УДК 519.53 + 517.987

ТОТАЛЬНО БАЗИСНЫЕ МЕРЫ

В.А. Романов

Введено поняття тотально базисноі міри та розв`язане питання про те, які міри в просторах Фреше е тотально базисними.

It is introduced a notion of totally basic measure and it is solved a problem : Which measures in Frechet spaces are totally basic measures.

1. **Введение.** Известно [1], что в бесконечномерном пространстве Фреше никакая конечная мера не может служить базисом в классическом смысле даже для семейства всех своих сдвигов, то есть не все её сдвиги могут быть заданы как произведения интегрируемых функций на саму меру. Поэтому представляет интерес нахождение такого обобщения понятия базисной меры, которое позволяет выражать все другие меры в данном пространстве через одну и ту же меру.

2. **Постановка задачи.** Пусть X - сепарабельное пространство Фреше, У - банахово пространство. Под У-значной мерой в пространстве X понимаем сигма-аддитивную функцию множества конечной полной вариации, которая определена на всех борелевских подмножествах пространства X и принимает значения в пространстве У.

Напомним, что последовательность векторных мер Ф (к) в пространстве X называется *слабо сходящейся* к векторной мере Ф, если для каждой заданной на X ограниченной непрерывной функции с числовыми значениями последовательность интегралов от неё по пространству X относительно разности мер Ф (к) и Ф сходится к нулю.

Определение 1. Неотрицательная мера M в пространстве X называется *слабым базисом* векторной меры Ф, если существует слабо сходящаяся к Ф последовательность таких векторных мер, которые представимы как произведения интегрируемых по Бохнеру векторных функций на меру M.

Определение 2. Неотрицательная мера M в пространстве X называется *тотально базисной* мерой, если для каждого банахова пространства У и каждой У-значной меры Ф в X мера M есть слабый базис для Ф.

Цель статьи состоит в том, чтобы установить критерий тотальной базисности меры.

3. Результаты работы.

Теорема 1. *Пусть X - сепарабельное пространство Фреше, то есть полное сепарабельное метризуемое локально выпуклое пространство. Для того чтобы неотрицательная мера M в пространстве X была тотально базисной, необходимо и достаточно, чтобы ни на одном непустом открытом множестве она не принимала нулевого значения.*

Доказательство. Предположим, что мера M принимает нулевое значение на некотором непустом открытом множестве. Пусть Ф - дискретная ненулевая векторная мера, сосредоточенная в точке x этого множества, Ф (к) -

произвольная последовательность векторных мер, представимых как произведения интегрируемых по Бохнеру векторных функций на меру M. Рассмотрим ограниченную нерперывную функцию, принимающую значение 1 в точке x и обращающуюся в нуль вне упомянутого открытого множества. Тогда последовательность интегралов от неё относительно разности мер Ф (к) и Ф не сходится к нулю. Отсюда вытекает необходимость.

Остаётся доказать достаточность. Пусть M - фиксированная неотрицательная мера в пространстве X со строго положительными значениями на непустых открытых множествах, а Ф - произвольная векторная мера в X.

Поскольку вариация векторной меры есть неотрицательная мера и поскольку в полном сепарабельном метризуемом пространстве значение неотрицательной меры на произвольном измеримом множестве можно аппроксимировать её значениями на содержащихся в этом множестве компактах, то отсюда вытекает, что в пространстве X найдётся последовательность таких попарно непересекающихся компактов C (a), что для каждого натурального числа к значение вариации меры Ф на дополнении до X объединения первых к компактов этой последовательности меньше числа 1 / к.

Покроем теперь первый компакт C (1) конечным числом таких попарно непересекающихся борелевских множеств A (1, p, к) диаметра меньше 1 / к, внутренности которых пересекаются с компактом C (1).Множества этого покрытия отнесём к первому семейству. Обозначим через

B (1, к) их объединение.

Далее покроем разность компакта C (2) и множества B (1, к) конечным числом таких непересекающихся между собой и с множеством

B (1, к) борелевских множеств A (2, p, к) диаметра меньше 1 / к, внутренности которых пересекаются с компактом C (2).Множества этого покрытия отнесём ко второму семейству. Обозначим через B (2, к) объединение всех множеств первого и второго семейств.

Продолжим этот процесс далее. На a-том по счёту этапе покроем разность компакта C (a) и множества B (a – 1, к) конечным числом таких непересекающихся между собой и с B (a – 1, к) борелевских множеств A (a, p, к) диаметра меньше 1 / к, внутренности которых пересекаются с компактом C (a). Множества этого покрытия отнесём к

a-тому семейству. Обозначим через B (a, к) объединение всех множеств первых a семейств.

Процесс таких построений закончим для числа a = к включительно.

Заметим, что для каждого семейства соответствующие множества

A (a, p, к) имеют непустые внутренности, а потому мера M принимает на них строго положительные значения. Пусть M (a, p, к) - вероятностные меры, получающиеся нормировкой произведений индикаторов указанных множеств на меру М, а У (а, р, к) - значения векторной меры Ф на упомянутых множествах.

Зададим теперь векторную меру Ф (к) как сумму произведений векторных констант У (а, р, к) на соответствующие скалярные меры

М (а, р, к), где в сумме учитываются все семейства до к-того включительно.

Ясно, что каждая из построенных векторных мер Ф (к) представима как произведение интегрируемой по Бохнеру векторной функции на меру М. Ясно также, что вариация векторной меры Ф (к) не превосходит вариации векторной меры Ф.

Теперь зафиксируем произвольную ограниченную непрерывную скалярную функцию Т на пространстве Х и положительное число с.

Без уменьшения общности можно считать, что функция Т по модулю не превышает 1.

Далее зафиксируем такое натуральное число к (0), что значение вариации векторной меры Ф на дополнении до Х объединения первых

К (0) компактов С (а) строго меньше числа с.

Для всех к, не меньших числа к (0), множество В (к (0), к) включает в себя объединение первых к (0) компактов С (а), а потому для таких к значение вариации векторной меры Ф на дополнении до Х множества В (к (0), к) меньше числа с. Тем более это верно для вариаций векторных мер Ф (к), поскольку они мажорируются вариацией векторной меры Ф.

Рассмотрим теперь модуль непрерывности функции Т на объединении первых к (0) компактов С (а). Под значением модуля непрерывности функции на подмножестве пространства Х для данного положительного аргумента понимаем верхнюю грань модуля разности значений функции в точках подмножества и всего Х, где верхняя грань берётся по всем парам таких точек, расстояние между которыми не превышает упомянутого аргумента.

Поскольку объединение конечного числа компактов снова есть компакт, то наш модуль непрерывности имеет нулевой предел, когда его аргумент стремится к нулю, а потому найдётся такое большее числа к (0) число

к (1), что при всех к, больших числа к (1), значение модуля непрерывности для аргумента 1 / к меньше числа с.

В каждом из множеств А (а, р, к), входящих в первые к (0) семейств, выберем по одной точке х (а, р, к), принадлежащей компакту С (а). Поскольку на указанном множестве векторные меры Ф (к) и Ф принимают одинаковое значение, то интеграл по этому множеству от функции Т относительно разности векторных мер Ф (к) и Ф не изменится, если от подынтегральной функции отнять константу, равную значению функции Т в точке х (а, р, к).

Модуль новой подынтегральной функции не превосходит модуля непрерывности функции Т от аргумента, равного диаметру множества

А (а, р, к). Напомним, что этот диаметр меньше числа 1 / к.

Следовательно, при всех к, больших числа к (1), модуль новой подынтегральной функции меньше числа с, а потому норма соответствующего интеграла не превосходит произведения числа с на сумму значений вариаций векторных мер Ф (к) и Ф на множестве

А (а, р, к).

Поскольку множество В (к (0), к) составлено из непересекающихся множеств А (а, р, к), то норма интеграла по множеству В (к (0), к) от функции Т относительно разности векторных мер Ф (к) и Ф не превосходит произведения числа с на сумму значений вариаций векторных мер Ф (к) и Ф на множестве В (к (0), к), а потому не превосходит произведения числа с на удвоенную полную вариацию меры Ф.

Поскольку же значения вариаций векторных мер Ф (к) и Ф на дополнении до Х множества В (к (0), к) меньше числа с, а функция Т по модулю не превосходит 1, то норма интеграла по всему Х от функции Т относительно разности векторных мер Ф (к) и Ф не превосходит произведения числа с на константу 2 (1 + Var Ф).

Поскольку число с можно выбрать сколь угодно малым, то отсюда получаем, что последовательность интегралов по пространству Х от функции Т относительно разности векторных мер Ф (к) и Ф сходится к нулю, чем и завершается доказательство.

Доказанная теорема позволяет строить примеры тотально базисных мер.

Пример 1. Поскольку невырожденная гауссовская мера [2] в сепарабельном банаховом пространстве принимает строго положительные значения на всех непустых открытых множествах, то она тотально базисна.

Пример 2. Если мера М в сепарабельном банаховом пространстве эквивалентна невырожденной гауссовской мере, то и она принимает строго положительные значения на всех непустых открытых множествах, а потому также тотально базисна. Заметим, что мера М плотно непрерывна [3].

Замечание 1. Не каждая плотно непрерывная мера принимает строго положительные значения на всех непустых открытых множествах. Соответствующим примером может служить произведение индикатора единичного шара на невырожденную гауссовскую меру. Поэтому не каждая плотно непрерывная мера тотально базисна.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Гирсанов И.В., Митягин Б.С. Квазиинвариантные меры в топологических линейных пространствах // Научн. Докл. Высшей школы. – 1959. – 2. – С. 5 – 10.
2. Го Х. Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
3. Романов В.О. Неперервні міри. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2004. – 64 с.