УДК 517.9

ЗАДАЧА КОШІ НЕЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Г.В.Завізіон, В.В.Ключник

Побудовано асимптотичний розв'язок нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням.

We construct asymptotic solution of a nonlinear of singularly perturbed system of differential equations with a delay.

Вступ.

Сингулярно збурені системи диференціальних рівнянь із запізненням вивчаються в різних напрямках. Так в [1] пропонуються методи асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем із запізненням, а в [2] метод кроків з [1] застосовується до лінійних інтегро-диференціальних систем рівнянь з сталим запізненням і виродженою матрицю при похідній. Питання існування розв'язку і обґрунтування методу усереднення для багаточастотних крайових задач з сталим запізненням для сингулярно збурених систем вивчалися в [3]. В [4] досліджуються питання існування інтегральних многовидів в лінійних сингулярно збурених диференціально-різнецевих рівнянь. За допомогою примежових функцій в [5] інтегруються нелінійні диференціально-різнецеві рівняння з малим запізненням. Самі проміжкові функції задовольняють автономну нелінійну систему диференціальних рівнянь або лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь.

В даній статті розглядається нелінійна сингулярно збурена система диференціальних рівнянь з змінним запізненням. Будуються асимптотичні розв'язки, вигляд яких залежить від кратності коренів характеристичного рівняння і метод дає можливість в явному вигляді записати потрібну кількість наближень розв'язку. Пропонується спосіб побудови асимптотичного розв'язку задачі Коші нелінійної сингулярно збуреною системи диференціальних рівнянь із змінним запізненням у випадку простих коренів характеристичного рівняння.

Асимптотичний розв'язок.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=f(t,x(t,\varepsilon),x(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon),\varepsilon), \tag{1}$$

з початковою умовою

$$x(0,\varepsilon)=x_0 \tag{2}$$

де $\varepsilon(0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$- малий параметр, $t\in[0;L],\Delta(t)$- скалярна функція, $f(t,x,y,\varepsilon),x(t,\varepsilon),y=x(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon),x_0-n$- вимірні вектори. Припускаємо виконання умов:

1) вектор $f(t,x,y,\varepsilon)$ має розвинення

$$f(t,x,y,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}f_{i}(t,x,y),$$

і вектори $f(t,x,y)(i=0,1...)$ мають нескінченну кількість частинних похідних за змінними t,x,y і функція $\Delta(t)\geq 0, t-\varepsilon\Delta(t)\geq 0, \forall t\in[0;L]$;

2)існує ізольований корінь $\vec{x}(t)$ рівняння

$$f_{0}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))=0,$$

при цьому функція $\bar{x}(t)$ нескінченно-диференційовна на відрізку $[0;L]$ і $x_{0}-\bar{x}(0)=\varepsilon\beta(\varepsilon),\beta(\varepsilon)$ обмежена при $\varepsilon\to 0$, а також $f'_{oy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\equiv 0$;

3)корені $\lambda_{i}(t)(i=\overline{1,n})$ характеристичного рівняння

$$\det\left\|f'_{ox}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))-\lambda\cdot E\right\|=0$$

різні і ненульові, а також виконується нерівності $\operatorname{Re}\lambda_{i}(t)<-\beta<0,\forall t\in[0;L]$, де $E-n\times n$ одинична матриця; $f'_{ox}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)),f'_{ox}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))(\alpha=0,1...)$ матриці, які складені з частинних похідних від компонент вектора $f_{\alpha}(t,x,y)$ по компонентам відповідно векторів x і y, при $x=\bar{x}(t), y=\bar{y}(t)$.

Вірною є теорема.

Теорема. Якщо виконуються умови 1-3, то формальний розв’язок задачі Коші (1),(2)має вигляд

$$x(t,\varepsilon)=v(t,\varepsilon,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_{i}(t,\varepsilon)\prod_{i}(t,\varepsilon,\varepsilon) \tag{3}$$

де $v(t,\varepsilon,\varepsilon),u_{i}(t,\varepsilon)$- n- вимірні вектори, $\prod_{i}(t,\varepsilon,\varepsilon)$ - скалярні функції, які мають розвинення

$$u_{i}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s+1}u_{is}(t),\ \prod_{i}(t,\varepsilon,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s}\prod_{is}(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon,\varepsilon)=v_{0}(t)+\varepsilon v_{1}(t)+\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^{s}v_{s}(t,\varepsilon), \tag{4}$$

де $\prod_{i}(t,\varepsilon,\varepsilon)$ задовольняють диференціальні рівняння

$$\varepsilon\prod'_{is}(t,\varepsilon)=\lambda_{i}(t)\prod_{is}(t,\varepsilon)+\xi_{is}(t,\varepsilon), \tag{5}$$

$\lambda_{i}(t),\xi_{is}(t,\varepsilon)$- скалярні функції.

Доведення. Скориставшись (3),(4) розвинемо за степенями параметра ε вектор

$$f(t,v(t,\varepsilon,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_{i}(t,\varepsilon)\prod_{i}(t,\varepsilon,\varepsilon),v(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_{i}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)\prod_{i}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon,\varepsilon),\varepsilon)=$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}(f_{\alpha}(t,v_{0}(t),v_{0}(t-\varepsilon\Delta(t))+\sum_{s=0}^{\alpha-1}(f'_{sx}(t,v_{0}(t),v_{0}(t-\varepsilon\Delta(t))(v_{\alpha-s}(t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha-1-s}u_{ij}(t)\prod_{i,\alpha-1-s-j}(t,\varepsilon))+f'_{sy}(t,v_{0}(t),v_{0}(t-\varepsilon\Delta(t)))(v_{\alpha-s}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha-1-s}u_{ij}(t-\varepsilon\Delta(t))\prod_{i,\alpha-1-s-j}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))+g_{1\alpha}(t,\varepsilon)+g_{2\alpha}(t,e)), \tag{6}$$

Де $g_{1\alpha}(t,\varepsilon)=g_{1\alpha}(t,v_l(t),v_l(t-\varepsilon\Delta(t))),g_{2\alpha}(t,\varepsilon)=g_{2\alpha}(t,v_l(t),v_l(t-\varepsilon\Delta(t)),p_{l1}(t,\varepsilon),p_{l1}(t-\varepsilon\Delta(t))$ - многочлени степеня α відносно вказаних аргументів, причому другий многочлен не містить одночлена мулевого степеня відносно аргументів $p_{l1}(t,\varepsilon),p_{l1}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)(l=\overline{1,\alpha},l_1=\overline{0,\alpha-2})$; під $p_{l1}(t,\varepsilon)$ розуміють аргументи вигляду $u_{ij}(t)\prod_{i,l1-j}(t,\varepsilon)(j=\overline{0,l_1})$, а під $p_{l1}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)$ розуміємо аргумент вигляду $u_{ij}(t-\varepsilon\Delta(t))\prod_{i,l1-j}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)$. Підставляючи (3)-(6) в (1) і зрівнюючи вирази, які містять $\prod_i(t,\varepsilon,\varepsilon),\prod_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon,\varepsilon)$, і які їх не містять, одержимо рівняння

$$\varepsilon v'(t,\varepsilon)=f_1(t,v(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_i(t,\varepsilon)\prod_i(t,\varepsilon,\varepsilon),v(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}u_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)\prod_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon),\tag{7}$$

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n}((f'_{ox}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\prod io(t,\varepsilon))+$$
$$\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s(\sum_{i=1}^{n}((f'_{0x}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-1}(t)-u_{i,s-1}(t)\lambda_i(t)+$$
$$+f'_{1x}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-2}(t)+u'_{i,s-2}(t)+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-1-j}(t))\prod_{i0}(t,\varepsilon)+$$
$$+(f'_{1y}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-2}(t-\varepsilon\Delta(t))+$$
$$+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{j,y}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-1-j}(t-\varepsilon\Delta(t))\prod_{i0}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+\sum_{j=0}^{s-1}u_{ij}(t)\xi_{i,s-1-j}(t,\varepsilon)))+$$
$$+g_{2s}(t,\varepsilon)))+\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^s(\sum_{k=0}^{s-1-j}f'_{kx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-1-k-j}(t)+u'_{i,s-2-j}(t))\prod_{ij}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{k=0}^{s-1-j}f'_{kx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-1-k-j}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))\prod_{ij}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))=0,\tag{8}$$

де

$$f_1(t,v(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_1(t,\varepsilon)\prod_i(t,\varepsilon,\varepsilon),v(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)\prod_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))=$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}(f_{\alpha}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))+(\sum_{s=0}^{\alpha-1}f'_{sx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))v_{\alpha-s}(t)+$$
$$+\sum_{s=1}^{\alpha-1}f'_{sy}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))v_{\alpha-s}(t-\varepsilon\Delta(t)))+\sum_{\alpha=2}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}g_{1\alpha}(t,\varepsilon).$$

Розвинемо за степенями параметра ε наступні функції

$$v_s(t-\varepsilon\Delta(t))=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\bar{v}_{sj}(t),u_{is}(t-\varepsilon\Delta(t))=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\bar{u}_{isj}(t),$$
$$\exp(\varepsilon^{-1}\int_t^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)=\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))(1+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\bar{\lambda}_{ij}(t)),\tag{9}$$
$$f_s(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))=f_s(t,v_0(t),v_0(t))+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j(f'_{sy}(t,v_0(t),v_0(t))\bar{v}_{0j}(t)+\bar{g}_{sj1}(t)),$$

де

$$\overline{v}_{s0}(t)=v_s(t),\overline{u}_{is0}(t)=u_{is}(t),\overline{v}_{sj}(t)=(-1)^j v_s^{(j)}(t)\Delta^j(t),\overline{u}_{isj}(t)=(-1)^j u_{is}^{(j)}(t)\Delta^j(t);$$

$$\overline{\lambda}_{i1}(t)=\Delta^2(t)\lambda'(t),\overline{\lambda}_{i2}(t)=\frac{\Delta^3(t)}{2!}(\frac{1}{4}\Delta'(t)(\lambda'(t))^2-\frac{1}{3}\lambda''(t));\overline{g}_{sj1}(t)=0,$$

при $j=0,1$ і $\overline{g}_{sj1}(t)=\overline{g}_{sj}(t)$ при $j\geq 2; v_s^{(j)}(t)$ означає j похідну від $v_s(t);\overline{g}_{sj}(t)=$ $\overline{g}_{sj}(\overline{v}_{01}(t)...\overline{v}_{0j}(t))$ многочлен від вказаних аргументів. Позначимо

$$\overline{f}_{sx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))=\frac{1}{\varepsilon}(f'_{sx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))-f'_{sx}(t,v_0(t),v_0(t)),$$

$$\overline{f}_{sy}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))=\frac{1}{\varepsilon}(f'_{sy}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))-f'_{sy}(t,v_0(t),v_0(t)))). \qquad (10)$$

Підставляючи (4), (9), (10) в (7) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, маємо

$$f_0(t,v_0(t),v_0(t))=0, \qquad (11)$$

$$v'_0(t)=f'_{0x}(t,v_0(t),v_0(t))v_1(t)+f_1(t,v_0(t),v_0(t)), \qquad (12)$$

$$v'_{\alpha-1}(t)=f_\alpha(t,v_0(t),v_0(t))+(\sum_{s=1}^{\alpha-1}f'_{sy}\overline{v}_{0,\alpha-s}(t)+\sum_{s=0}^{\alpha-1}\overline{g}_{s,\alpha-s,1}(t))+$$

$$+f'_{0x}(t,v_0(t),v_0(t))v_\alpha(t)+\sum_{s=1}^{\alpha-1}f'_{sx}(t,v_0(t),v_0(t))v_{\alpha-s}(t)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\alpha-2}\overline{f}_{sx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))v_{\alpha-1-s}(t)+\sum_{s=1}^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\alpha-1-s}f'_{sy}(t,v_0(t),v_0(t))\overline{v}_{\alpha-s,\alpha-1-s-j}(t)+$$

$$+\sum_{s=1}^{\alpha-2}\sum_{j=0}^{\alpha-2-s}\overline{f}_{sy}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))\overline{v}_{\alpha-s,\alpha-2-s-j}(t)+g_{1\alpha}(t,\varepsilon)). \qquad (13)$$

Згідно умови 2, покладемо в (11)

$$v_0(t)=\overline{x}(t).$$

Тоді використовуючи умову 3 з рівнянь (12), (13) знайдемо

$$v_1(t)=(f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)))^{-1}(\overline{x}'(t)-f_1(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))),$$

$$v_\alpha(t,\varepsilon)=(f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)))^{-1}(v'_{\alpha-1}(t)-f_\alpha(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))-$$

$$-(\sum_{s=1}^{\alpha-1}f'_{sy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{v}_{0,\alpha-s}(t)+\sum_{s=0}^{\alpha-1}\overline{g}_{s,\alpha-s,1}(t))-\sum_{s=1}^{\alpha-1}f'_{sx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))v_{\alpha-s}(t)-$$

$$-\sum_{s=0}^{\alpha-2}\overline{f}_{sx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))v_{\alpha-1-s}(t)-\sum_{s=1}^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\alpha-1-s}f'_{sy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{v}_{\alpha-s,\alpha-1-s-j}(t)-$$

$$-\sum_{s=1}^{\alpha-2}\sum_{j=0}^{\alpha-2-s}\overline{f}_{sy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))\overline{v}_{\alpha-s,\alpha-2-s-j}(t)-g_{1\alpha}(t,\varepsilon)),\alpha\geq 2$$

Із рівнянь (5) знайдемо, що

$$\Pi_{i0}(t,\varepsilon)=\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0},$$

$$\Pi_{is}(t,\varepsilon)=\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{is}+\overline{\Pi}_{is}(t,\varepsilon), \qquad (14)$$

де

$$\overline{\prod}_{is}(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\int_0^t \exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^t \lambda_i(\tau)d\tau)\xi_s(t_1,\varepsilon)dt_1,\ s=1,2...,i=\overline{1,n}.$$

Врахувавши (3),(4) і початкову умову (2) величини $c_{is}, i=\overline{1,n}, s=0,1,...,$ однозначно знаходимо з рівнянь

$$v_0(0)+\varepsilon\sum_{i=1}^n u_{i0}\prod_{i0}(0,\varepsilon)+\varepsilon v_1(0)=x_0, \tag{15}$$

$$v_s(0)+\sum_{i=1}^n\sum_{r=0}^{s-1}u_{ir}(0)\prod_{i,s-1-r}(0,\varepsilon)=0,\ s=2,3,....$$

Підставивши (14) в (8) і зробивши спрощення маємо рівняння

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon((f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0})+$$

$$+\varepsilon^2((f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i1}(t)-u_{i1}(t)\lambda_i(t)+f'_{1x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)+u'_{i0}(t))\times$$

$$\times\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}+f'_{1y}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}))+$$

$$+\sum_{s=3}^{\infty}\varepsilon^s(((f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-1}(t)-u_{i,s-1}(t)\lambda_i(t)+f'_{1x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-2}(t)+u'_{i,s-2}(t)+$$

$$+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-1-j}(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}+$$

$$+(f'_{1y}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-2}(t)+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-1-j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-2-j}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t)\overline{u}_{i,s-2-j,l})\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0})+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=l+1}^{\infty}\sum_{i=1}^n\varepsilon^s(((f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-l-1}(t)-u_{i,s-l-1}(t)\lambda_i(t)+f'_{1x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-l-2}(t)+$$

$$+u'_{i,s-l-2}(t)+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-1-j}))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{il}+(f'_{1y}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-l-2}(t)+$$

$$+\sum_{j=2}^{s-1}(f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-1-l-j}(t)+\sum_{j=1}^{s-2}\sum_{r=1}^{s-2-j}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{i,s-2-j-l,r})\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{il})+$$

$$+\sum_{i=1}^n\varepsilon^2(u_{i0}(t)\xi_{i1}(t,\varepsilon)+g_{22}(t,\varepsilon)+$$

$$+\overline{f}_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}+(f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)-$$

$$-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\overline{\prod}_{i1}(t,\varepsilon))+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k(u_{i0}(t)\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k-2}u_{i,j}(t)\xi_{i,k-1-j}(t,\varepsilon)+g_{2k}(t,\varepsilon)+(f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\overline{\prod}_{i,k-1}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\overline{f}_{sx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-$$

$$-\varepsilon\Delta))u_{ij}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j}+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}\overline{f}_{sx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-$$

$$-\varepsilon\Delta))\overline{u}_{ijl}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j}+\sum_{s=2}^{k}(\sum_{j=0}^{s-1}f'_{jx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-1-j}(t)-$$

$$-u_{i,s-1-j}(t)\lambda_i(t)+u'_{i,s-2})\overline{\prod}_{i,k-s}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-s-2}\sum_{j=1}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{isl}(t)\overline{\prod}_{i,k-s-2-j-l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))) \tag{16}$$

Підставляючи розвинення функції $\exp(\varepsilon^{-1}\int_t^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)$ в степеневий ряд по ε в рівняння (16) і в одержаному рівнянні згрупуймо вирази при степенях ε, маймо рівняння для знаходження функцій $u_{is}(t)(s=0,1...)$

$$\varepsilon(f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))+$$

$$+\varepsilon^2(f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i1}(t)-u_{i1}(t)\lambda_i(t)+f'_{1x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)+u'_{i0}(t)+$$

$$+f'_{1y}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t)))+$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k((f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,k-1}(t)-u_{i,k-1}(t)\lambda_i(t)+f'_{1x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,k-2}(t)+u'_{i,k-2}(t)+$$

$$+\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,k-1-j}(t))+(f'_{1y}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,k-2}(t)+$$

$$+\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,k-1-j}(t)+\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-2-j}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{i,k-2-j,l}(t)\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))+$$

$$+\sum_{m=1}^{k-1}(\sum_{j=1}^{m-1}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,m-1-j}(t)+\sum_{j=1}^{m-2}\sum_{l=1}^{m-2-j}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{i,m-2-j,l}(t))\times$$

$$\times\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))\overline{\lambda}_{i,k-m}(t)))=0 \tag{17}$$

З рівняння випливає, що $\xi_{is}(t,\varepsilon)(s=0,1...)$ задовольняє рівняння

$$\varepsilon^2(g_{22}(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}(u_{i0}(t)\xi_{i1}(t,\varepsilon)+$$

$$+\overline{f}_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}+(f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)-$$

$$-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\overline{\prod}_{i1}(t,\varepsilon)))+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k(g_{2k}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(u_{i0}(t)\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{k-2}u_{ij}(t)\xi_{i,k-1-j}(t,\varepsilon)+(f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\overline{\prod}_{i,k-1}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\overline{f}_{sx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-$$

$$-\varepsilon\Delta(t)))u_{ij}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j}+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}\overline{f}_{sx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-$$

$$-\varepsilon\Delta(t)))\overline{u}_{ijl}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int\limits_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j-l}+\sum_{s=2}^{k}(\sum_{j=0}^{s-1}(f'_{jx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-1-j}(t)-$$

$$-u_{i,s-1-j}(t)\lambda_i(t))+u'_{i,s-2}(t))\overline{\prod}_{i,k-s}(t,\varepsilon)+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=1}^{k-s-2}\sum_{l=0}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{isl}(t)\overline{\prod}_{i,k-s-2-j-l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)=0 \tag{18}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, в рівняннях (17),(18), одержимо рівняння

$$C(t,\lambda_i)u_{i0}(t)=0, \tag{19}$$

$$C(t,\lambda_i)u_{i1}(t)=-u'_{i0}(t)+F_i(t)u_{i0}(t), \tag{20}$$

$$C(t,\lambda_i)u_{i,k-1}(t)=-u'_{i,k-2}(t)+F_i(t)u_{i,k-2}(t)+F_{i1k}(t), i=\overline{1,n}, k=3,4..., \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_{i0}(t)\xi_{i1}(t,\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{n}((f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\overline{\prod}_{i1}(t,\varepsilon)+$$
$$+F_{22}(t,\varepsilon), \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_{i0}(t)\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{n}((f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\overline{\prod}_{i,k-1}(t,\varepsilon)+$$
$$+F_{2k}(t,\varepsilon), \tag{23}$$

де

$$C(t,\lambda(t))=f'_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))-\lambda(t)E,$$

$$F_i(t)=-f'_{1x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))-f'_{1y}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t)),$$

$$F_{i1k}(t)=-\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,k-1-j}(t)-(\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,k-1-j}(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-2-j}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{i,k-2-j,l}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))-\sum_{m=1}^{k-1}(\sum_{j=1}^{m-1}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,m-1-j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\sum_{l=1}^{m-2-j}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{i,m-2-j,l}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))\overline{\lambda}_{i,k-m}(t),$$

$$F_{22}(t,\varepsilon)=-g_{22}(t,\varepsilon)-\sum_{i=1}^{n}\overline{f}_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}),$$

$$F_{2k}(t,\varepsilon)=-g_{2k}(t,\varepsilon)-\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k-2}u_{ij}(t)\xi_{i,k-1-j}(t,\varepsilon)+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{k-2-s}\overline{f}_{sx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{ij}(t)\times$$

$$\times\exp(\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j}+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}\overline{f}_{sx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t\varepsilon\Delta(t))\overline{u}_{ijl}(t)\times$$

$$\times\exp(\varepsilon^{-1}\int\limits_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j-l}+\sum_{s=0}^{k}(\sum_{j=0}^{s-1}(f'_{jx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-1-j}(t)-u_{i,s-1-j}(t)\lambda_i(t))+$$

$$+u'_{i,s-2}(t))\overline{\prod}_{i,k-s}(t,\varepsilon)+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=1}^{k-s-2}\sum_{l=0}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{isl}(t)\overline{\prod}_{i,k-s-2-j-l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)=0$$

Розглянемо метод розв'язування рівнянь (19)-(21). В зв'язку з умовою 3 покладемо в (19):

$$u_{i0}(t)=\alpha_{i0}(t)\varphi_i(t), i=\overline{1,n}, \tag{24}$$

де $\varphi_i(t)$ власні вектора матриці $C(t,\lambda_i),\alpha_{i0}(t)$ - довільні функції. Умова існування рівняння (20) прийме вигляд

$$(\varphi_i(t),\psi_i(t))\alpha'_{i0}(t)+(\varphi'_i(t)+F_i(t)\varphi_i(t),\psi_i(t))\alpha_{i0}(t)=0, \qquad (25)$$

де $\psi_i(t)$ власні вектора матриці $C^*(t,\lambda_i)$, спряженої до матриці $C(t,\lambda_i)$. При виконані умови в [1], виберемо вектора $\varphi_i(t),\psi_i(t)$ так, щоб виконувалася рівність $(\varphi_i(t),\psi_i(t))=1,\forall t\in[0;L]$, що дає можливість однозначно знаходження $\alpha_{i0}(t),u_{i0}(t)$ відповідно з рівнянь (25),(24). Припустивши, що $u_{is}(t)$ знайдені при $s<k-2$, і що

$$u_{is}(t)=\alpha_{i,k-2}(t)\varphi_i(t)+C^+(t,\lambda_i)(u'_{i,k-3}(t)+$$
$$+F_i(t)u_{i,k-3}(t)+F_{i1,k-1}(t)),i=\overline{1,n},k=3,4... \qquad (26)$$

Враховуючи (26) умову існування розв'язку рівняння (21) функції $\alpha_{i,k-2}(t)$ однозначно знаходимо з рівняння

$$(\varphi_i(t),\psi_i(t))\alpha'_{i,k-2}(t)+((\varphi'_i(t)+F_i(t)\varphi_i,\psi_i(t))\alpha_{i,k-2}(t)+$$
$$+(\frac{d}{dt}(C^+(t,\lambda_i)(u'_{i,k-3}(t)+F_i(t)u_{i,k-3}(t)+F_{i1,k-1}(t))+F_{i1,k}(t),\psi_i(t))=0,$$

де $C^+(t,\lambda)$, узагальнено обернена матриця до матриці $C(t,\lambda),i=\overline{1,n},k=3,4...$ Рівняння (22),(23) перепишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}u_{i0}(t)\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{n}C(t,\lambda_i)u_{i0}(t)\prod\nolimits_{i,k-1}(t,\varepsilon)+F_{2k}(t,\varepsilon),k=2,3... \qquad (27)$$

Враховуючи рівняння (19) рівняння з (27) знайдемо

$$\xi_{k-1}(t,\varepsilon)=-U_0^{-1}(t)F_{2k}(t,\varepsilon)),k=2,3...$$

де $\xi_{k-1}(t,\varepsilon)-n$ вимірний вектор з координатами $\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon),U_0(t)-n\times n$ матриця, стовбцями, якої є вектора $u_{i0}(t)(i=\overline{1,n})$. Теорема доведена.

Таким чином, пропонується спосіб побудови асимптотичного розв'язку задачі Коші сингулярно збуреної системи нелінійних диференціальних рівнянь із зміним запізненням.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Пидченко Ю. П., Сотниченко Н. А. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.- Киев: Наук. думка, 1981.-196с.
2. Завизион Г. В. Линейная система интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известие вузов.-2003.-Т.494, №7.-С.64-69.
3. Бігун Я. Й. Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами // Укр. мат. журн.-2004.-Т.56,№2.-С. 257-263.
4. Perestyuk M. O., Cherevko I. M. Decomposition of linear singularly perturbed functional differential equations // Nonlinear Oscillations.-2001.-T.4,№3.-P.345-353.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.- М.: Наука, 1973.-272с.