УДК 681.3.07

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ Д ЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕКА

С.Т.Кузнецов, Н.В.Столярчук

Широко розповсюджена думка про те, що будь-яка окремо взята проблема може бути вирішена комп'ютерним шляхом перевірки всіх варіантів і вибору кращого з них. Таким чином, вважається, що штучний інтелект знаходить кращий спосіб поведінки. У даній статті ми подаємо три приклади відносно нескладних задач, розв'язання яких зайняло б кілька десятиліть, навіть на комп'ютері у десять разів потужнішому, ніж ті, що існують зараз. Це означає, що повинна бути знайдена альтернатива даному методу.

There is wide-spread thought, that every discrete problem can be solved with a computer by checking all the variants and choosing the best one. So, the artificial intelligence is considered to find the best way of behavior also this way. But in this article we give three examples of not complicated problems, which solving would take several decades, even on a computer, ten times faster, then those which exist now. It means that an alternative to this method must be found.

Введение. Человеку, используя свой мыслительный аппарат, часто приходится решать так называемые задачи выбора.

Для задач выбора характерны следующие свойства:

- конечность множества вариантов выбора (ходы в игре, маршруты движения и т.п.);
- каждому варианту сопоставлена количественная характеристика;
- требуется выбрать вариант, который обладает тем свойством, что его числовая характеристика удовлетворяет некоторому заранее сформулированному условию, или ответить на вопрос о существовании такого варианта.

Наиболее очевидный метод их решения – поочерёдно пересмотреть все варианты и выбрать требуемый. Здесь применение компьютера кажется наиболее естественным и целесообразным. Ведь с его помощью можно обработать такое количество вариантов, которое нельзя обозреть вручную.

И всё же часто в решении интеллектуальных задач компьютеры выходят сущими тугодумами. Данное несоответствие возможностей компьютера реальному положению вещей удивляет лишь на первый взгляд. Окончательные выводы мы постараемся сделать после последовательного рассмотрения специально подобранных для этой цели трёх задач, которые успели, пожалуй, уже стать классическими.

1. Задача Эйнштейна.

Условие.

1. Есть 5 домов, стоящих в ряд.
2. В каждом доме живёт по одному человеку отличной от другой национальности.
3. Каждый жилец пьёт только один определённый напиток, курит определённую марку сигарет и держит животное.
4. Никто из пяти человек не пьёт одинаковые напитки, не курит одинаковые сигареты и не держит одинаковых животных.

Вопрос: Чья рыба?

Подсказки:

1. Англичанин живёт в красном доме.
2. Швед держит собаку.
3. Датчанин пьёт чай.
4. Зелёный дом стоит возле белого.
5. Жилец зелёного дома пьёт кофе.
6. Человек, который курит Pallmall, держит птицу.
7. Жилец среднего дома пьёт молоко.
8. Жилец из жёлтого дома курит Dunhill.
9. Норвежец живёт в первом доме.
10. Курильщик Marlboro живёт около того, кто держит кошку.
11. Человек, который держит лошадь, живёт около того, кто курит Dunhill.
12. Курильщик Winfield пьёт пиво.
13. Норвежец живёт около голубого дома.
14. Немец курит Rothmans.

Решение.

1-ый	2-ой	3-ий	4-ый	5-ый
	Голубой			
Норвежец				
		Молоко		

Изобразим условно пять домов. В первой строке будем писать цвет дома, во второй – национальность жильца. В третьей – напиток, в четвёртой – марку сигарет, в пятой – животное.

Первые две записи делаем на основании подсказок «7» и «9». После этого на основании подсказки «13» однозначно указываем цвет второго дома.

Далее на основании сложившейся ситуации и подсказок «1» и «4» мы видим, что ни один цвет кроме жёлтого (его упоминание имеется в подсказке «8») для дома норвежца не подходит. Указываем его, а заодно, и марку сигарет, которые курит норвежец (подсказка «8»). Далее однозначно определяем, что лошадь содержит жилец голубого дома (подсказка «11»).

1-ый	2-ой	3-ий	4-ый	5-ый
Жёлтый	Голубой		Зелёный	
Норвежец				
		Молоко	Кофе	
Dunhill				
	Лошадь			

Теперь, не нарушая общности, мы можем предположить, что 4-й дом зелёный и его жилец, согласно подсказке «5» пьёт кофе. В этом случае белый дом, независимо от того 3-й это или 5-й окажется рядом. Здесь уместно заметить, что окажись красный дом 3-й (пока мы это не утверждаем и не опровергаем, то перемена местами 4-го (зелёного) и 5-го (белого) домов может не сказаться на ответе на вопрос задачи.

Пришло время обратить внимание на подсказки «3» и «12». Совершенно очевидно, что они относятся к жильцам второго и пятого домов. И если датчанин пьёт чай в пятом доме, то курильщик Winfield пьёт пиво во втором. Или наоборот? Давайте рассуждать. Любитель пива во втором доме. Кто он по национальности? Не норвежец и не датчанин. Не англичанин (см. подсказку «1»). Не швед (см. подсказку «2»). Не немец (см. подсказку «14»). А кто же тогда? Обнаруженное противоречие говорит о том, что однозначно датчанин пьёт чай во втором доме, а курильщик Winfield пьёт пиво в пятом.

1-ый	2-ой	3-ий	4-ый	5-ый
Жёлтый	Голубой		Зелёный	
Норвежец	Датчанин			
	Чай	Молоко	Кофе	Пиво
Dunhill				Winfield
	Лошадь			

Теперь ситуация проясняется. Ни владелец птицы, который курит Pallmall (см. подсказку «6»), ни немец, курящий Rothmans (подсказка «14») не могут жить в 5-ом доме. Следовательно один из них живёт в третьем доме, а другой в четвёртом. Владелец птицы безусловно англичанин, так как швед держит собаку (подсказка «2»). Англичанин живёт в красном доме (подсказка «1»), следовательно в 3-ем зелёном доме немец курит Rothmans, а швед держит собаку в пятом доме белого цвета.

1-ый	2-ой	3-ий	4-ый	5-ый
Жёлтый	Голубой	Красный	Зелёный	Белый
Норвежец	Датчанин	Англичанин	Немец	Швед
	Чай	Молоко	Кофе	Пиво
Dunhill		Pallmall	Rothmans	Winfield
	Лошадь	Птица		Собака

Далее обращаем внимание на подсказку «10». Совершенно очевидно, что Marlboro курит датчанин, а его сосед слева, норвежец, держит кошку, т.к. сосед справа, англичанин, держит птицу. И так, ***ответ очевиден:*** «***Рыбу держит немец***».

Интересно, что ответив на вопрос задачи мы не узнали двух вещей:

- какой напиток пьёт норвежец;
- правильно ли указано относительное расположение 4-го и 5-го домов.

Но ни об одном, ни о другом нас и не спрашивают.

2. Загадка жрецов бога Ра. По свидетельству С.Тымовского (г.Варшава) в 1912 году известный египтолог В.Т.Детрие при раскопках в дельте Нила обнаружил огромный египетский храм с отлично сохранившимися письменами на стенах [1]. Была там и любопытная математическая загадка. Текст её в вольном переводе египтолога Касперо следующий:

«*Эти иероглифы выдолбили жрецы бога Ра. Это стена. За стеной находится колодец Лотоса, как круг Солнца; возле колодца положен один камень, одно долото, две тростинки. Одна тростинка имеет три меры, вторая имеет две меры. Тростинки скрещиваются всегда на поверхности воды колодца Лотоса и эта поверхность является одной мерой выше дна. Кто сообщит числа наидлиннейшей прямой, содержащейся в ободе колодца лотоса, возьмёт обе тростинки и будет жрецом бога Ра…*»

Детрие, не сумев решить задачу в одиночку, обратился к математикам. Математики задачу решили, сформулировав её в метрической системе следующим образом.

Колодец – это прямой цилиндр (см. рис.1). Два жёстких прута: один длиной 3 м, второй – 2 м – приставлены к основанию цилиндра и его поверхности таким образом, что их проекции на основание цилиндра – диаметр основания цилиндра. Пруты скрещиваются всегда на уровне зеркала поверхности воды, от которой до дна колодца – один метр. Требуется сообщить диаметр колодца с точностью до 1 см.

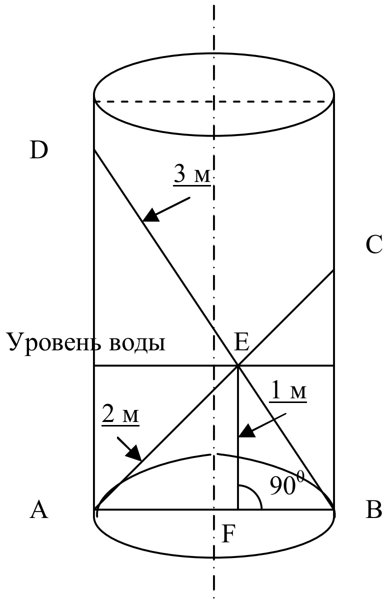

Рис. 1

AB = 2 м

BD = 3 м

EF = 1 м

AB = 2 R = ?

Интересно (и жутко одновременно), что не решивший задачу кандидат в жрецы бога Ра платил за неудачную попытку жизнью. Войдя за стену, он замуровывался в комнате построенной из гранитных глыб и должен был, решив задачу подать выдолбленные на камне цифры числа выражающего диаметр колодца наружу через небольшое окошко. Если ответ оказывался правильным, испытуемый размуровывался и выходил на свободу жрецом бога Ра. А если нет? Подать можно было только один камень: «*…если же голод победит твое тело, не выйдешь жрецом Ра. …Сквозь стену колодца Лотоса прошли многие, но немногие стали жрецами бога Ра. Думай, цени свою жизнь. Так советуют тебе жрецы Ра.*»

А что считать правильным ответом задачи? Это вовсе не простой вопрос. А цена его, без преувеличения, жизнь человека.

Сегодня у нас есть абсолютная уверенность в том, что древние египтяне считали, что *«…Числа наидлиннейшей прямой содержащейся в ободе колодца Лотоса»* есть дробь 16/13. А в стиле древних египтян она имеет вид

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}.$$

На самом деле математикам XX века не трудно было догадаться, что диаметр колодца есть положительный корень уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{h},$$

где h – расстояние от поверхности воды до дна колодца.

В нашем случае $h = 1$; а $x = 1{,}2311857237786690\ldots$

Разумеется, последнее число иррациональное. Мы можем его вычислить с любой точностью, но никогда, никаким способом не можем выразить его точно при помощи цифр. Вот почему по свидетельству С.Тымовского математики долго удивлялись, как могли древние египтяне решить такую задачу. Тем более, что формула для нахождения корней уравнения четвёртой степени была получена лишь в XVI веке (итальянским математиком Феррари – учеником Кардано).

Но как оказалось, основная трудность для наших современников, заключается в том, чтобы отойти от привычной математической модели в виде алгебраического уравнения четвёртой степени и поставить себя на место необременнёого математическими знаниями древнего египтянина.

Можно воспроизвести Рис.1 на тетрадном листе в клеточку (сторона клетки 0,5 см.). За единицу выберем 13 клеток, а диаметр АВ возьмём равным 16 клеткам. Таким образом, АС равно 26 клеток, BD равно 29 клеток. Мы видим, что EF равно точно 13 клеткам (?!). На самом деле EF длиннее 13 клеток приблизительно на 0,01 мм. Разумеется, такую погрешность мы не замечаем. Даже если взять за единицу 1 метр (1000 мм.), то теоретически рассчитанная погрешность не превысит 0,16 мм. Для справки: толщина тонкой карандашной линии 0,5 мм.

Вообще говоря, никакие геометрические построения не могут обнаружить разницу между числами 1, 231… и 16/13. Таким образом, египетские жрецы, безусловно, были уверены в *абсолютной* правильности полученного результата. Кроме того этот результат легко получить если правильно взглянуть на вещи. Делая засечки на отрезке, равном диаметру колодца, поделим этот отрезок на четыре части. *Теперь легко увидеть, что в одной мере умещается три четверти и ещё четверть оставшейся четверти диаметра*.

Все эти четверти находятся при помощи деления отрезка пополам. Древние египтяне, безусловно, умели производить такую операцию «на глаз» с довольно высокой точностью. Исторические факты говорят о том, что это явно их стиль. Можно, также, представить себе вполне реальную картину того, как жрецы могли спроектировать такой колодец.

3. Компьютерный замок XXI века. Эта головоломка возникла на рубеже веков. В отличии от известных игры в «15» и кубика Рубика, головоломка «Компьютерный замок XXI века» не может, очевидно, существовать в механическом варианте, а существует только на экране компьютера. Представив себе матрицу из шести строк и восьми столбцов, элементами которой являются либо «звёздочки», либо «точки».

•	*	*	•	•	•	•	*
*	•	•	*	•	•	*	*
•	•	•	*	•	*	•	*
•	•	*	•	•	•	•	*
•	*	•	•	•	•	•	*
*	*	*	*	•	•	•	*

Рис. 2

Это матрица состояний «замка». «Звездочки» в данном случае изображают число 21. Указатель мыши можно установить на элемент, который мы будем ивертировать. Если это «звёздочка», то она заменится на «точку», а если «точка», то на «звёздочку». Вместе с инверсией указанного элемента инвертируются ещё двенадцать элементов, которые расположены в одной строке и в одном столбце с выбранным. Таким образом, в результате одного хода, своё состояние меняют на противоположное тринадцать элементов. Хотя сделать ход – это значит указать один ключевой элемент. Всё остальное происходит автоматически. Задача заключается в том, чтобы все элементы стали «точками». В этом случае замок считается открытым. Разумеется, задачу интересно решить за наименьшее число ходов.

Было бы естественным представить математическую модель задачи как систему ограничений и целевую функцию *задачи булевого линейного программирования.*

Между тем существует неожиданно простой матричный способ, который позволяет найти решение данной задачи. Способ легко обобщается на любую матрицу состояний «замка», если числа строк и столбцов чётные. *Решение в данном случае существует и оно единственное.* В нашей матрице строк шесть, а столбцов восемь. Оба числа чётные. Построим так называемую матрицу зарядов (рис.3).

5	5	5	6	3	4	4	8
5	7	7	6	4	5	4	9
5	6	6	5	3	3	4	8
4	5	4	5	2	3	3	7
4	4	5	5	2	3	3	7
6	7	7	7	5	6	6	10

Рис.3

Для этого в качестве каждого элемента матрицы будем записывать общее число звёздочек в тринадцати элементах строки и столбца соответствующей матрицы состояний (рис.2), пересечение которых образуют данный элемент.

Далее,отмечая единицами в новой матрице нечётные элементы матрицы зарядов получаем состоящую из нулей и единиц матрицу ходов (рис.4).

1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0

Рис.4

Теперь выполняем в любой последовательности двадцать семь ходов и «замок» откроется. В этом легко убедиться, если взглянуть на матрицу результатов (рис.5), в которой будем отмечать число поворотов для каждого соответствующего элемента матрицы состояний (рис.1).

6	7	7	8	6	8	6	7
7	8	8	9	8	8	7	7
6	8	8	7	6	7	6	7
8	8	9	8	8	8	6	7
8	9	8	8	8	8	6	7
7	7	7	7	6	8	6	7

Рис.5

Мы видим, что матрица состояний в результате будет содержать только «точки», так как сопоставление рис.2 и рис.5 позволяет заметить, что все «звёздочки» повернуться *нечетное* число раз, а все «точки» - *чётное*.

Почему алгоритм такой простой? Почему он всегда даёт единственное решение? Конкретный пристальный взгляд на вариант замка с матрицей 6x8 элементов позволяет понять всё. Пусть замок имеет начальное состояние такое как на рис. 2. Выберем по одному разу для хода каждый из 13 элементов третьей строки и четвёртого столбца. Можно убедиться, что после этого просто исчезнет одна «звёздочка», находящаяся на пересечении третьей строки и четвертого столбца. Между тем эта «звездочка» повернулась 13 раз, остальные 7 элементов строки по 8 раз, а остальные 5 элементов столбца по 6 раз. Каждый из 35-ти элементов матрицы не вошедших в строку и столбец повернулся по 2 раза. Теперь ясно, почему в матрице зарядов стоят числа, дающие в сумме 19x13=247. Такое число ходов нужно для «поэлементного» открытия замка. Совершенно очевидно, что *систему ходов можно минимизировать, заменив чётные числа нулями, а нечётные единицами.* В результате получаем матрицу ходов (рис.4).

Выводы. Если бы при решении первой задачи мы стремились для построения математической модели использовать аппарат формальной логики, который здесь кажется очень уместным, то, наверное, в конце концов и достигли бы успеха, применив компьютер. Однако, «естественный» интеллект оказался куда более эффективным. Говорят, что именно Эйнштейн заметил: «не всё, то что вычисляется можно учесть, и не всё то, что учитывается можно вычислить». На наш взгляд тренировка в решении подобных задач должна стать частью профессионального образования авиационных (да и не только авиационных) менеджеров.

Между постановкой второй и третьей задачами разница во времени 3-4 тысячелетия. Однако обе они показывают, что построение адекватной математической модели ещё не залог лучшего решения. И если для уравнения задачи египетских жрецов существуют общие численные методы решения, то не известно дали бы общие методы решения о компьютерном «замке» намного более эффективный результат, чем при полном переборе. А при полном переборе нужно опробовать, как минимум, $2^{48}-1=281474976710655$ вариантов, что бы быть уверенным, что задача имеет действительно единственное (уже найденное нами) решение. На тех компьютерах, которыми мы сейчас пользуемся, полный перебор занял бы несколько лет. Эта задача на наш взгляд очень полезна всем тем, кто по той или иной причине изучает приложение методов *системного анализа.*

Основной вывод, который мы теперь можем сделать, заключается в том, что при самой тщательной математической формализации интеллектуальных задач всегда остаётся широкое поле деятельности для интеллекта человека.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. С.Тымовский. Загадка жрецов бога Ра. Журнал «Наука и жизнь», 1’66, стр.136-137; 2’66, стр.127.
2. И.М.Яглом. Алгебры Буля. В кн. О некоторых вопросах современной математики и кибернетики. Из-во «Просвещение». Москва. 1965г.
3. О.П.Бондарь, С.Т.Кузнецов, Н.В.Столярчук. Задача о назначениях, критерии совместимости работников и справедливости назначений. В научно-теретическом журнале «Искусственный интеллект». 4' 2005.