

УДК 517.9

## ОДНОРІДНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З СТАБІЛЬНОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

**В.М. Бобочко , І.О. Зеленська**

Побудована рівномірна асимптотика розв'язку системи сингулярно-збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту. Розглядається випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи.

A uniform asymptotic of solution is constructed for a system of singularly perturbed differential equations with a turning point. The paper investigates the case when the spectrum of face operator consists of multiple and zero elements.

Вступ. Розглянемо сингулярно збурене диференціальне рівняння (СЗДР) вигляду

$$\varepsilon^2 y''''(x, \varepsilon) + x \tilde{a}(x) y'(x, \varepsilon) + b(x) y(x, \varepsilon) = 0, \quad (1)$$

де  $\varepsilon > 0$  – малий параметр,  $a(x) \equiv x \tilde{a}(x)$ ,  $b(x)$  – необмежено диференційовні функції на відрізку  $[0; 1]$ , тобто рівняння з диференціальною точкою звороту.

Рівняння (1) будемо досліджувати за умови, що

$$\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0. \quad (2)$$

Умови (2) забезпечать стабільність точки звороту та існування досить гладкого загального розв'язку виродженого рівняння

$$x \tilde{a}(x) \omega'(x) + b(x) \omega(x) = 0. \quad (3)$$

Сингулярно збурене диференціальне рівняння Ліувілля з алгебраїчною точкою звороту вивчене досить детально (див. [1-9]). Розроблено декілька методів побудови рівномірної асимптотики розв'язку цього рівняння на всьому відрізку  $[0; 1]$ .

Рівномірна асимптотика розв'язку СЗДР з диференціальною точкою звороту в основному побудована тільки для рівняння третього порядку (див. [8-10]).

У [8-10] досліджено СЗДР (1) за виконання різних умов на коефіцієнти  $a(x), b(x)$ , причому випадок, коли справедливі умови (2), розглянуто у [8]. В залежності від цих умов точка звороту була стабільною [8-9], або нестабільною [10]. В [8-10], метод розроблений для рівняння Ліувілля [9], узагальнено на побудову рівномірної асимптотики розв'язку СЗДР (1).

Питання про побудову рівномірної асимптотики розв'язку системи двох рівнянь, що відповідає рівнянню Ліувілля, досліджувалось В. Вазовим. Проте, як сказано самим Вазовим ([2], стор. 67), тільки для рівняння другого порядку розроблена деяка теорія, але і вона далеко не повна, нерозв'язаних питань залишилось значно більше, ніж розв'язаних. Дослідження систем СЗДУ з диференціальною точкою звороту авторам невідомі.

Виходячи із сказаного є сенс узагальнити результати, отримані в [8-10] для СЗДР (1) на випадок системи СЗДР.

1. Система диференціальних рівнянь з стабільною диференціальною точкою звороту

Запишемо рівняння (1) у вигляді системи. Для цього введемо нові змінні

$$y = y_1, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon y_1'' = \varepsilon y_2' = y_3,$$

$$\varepsilon^2 y''' = \varepsilon(\varepsilon y''') = \varepsilon(\varepsilon y_1''') = \varepsilon(y_2'') = \varepsilon(y_3').$$

Отже, диференціальне рівняння (1) зводиться до наступної системи СЗДР:

$$\begin{cases} \varepsilon y_1'(x, \varepsilon) - \varepsilon y_2(x, \varepsilon) = 0 \\ \varepsilon y_2'(x, \varepsilon) - y_3(x, \varepsilon) = 0 \\ \varepsilon y_3'(x, \varepsilon) + x\tilde{a}(x)y_2(x, \varepsilon) + b(x)y_1(x, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Запишемо цю систему у векторному вигляді. Маємо систему

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)Y(x, \varepsilon) = 0. \quad (1.1)$$

Тут

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

– відома матриця, тобто

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} y_1(x, \varepsilon) \\ y_2(x, \varepsilon) \\ y_3(x, \varepsilon) \end{pmatrix} -$$

шукана вектор-функція.

В цій роботі буде побудована рівномірна асимптотика розв'язку (РАР) системи (1.1) на відрізку  $[0;1]$  за умови наявності в цій системі точки звороту  $x=0$ .

Характеристичне рівняння системи (1.1) має вигляд:

$$|A(x, 0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -b(x) & -x\tilde{a}(x) & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - x\tilde{a}(x)\lambda = 0. \quad (1.3)$$

Коренями цього рівняння є

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{x\tilde{a}(x)}. \quad (1.4)$$

З умови (1.2) бачимо, що у випадку, коли точка  $x=0$  є точкою звороту для системи (1.1), то виконується наступні умови:  $tr A(x, 0) \equiv 0$ ,  $\det A(0, 0) = 0$ .

2. Регуляризація системи сингулярно збурених рівнянь

Для побудови РАР системи (1.1) застосуємо методику, розроблену для рівняння Ліувілля і систем СЗДР з алгебраїчною точкою звороту (див. [7-

12]). З метою виділення всіх істотно особливих функцій (ІОФ), що виникають в розв'язку системи (1.1) за рахунок особливої точки  $\varepsilon = 0$ , введемо регуляризуючу змінну  $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$ , де показник  $p$  і регуляризуюча функція  $\varphi(x)$  підлягають визначенню.

Для визначення “розширеної” функції одержимо “розширене” векторне рівняння

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(x, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p} \varphi'(x) \frac{\partial \tilde{y}(x, t, \varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}(x, t, \varepsilon)}{\partial x} - A(x, \varepsilon) \tilde{y}(x, t, \varepsilon) = 0. \quad (2.1)$$

Асимптотику розв'язку розширеного рівняння (2.1) будемо у вигляді

$$\tilde{y}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^2 D_k(x, t, \varepsilon) + \omega(x, t, \varepsilon). \quad (2.2)$$

Тут

$$D_k(x, t, \varepsilon) = \alpha_k(x, \varepsilon) U_k(t) + \varepsilon^\nu \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon^{s_1} \alpha_{k1}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{s_2} \alpha_{k2}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{s_3} \alpha_{k3}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} U_k(t) + \varepsilon^\gamma \begin{pmatrix} \varepsilon^{k_1} \beta_{k1}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{k_2} \beta_{k2}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{k_3} \beta_{k3}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} U_k'(t), \quad (2.3)$$

$$\omega(x, \varepsilon) \equiv \text{colon}(\omega_1(x, \varepsilon), \omega_2(x, \varepsilon), \omega_3(x, \varepsilon)), \quad (2.4)$$

де  $\theta(x, \varepsilon) \equiv \{\alpha_{ks}(x, \varepsilon), \beta_{ks}(x, \varepsilon), \omega_s(x, \varepsilon)\}$ ,  $s = \overline{1,3}$  – аналітичні вектор-функції відносно малого параметра  $\varepsilon > 0$  і нескінченно диференційовні за змінною  $x \in [0;1]$ , які необхідно визначити,  $U_k(t)$ ,  $k = 1,2$  – функції Ейрі-Дородніцина (див.[4]).

Спочатку вивчимо дію розширеного оператора  $\tilde{L}_\varepsilon$  на вектор-функцію  $D_k(x, t, \varepsilon)$  і підставимо результат цієї дії в однорідне розширене рівняння (2.1). Отримаємо рівність

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon (\alpha_k(x, \varepsilon) U_k(t) + \varepsilon^\gamma \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t)) &= \varepsilon^{1-p} \alpha_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) U_k'(t) - \\ &- \varepsilon^{1+\gamma-2p} \beta_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) \varphi(x) U_k(t) - A(x, \varepsilon) \alpha_k(x, \varepsilon) U_k(t) - \\ &- \varepsilon^\gamma A(x, \varepsilon) \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t) + \varepsilon \alpha_k'(x) U_k(t) + \varepsilon^{1+\gamma} \beta_k'(x) U_k'(t) = 0. \end{aligned}$$

Зрівняємо коефіцієнти біля ІОФ  $U_k(t)$ ,  $k = 1,2$  та їх похідних. Маємо наступні векторні рівняння ( $k = 1,2$ ):

$$U_k'(t): \varepsilon^{1-p} \alpha_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) - \varepsilon^\gamma [A_0(x) + \varepsilon A_1] \beta_k(x, \varepsilon) = -\varepsilon^{1+\gamma} \beta_k'(x, \varepsilon), \quad (2.5)$$

$$U_k(t): -\varepsilon^{1+\gamma-2p} \beta_k(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) - [A_0(x) + \varepsilon A_1] \alpha_k(x, \varepsilon) = -\varepsilon \alpha_k'(x, \varepsilon). \quad (2.6)$$

Запишемо однорідні векторні рівняння (2.5) і (2.6), поки що з врахуванням тільки основної матриці  $A_0(x)$ , у вигляді алгебраїчних систем рівнянь ( $k = 1;2$ ). Маємо

$$\begin{cases} \varepsilon^{1-p+s_1} \alpha_{k_1}(x, \varepsilon) \varphi'(x) = 0 \\ \varepsilon^{1-p+s_2} \alpha_{k_2}(x, \varepsilon) \varphi'(x) - \varepsilon^{\gamma+k_3} \beta_{k_3}(x, \varepsilon) = 0 \\ \varepsilon^{1-p+s_3} \varphi'(x) \alpha_{k_3}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{\gamma+k_1} b(x) \beta_{k_1}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{\gamma+k_2} a(x) \beta_{k_2}(x, \varepsilon) = 0 \\ -\varepsilon^{1+\gamma-2p+k_1} \beta_{k_1}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) = 0 \\ -\varepsilon^{1+\gamma-2p+k_2} \beta_{k_2}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) - \varepsilon^{s_3} \alpha_{k_3}(x, \varepsilon) = 0 \\ -\varepsilon^{1+\gamma-2p+k_3} \beta_{k_3}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) + \varepsilon^{s_1} b(x) \alpha_{k_1}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{s_2} a(x) \alpha_{k_2}(x, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Нагадаємо, що ми хочемо, щоб  $\alpha_{k_s}(x, \varepsilon)$ ,  $\beta_{k_s}(x, \varepsilon)$ ,  $s = \overline{1,3}$  – були аналітичними вектор-функціями відносно малого параметра  $\varepsilon > 0$ . Тому будемо вимагати, щоб в одержаній алгебраїчній системі рівнянь (2.7) рівняння були регулярно збуреними відносно малого параметра  $\varepsilon > 0$ . Для цього показники степенів малого параметра в кожному рівнянні повинні бути однакові, тобто повинно пройти скорочення малого параметру з цими степенями. Одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 - p + s_1 = 0 \\ 1 - p + s_2 = \gamma + k_3 \\ 1 - p + s_3 = \gamma + k_1 = \gamma + k_2 \\ 1 + \gamma - 2p + k_1 = 0 \\ 1 + \gamma - 2p + k_2 = s_3 \\ 1 + \gamma - 2p + k_3 = s_1 = s_2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Дослідимо дану систему рівнянь. Після певних перетворень отримаємо

$$p = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}, \quad k_1 = k_2 = s_3 = 0, \quad s_1 = s_2 = k_3 = \frac{-1}{3}. \quad (2.9)$$

З врахуванням (2.9) векторні рівняння (2.5) і (2.6) запишемо у вигляді  $\left( \mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}} \right)$

$$U_k(t): \alpha_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) - A_0(x) \beta_k(x, \varepsilon) = -\mu^3 \beta_k'(x, \varepsilon) + \mu^3 A_1 \beta_k(x, \varepsilon), \quad (2.10)$$

$$U_k(t): \beta_k(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) + A_0(x) \alpha_k(x, \varepsilon) = \mu^3 \alpha_k'(x, \varepsilon) - \mu^3 A_1 \alpha_k(x, \varepsilon). \quad (2.11)$$

При показниках (2.9) векторні рівняння (2.10), (2.11) можна записати у вигляді наступної системи алгебраїчних рівнянь ( $k = \overline{1,2}$ )

$$\begin{cases} \alpha_{k_1}(x, \varepsilon) \varphi'(x) = \mu^3 [\beta_{k_2}(x, \varepsilon) - \beta_{k_1}'(x, \varepsilon)] \\ \alpha_{k_2}(x, \varepsilon) \varphi'(x) - \beta_{k_3}(x, \varepsilon) = -\mu^3 \beta_{k_2}'(x, \varepsilon) \\ \varphi'(x) \alpha_{k_3}(x, \varepsilon) + b(x) \beta_{k_1}(x, \varepsilon) + a(x) \beta_{k_2}(x, \varepsilon) = -\mu^3 \beta_{k_3}'(x, \varepsilon) \\ -\beta_{k_1}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) = -\mu^3 [\alpha_{k_1}'(x, \varepsilon) - \alpha_{k_2}(x, \varepsilon)] \\ -\beta_{k_2}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) - \alpha_{k_3}(x, \varepsilon) = -\mu^3 \alpha_{k_2}'(x, \varepsilon) \\ -\beta_{k_3}(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) + b(x) \alpha_{k_1}(x, \varepsilon) + a(x) \alpha_{k_2}(x, \varepsilon) = -\mu^3 \alpha_{k_3}'(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (2.12)$$

тобто вона буде вже регулярно збуреною системою.

3. Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи  
Розв'язок системи (2.12) шукаємо у вигляді вектор-функцій ( $k = 1, 2$ )

$$D_k(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r [\alpha_{kr}(x)U_k(t) + \beta_{kr}(x)U_k'(t)] \quad (3.1)$$

Для визначення компонент вектор-функцій  $\alpha_{kr}(x) = colon(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x))$  та  $\beta_{kr}(x) = colon(\beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x))$  отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\Phi(x)Z_{k0}(x) = 0, \quad \Phi(x)Z_{kr}(x) = F Z_{k(r-3)}(x), \quad r \geq 1. \quad (3.2)$$

Тут  $Z_{kr}(x) = colon(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x), \beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x))$ , а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & -\varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$F Z_{k(r-3)}(x) = colon \begin{pmatrix} [\beta_{k2(r-3)}(x) - \beta_{k1(r-3)}'(x)], & -\beta_{k2(r-3)}'(x), & -\beta_{k3(r-3)}'(x), \\ [\alpha_{k1(r-3)}'(x) - \alpha_{k2(r-3)}(x)], & \alpha_{k2(r-3)}'(x), & \alpha_{k3(r-3)}'(x) \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник цієї системи. Маємо

$$\det \Phi(x) = (-a^2(x) + 2a(x)\varphi(x)\varphi'^2(x) - \varphi^2(x)\varphi'^4(x)) \cdot \varphi(x)\varphi'^2(x).$$

На даний момент регуляризуюча функція  $\varphi(x)$  ще не визначена. Тому визначимо її як розв'язок задачі

$$\varphi^2(x)\varphi'^4(x) - 2a(x)\varphi(x)\varphi'^2(x) + a^2(x) = 0, \quad \varphi(0) = 0,$$

яку можемо записати у простішому вигляді, тобто

$$[\varphi'(x)]^2 \varphi(x) = a(x) \equiv x\tilde{a}(x), \quad \varphi(0) = 0. \quad (3.4)$$

Розв'язком задачі (3.4) буде функція  $\varphi(x) = \left( \frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{a(x)} dx \right)^{\frac{2}{3}}$ .

При такому виборі регуляризуючої функції  $\varphi(x)$  визначник матриці (3.3) дорівнює нулю, тобто  $\det \Phi(x) \equiv 0$ . Існує нетривіальний розв'язок однорідної системи  $\Phi(x)Z_{kr}(x) = 0, r = 0; 2$  вигляду

$$Z_{kr}(x) = colon \left( 0, \frac{1}{\varphi'(x)} \beta_{k3r}(x), -\frac{a(x)}{\varphi'(x)} \beta_{k2r}(x), 0, \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x) \right), \quad (3.5)$$

де  $\beta_{ksr}(x), k = 1; 2, s = 2; 3$  – до певного часу довільні, досить гладкі функції при  $x \in [0; 1]$ .

Займемось розв'язуванням неоднорідних систем (3.2). Спочатку розглянемо ці системи коли  $r = 3$ . Врахувавши одержаний розв'язок (3.5), будемо мати

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k13}(x) = \beta_{k20}(x) - \beta_{k10}'(x) \equiv \beta_{k20}'(x) \\ \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) - \beta_{k33}(x) = -\beta_{k20}'(x) \\ a(x)\alpha_{k23}(x) + b(x)\alpha_{k13}(x) - \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) = -\alpha_{k30}'(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

та

$$\begin{cases} -\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k13}(x) = \alpha_{k10}'(x) - \alpha_{k20}(x) \equiv -\alpha_{k20}(x) \equiv -[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x) \\ -\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) - \alpha_{k33}(x) = \alpha_{k20}'(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)) \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) + b(x)\beta_{k13}(x) + a(x)\beta_{k23}(x) = -\beta_{k30}'(x). \end{cases} \quad (3.7)$$

З перших рівнянь систем (3.6) і (3.7) визначимо функції  $\alpha_{k13}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k20}(x)$  та  $\beta_{k13}(x) = -[\varphi'(x)]^{-2}[\varphi(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)$ . Тоді системи (3.6) і (3.7) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) - \beta_{k33}(x) = -\beta_{k20}'(x) \\ a(x)\alpha_{k23}(x) - \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) = -\alpha_{k30}'(x) - b(x)\alpha_{k13}(x) \end{cases} \quad (3.8)$$

та

$$\begin{cases} -\alpha_{k33}(x) - \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) = \alpha_{k20}'(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)) \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) + a(x)\beta_{k23}(x) = -\beta_{k30}'(x) - b(x)\beta_{k13}(x). \end{cases} \quad (3.9)$$

Регуляризує функція  $\varphi(x)$  визначена як розв'язок задачі (3.4). Тому визначники цих систем однакові і тотожно рівні нулеві, тобто  $\Delta(x) = [\varphi'(x)]^2\varphi(x) + a(x) \equiv 0$ . Отже, в загальному випадку не існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (3.8) і (3.9). Тому необхідно дослідити більш детально праві частини цих систем. Згідно теореми Кронеккера-Капеллі для того, щоб існував нетривіальний розв'язок систем (3.8) і (3.9) необхідно і досить, щоб ранги розширених матриць співпадали з відповідними рангами матриць цих систем. Для виконання цих умов скористаємось довільністю функцій  $\beta_{ik0}(x)$ , які містяться у правих частинах систем (3.8) і (3.9) наступним чином.

Оскільки маємо системи двох рівнянь, то умови теореми Кронеккера-Капеллі еквівалентні виконанню умов

$$\frac{\varphi'(x)}{a(x)} \equiv \frac{-1}{-\varphi(x)\varphi'(x)} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{k30}(x)\right)}{\beta_{k30}'(x)}, \quad k=1, 2 \quad (3.10)$$

і

$$\frac{\varphi'(x)}{-1} \equiv \frac{a(x)}{-\varphi(x)\varphi'(x)} = \frac{\frac{d}{dx} \left( -\frac{a(x)}{\varphi'(x)} \beta_{k20}(x) \right)}{\beta_{k20}'(x)}, \quad k=1, 2. \quad (3.11)$$

З (3.10) при фіксованому  $k=1, 2$  одержимо диференціальне рівняння

$$(1 - \varphi(x))\beta_{k30}'(x) + \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \beta_{k30} = 0. \quad (3.12)$$

З (3.11) при фіксованому  $k=1, 2$  одержимо диференціальне рівняння

$$(\varphi(x) - 1)\beta_{k20}'(x) + \frac{\varphi'^2(x) + \varphi''(x)}{\varphi'(x)} \beta_{k20} = 0. \quad (3.13)$$

Оскільки  $\varphi(x) - 1 \neq 0$  для всіх  $x \in [0; 1]$ , то існують досить гладкі розв'язки однорідних диференціальних рівнянь (3.12) і (3.13), які запишемо у вигляді  $\beta_{ks0}(x) = \beta_{k30}^0 \cdot \beta_{k30}(x)$ ,  $k=1, 2$ ,  $s=2; 3$ , де  $\beta_{ks0}^0(x)$  – довільні сталі,  $\tilde{\beta}_{ks0}(x)$  – частинні, досить гладкі для всіх  $x \in [0; 1]$ , розв'язки однорідних рівнянь (3.12) і (3.13).

При такому визначенні вектор-функцій  $Z_{k0}(x)$  існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (3.8) і (3.9) вигляду

$$Z_{k1}(x) = \text{colon} \left( \begin{array}{l} [\varphi'(x)]^{-1} \beta_{k20}(x), \frac{\beta_{k31}(x) + \alpha_{k20}'(x)}{\varphi'(x)}, \frac{\alpha_{k30}'(x) - a(x)\beta_{k21}(x)}{\varphi'(x)}, \\ [\varphi(x)]^{-1} [\varphi'(x)]^{-2} \beta_{k20}(x), \beta_{k21}(x), \beta_{k31}(x) \end{array} \right),$$

де  $\beta_{k21}(x)$  та  $\beta_{k31}(x)$ , як і в (3.5), до певного часу довільні, достатньо гладкі функції для всіх  $x \in [0; 1]$ .

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (3.6) і (3.7) при  $r > 1$ , методом математичної індукції можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому смислі. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (3.6) і (3.7) при  $r = \overline{0; q}$ , то кожна з цих систем при  $r = \overline{0; q-1}$  і фіксованому  $k=1; 2$  визначається з точністю до двох довільних скалярних множників  $\beta_{k2r}^0(x)$  і  $\beta_{k3r}^0(x)$ , які утворюють довільний вектор  $\beta_{kr}^0 = \text{colon}(\beta_{k1r}^0, \beta_{k2r}^0, \beta_{k3r}^0)$ .

Висновок. Таким чином, розв'язуючи поступово системи рівнянь (3.6) і (3.7), отримуємо два формальні розв'язки розширеного векторного рівняння (2.10) вигляду

$$D_k(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[ \alpha_{kr}(x) U_k(t) + \varepsilon^{1/3} \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t) \right], \quad k=1; 2, \quad (3.14)$$

де  $\alpha_{kr}(x) = \text{colon}(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x))$  та

$\beta_{kr}(x) = \text{colon}(\beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x))$  відомі вектор-функції.

Проведемо звуження в отриманих формальних розв'язках (3.14) при  $t = \varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x)$ . Тоді отримаємо два формальні розв'язки досліджуваного векторного рівняння (1.1) вигляду

$$D_k \left( x, \varepsilon^{-2/3} \varphi(x), \varepsilon \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[ \alpha_{kr}(x) U_k \left( \varepsilon^{-2/3} \varphi(x) \right) + \varepsilon^{1/3} \beta_k(x, \varepsilon) U_k'(t) \Big|_{t=\varepsilon^{-2/3} \varphi(x)} \right],$$

$$k = 1, 2 \quad (3.15)$$

Третій формальний розв'язок векторного рівняння (1.1) будемо у вигляді (2.4), тобто у вигляді

$$\omega(x, \varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \equiv \text{colon} \left( \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x) \right). \quad (3.16)$$

Підставивши (3.16) у рівняння (1.1), отримаємо наступну рекурентну систему векторних рівнянь:

$$A_0(x) \omega_0(x) = 0, \quad A_r(x) \omega_r(x) = -A_1(x) \omega_{(r-1)}(x) - \omega_{(r-1)}'(x), \quad r \geq 1. \quad (3.17)$$

Дослідимо розв'язок однорідного векторного рівняння  $A_0(x) \omega_0(x) = 0$ . Маємо  $\omega_{03}(x) \equiv 0$  і систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \omega_{01}'(x) - \omega_{02}(x) = 0 \\ x \tilde{a}(x) \omega_{02}(x) + b(x) \omega_{01}(x) = 0. \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне скалярне диференціальне рівняння:

$$x \tilde{a}(x) \omega_{01}'(x) + b(x) \omega_{01}(x) = 0. \quad (3.18)$$

Розв'язок однорідного рівняння (3.18) має вигляд

$$\omega_{01}(x) = \omega_{01}^0 \cdot \exp \left\{ - \int \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} dx \right\}, \quad (3.19)$$

де  $\omega_{01}^0$  – довільна стала.

До цього часу ми не використовували умову на коефіцієнт  $b(x)$ . З врахуванням того, що  $b(x) < 0$  (див. умови (2)) маємо  $\frac{-b(0)}{\tilde{a}(0)} = K > 0$ . Тому розв'язок (3.19) є досить гладкою функцією на всьому відрізку  $[0; 1]$ , включаючи і точку  $x = 0$ .

Скориставшись розв'язком (3.19), отримаємо розв'язок  $\omega_{02}(x) = \omega_{01}'(x) = -\omega_{01}^0 \cdot \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} \exp \left\{ - \int \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} dx \right\}$ .

Таким чином, нами побудоване нульове наближення

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &= \text{colon}(\omega_{01}(x), \omega_{02}(x), \omega_{03}(x),) \equiv \\ &\equiv \text{colon} \left( \omega_{01}^0 \cdot \exp \left\{ - \int \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} dx \right\}, \omega_{01}^0 \cdot \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} \exp \left\{ - \int \frac{b(x)}{x \tilde{a}(x)} dx \right\}, 0 \right), \end{aligned}$$

яке містить одну довільну сталу  $\omega_{01}^0$ .



На наступному кроці отримаємо неоднорідну систему рівнянь, при розв'язуванні якої знову отримаємо розв'язок, який буде містити одну довільну сталу  $\omega_{11}^0$ . Продовжуючи далі розв'язувати системи рівнянь (3.17), поступово визначимо всі розв'язки  $\omega_r(x)$ , тобто отримаємо третій розв'язок системи (1.1) у вигляді формального ряду (3.16).

Теорема. Нехай: 1)  $a(x) \equiv x\tilde{a}(x)$ ,  $b(x) \in C^\infty[0;1]$ ; 2) виконуються умови (2). Тоді;

а) розширене однорідне векторне рівняння (2.1) має три формальні розв'язки, зображені у вигляді формальних рядів (3.1),  $k=1;2$  та (3.16);

б) звуження формальних рядів (3.1),  $k=1;2$  при  $t = \varepsilon^{-2/3}\varphi(x)$  та ряд (3.16) утворюють три лінійно незалежні розв'язки однорідної системи диференціальних рівнянь (1.1).

### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464~с.
2. Wasow W. Linear turning point theory. – Springer-Verlag New York Ins., 1985. – 243 p.
3. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М., 1981.
4. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. – 1952. –Т. 27, вып. 6(52). – С. 3–96.
5. Langer R.E. The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 90 – P.~113-142.
6. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. V. 226. – P. 227-241.
7. Бобочко В.М., Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. – Київ: Наукова думка. 2002. – 310 с.
8. Бобочко В.Н. Дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. I // Изв. Вузов. Математика. – 2002. – №3. С. 3-14.
9. Бобочко В.Н. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота. II // Изв. Вузов. Математика. – 2002.– № 5. С. 3–13.
10. Бобочко В.Н. Нестабильная дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. I // Изв. Вузов. Математика. – 2004. – С. .
11. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с сильной точкой поворота // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, №11. – С. 1543-1547.
12. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, №10. – С. 1304-1312.

*Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка*

*Надійшло 25 березня 2006 р.*