . . , 18 \} := \{$ 0.47, 0.14 ,

0.021 , 2 10^{-3} , 1.2 10^{-4} , 5.4 10^{-6} , 1.7 10^{-7} , 4.3 10^{-9} , 8.5 10^{-11}} (46)

с ростом n регулярно убывают – $(y, cheb(2n,2x-1))_{L2(0,1;\rho)} = o(q^n)$.

Следовательно для величины наилучшего приближения функции y (45) многочленами степени $n = 2\ i$ в пространстве $C_{[0,1]}$ справедливо тождество

$E[2\ i , y , C_{[0,1]}] = (1 + o(1)) \mid (y, cheb(2i,2x-1))_{L2(0,1;\rho)} \mid$ (47)

Поэтому коэффициент оптимальности метода решения ЛИУМК (44) – $P_q[y_q]$ – интерполирования сеточной функции y_q – вычисленной по методу сплайнов [5] с числом узлов q – сравним с коэффициентом оптимальности метода ряда Тейлора – $O(2^q)$. В частности, для $q=20$

$C_{20} := || y - P_{20}[y_{20}] ||_{C[0,1]} / \backslash E[20 , y , C_{[0,1]}] > 3\ 10^{-5} / 18\ 10^{-15} = 10^{10}/6$

Решением ЛИУМК (44) по методу 1 на отрезке [0,1] является многочлен y_n (4) и коэффициенты $\tau_1(n)$, $\tau_2(n)$ невязки

$(y_n , \tau_1(n) , \tau_2(n)) := solve(F[y_n= main\backslash\_pol(n)] + E(m,n,z(x)) = 0);$ (48)

Многочлен y_n (48) четный и имеет место тождество $y_{2\,i+1} = y_{2\,i}$.

Многочлен y_n (48) аппроксимирует точное решение y (45) уравнения (44) в пространстве $C_{[0,1]}$ с погрешностью

$\{ \| ch(10\,x\text{-}5)/ch(5) - y_n \|_{C[0,1]}\ ,\ n = 0\ ,\ 2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ 16 \} := \{ 0.86\ ,\ 0.22\ ,$

$0.028\ ,\ 2.4\ 10^{-3}\ ,\ 1.4\ 10^{-4}\ ,\ 5.8\ 10^{-6}\ ,\ 1.8\ 10^{-7}\ ,\ 4.5\ 10^{-9}\ ,\ 8.8\ 10^{-11} \}$; (49)

Согласно тождеств (46), (47), (49) имеет место следующий вывод.

Вывод 1. Коэффициент оптимальности метода 1 на уравнении (44)

$C_{2i} = C_{2\,i+1} \approx \| y - y_{2\,i} \|_{C[0,1]} / \,|\, (y\ ,\ cheb(2\,i+2,2\,x\text{-}1))_{\,L2(0,1;\rho)}\_| = 1 + \alpha_{2\,i}$, (50)

$\{ \alpha_{2\,i}\ ,\ i = 0\ ,\ .\ .\ .\ ,\ 9 \} := \{ 0.8\ ,\ 0.6\ ,\ 0.3\ ,\ 0.2\ ,\ 0.1\ ,\ 0.08\ ,\ 0.06\ ,\ 0.05\ ,\ 0.04\ ,\ 0.03 \}$;

Этот коэффициент меньше коэффициента оптимальности решения уравнения (44) методом интерполяции сеточного решения полученного методом сплайнов [5] более чем в 10^9 раз.

Один из коэффициентов невязки решения (47) уравнения (44) на отрезке [0,1] по методу 1 равен нулю – $\tau_1(2n) = 0\ ,\ \tau_2(2n+1) = 0$.

Отличный от нуля коэффициент невязки с ростом n убывает как $o(q^n)$

$\{ \tau_2(n)\ ,\ n = 0\ ,\ 2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ 16 \} := \{ 0.86\ ,\ 0.22\ ,\ 0.028\ ,$
$2.4\ 10^{-3}\ ,\ 1.4\ 10^{-4}\ ,\ 5.8\ 10^{-6}\ ,\ 1.8\ 10^{-7}\ ,\ 4.5\ 10^{-9}\ ,\ 8.8\ 10^{-11} \}$

Согласно этого тождества и тождества (49), и в соответствии с тождеством (26), имеет место следующий вывод.

Вывод 2. Норма дополнительного многочлена (14) является эффективной оценкой погрешности метода 1 на уравнении (44)

$\| y - y_{2\,i} \|_{C[0,1]} = \| E(m,2i,2x\text{-}1) \|_{C[0,1]} = |\ \tau_2(2i)\ |$

Мы для уравнения (44) отрезка [0,1] , параметра $n = 0, . . . , 18$ вычислили коэффициенты (23), (36):

$W_i := \| L^{-1}[\ cheb(i,2\,x\text{-}1))\ ]\ \|_{C[0,1]} = 1\ ,\ i=0,\ .\ .\ .\ ,\ 18\ ,$

$V_{2i} = 1 + \delta_{2i}\ ,\ \{ \delta_{2i}\ ,\ i=0,\ .\ .\ .\ ,\ 9 \} :=$

$\{ 0.8\ ,\ 0.6\ ,\ 0.3\ ,\ 0.18\ ,\ 0.12\ ,\ 0.08\ ,\ 0.06\ ,\ 0.05\ ,\ 0.04\ ,\ 0.03 \}$;

Согласно этих тождеств и тождества (50), и в соответствии с тождеством (35), имеет место следующий вывод.

Вывод 3. На уравнении (44) значения коэффициента V_n (36) являются эффективной оценкой коэффициента оптимальности (50) метода 1

$C_n = W_{n+2}\ V_n = V_n\ ,\ n = 2\ i$

8. Дополнение.

1. Мы решали а-методом В.К.Дзядыка решения ЛИУМК Вольтерра более широкий класс интегральных уравнений, чем ЛИУМК (1). В частности мы решили уравнения получаемые в результате регуляризации ЛИУМК (1) с особой точкой ноль (2). Эти уравнения удовлетворяют условиям теорем 1 – 4. Следовательно, теоремы 1 – 4 имеют место для класса линейных интегральных уравнений более широкого чем ЛИУМК (1).

2. Модифицированный а-метод В.К.Дзядыка [2] решения ЛИУМК Вольтера имеет дополнительный многочлен – невязку с двумя параметрами

$$E(q, p, x) := \tau_1 \cdot f_{p+1}(x) + \cdots + \tau_{q-p} \cdot f_q(x);$$

Базис этой невязки – $f_0(x), f_1(x), \ldots f_m(x), \ldots$ – в общем случае, отличен от переноса (14) многочленов Чебышева (13) на отрезок аппроксимации $[a,b]$.

Сходимость модифицированного а-метода В. К. Дзядыка не доказана.

Пусть модифицированный а-метод В. К. Дзядыка имеет:

– базис – ортогональный базис пространства Гильберта H функций аналитических в окрестности точки ноль и $deg(f_i(x)) = i$, $i = 0,1, \ldots$,

– параметры невязки $q := deg(F[main\_pol(n)])$; $p := n$;

Тогда для этого метода, очевидно, имеют место аналоги теорем 1, 2, 3 и 4.

В этих теоремах пространство $L_2(a,b;\rho)$ заменяется на пространство H.

3. Специальные математические функции часто аппроксимируют в области комплексной плоскости:

– $B(0,r)$ – замкнутый круг с центром в точке ноль радиуса r ,

– эллипс с фокусами в концах отрезка $[a,b]$ и других. Оценка погрешности метода 1 в такой области непосредственно следует из тождества (21) и оценок поведения $L^{-1}[\,cheb(i,z(x))]$ – результата преобразования оператором L^{-1} многочленов базиса невязки – в этой области.

Для оценки погрешности модифицированного а-методом В. К. Дзядыка, с базисом удовлетворяющим приведенным выше требованиям, в метрическом пространстве E , очевидно, имеют место аналоги теорем 3 и 4. В этих теоремах пространство $L_2(a,b;\rho)$ заменяется на пространство H и пространство $C_{[a,b]}$ заменяется на пространство E.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1957 – 584 с.
2. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1988 – 387 с.
3. Денисенко П.Н., Летичевский А.А. Алгебраическое программирование. Кировоград: КННПК, 2002 – 120 с.
4. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука , 1969 – 456 с.
5. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972 – 316 с.

Кіровоградський національний технічний університет

Надійшло 23 березня 2006 р.