УДК 517.928

ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

І.Г. Завізіон

Одержана умова існування і єдиності періодичного розв'язку системи інтегро-дифференціальних рівнянь Вольтерра. Використовуючи системи інтегро-дифференціальних рівнянь з параметром будуються збіжні періодичні ітерації. Подаються оцінки швидкості збіжності розв'язку і точного розв'язку систем.

We obtain conditions for existence and uniqueness of periodic solution system integro-differential Volterr's equations. By using system integro-differential equations with parameter converged periodic iterations are constructed. Estimates of the speed of convergence of solution and sharp solution of system are gived.

Вступ.

В працях [1-4] розроблені методи конструктивного аналіза періодичних розв'язків різних класів лінійних та нелінійних систем диференціальних рівнянь. На основі запропонованих ідей, в [5] одержані достатні умови існування та єдиності, стійкості періодичних розв'язків та вказані конструктивні методи побудови періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь, які зручні для практичного застосування. Методи розроблені в [5] застосовують в [6] до знаходження періодичних розв'язків лінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь, а також в [7] до слабонелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом, у випадку коли межі інтегрування періодичні функції. Коли ж межі інтегрування не є періодичними функціями, система інтегро-диференціальних рівнянь не завжди має періодичний розв'язок. Тому в даній статті знаходяться необхідні і достатні умови існування і єдиності періодичних розв'язків лінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь, коли межі інтегрування не періодичні функції.

Використовуючи результати [5], про застосування матричної функції $(E-B(t))^{-1}$ для дослідження лінійних диференціальних рівнянь, в статті пропонується підхід до побудови періодичних розв'язків лінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь. За допомогою інтегро-диференціальних рівнянь з параметром побудоване аналітичне представлення періодичних розв'язків.

Існування та єдиність періодичного розв'язку.

Розглянем систему інтегро-диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = Q(t)x + f(t) + \int_0^t \overline{\Gamma}(t,s)x(s)ds, \qquad (1)$$

де $n\times n$ матриця $Q(t)$, вектор $f(t)$, $n\times n$ матриця $\overline{\Gamma}(t,s)$ неперервні і $\omega-$періодичні по змінним t і s.

Знайдемо умову існування періодичних періоду ω розв'язків рівняння (1).

Нехай $x(t)$ задовольняє рівняння (1), тоді

$$\frac{dx(t)}{dt}=Q(t)x(t)+f(t)+\int_0^t\overline{\Gamma}(t,s)x(s)ds.$$

Замінивши в цій рівності t на $t+\omega$ маємо

$$\frac{dx(t+\omega)}{dt}=Q(t)x(t+\omega)+f(t)+\int_0^{t+\omega}\overline{\Gamma}(t,s)x(s)ds.$$

Запишемо рівняння (1), якщо $x(t+\omega)$ є його коренем. Для цього замінемо $x(t)$ на $x(t+\omega)$

$$\frac{dx(t+\omega)}{dt}=Q(t)x(t+\omega)+f(t)+\int_0^{t+\omega}\overline{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds.$$

Доведемо, що останні дві рівності рівні. Для цього ввівши заміну $s=s_1+\omega,$ одержимо

$$\frac{dx(t+\omega)}{dt}=Q(t)x(t+\omega)+f(t)+\int_0^{t+\omega}\overline{\Gamma}(t,s)x(s)ds=$$

$$=Q(t)x(t+\omega)+f(t)+\int_{-\omega}^{t}\overline{\Gamma}(t,s_1)x(s_1+\omega)ds_1=$$

$$=Q(t)x(t+\omega)+f(t)+\int_{-\omega}^{0}\overline{\Gamma}(t,s_1)x(s_1+\omega)ds_1+\int_0^{t}\overline{\Gamma}(t,s_1)x(s_1+\omega)ds_1=$$

$$=Q(t)x(t+\omega)+f(t)+\int_0^{\omega}\overline{\Gamma}(t,s)x(s)ds+\int_0^{t}\overline{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds.$$

Отже $x(t)$ та $x(t+\omega)$ є розв'язками інтегро-диференціального рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли

$$Q(t)x(t+\omega)+f(t)+\int_0^{\omega}\overline{\Gamma}(t,s)x(s)ds+\int_0^{t}\overline{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds=$$

$$=Q(t)x(t+\omega)+f(t)+\int_0^{t}\overline{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds.$$

Звідси маємо, що $x(t+\omega)$ є розв'язком рівняння (1) якщо виконується наступна умова

$$\int_0^{\omega}\overline{\Gamma}(t,s)x(s)ds=0. \tag{2}$$

Нехай $B(\omega)=0,$ де $B(t)=\int_0^t Q(\tau)d\tau, B(t+\omega)=B(t)$ і $\det\|E-B(t)\|\neq 0, \forall t\in R,$ якщо $\beta\omega<1,$ де $\beta=\max\limits_{0\le t\le\omega}\|Q(t)\|, E-$ одинична матриця. Зробимо в (1) заміну

$$x=(E-B(t))^{-1}y.$$

Тоді отримаєм систему

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+g(t)+\int_0^t \Gamma(t,s)y(s)ds, \tag{3}$$

де $A(t)=-B(t)Q(t)(E-B(t))^{-1}, \Gamma(t,s)=(E-B(t))\overline{\Gamma}(t,s)(E-B(t))^{-1}, \quad g(t)=(E-B(t))f(t).$

Записавши до (3) еквівалентне інтегральне рівняння і скориставшись умовою $\omega-$ періодичності $y(t)$ маємо

$$\int_0^\omega A(\tau)y(\tau)d\tau=-\int_0^\omega g(\tau)d\tau-\int_0^\omega d\tau\int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s)ds. \tag{4}$$

Проінтегрувавши ліву частину (4) за частинами маємо

$$\int_0^\omega A(\tau)y(\tau)d\tau=\Phi(\omega)y(t)-\int_0^t \Phi(\tau)y(\tau)d\tau+\int_t^\omega \Phi_1(\tau)\dot{y}(\tau)d\tau. \tag{5}$$

де $\Phi(\tau)=\int_0^t A(\tau)d\tau, \Phi_1(t)=\int_t^\omega A(\tau)d\tau, \dot{y}(t)\equiv\dfrac{dy(t)}{dt}.$

Підставляючи (5) в (4) і враховуючи (3) отримаємо наступне рівняння

$$y(t)=\int_0^\omega K(t,\tau)(A(\tau)y(\tau)+g(\tau))d\tau+\int_0^\omega K(t,\tau)d\tau\int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s)ds-$$

$$-\int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)g(\tau)d\tau-\int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau\int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s)ds, \tag{6}$$

де $K(t,\tau)=\begin{cases}\Phi^{-1}(\omega)\Phi(\tau), & при \quad 0\le\tau\le t\le\omega,\\ \Phi^{-1}(\omega)\Phi_1(\tau), & при \quad 0\le t\le\tau\le\omega.\end{cases}$

Позначимо

$$\alpha=\max_t\|A(t)\|, j=\|\Phi^{-1}(\omega)\|, \max_{s,t}\|\Gamma(t,s)\|=\Gamma,$$

$$\|y\|=\max_t\|y(t)\|, q=j\omega^2\left(\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha\omega\Gamma}{3}+\frac{\Gamma}{2}\right).$$

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови*

1) $q<1,$ (7)

2) $\int_0^\omega \overline{\Gamma}(t,s)(E-B(t))^{-1}y(s)ds=0,$ (8)

Тоді система (3) має єдиний $\omega-$ періодичний розв'язок.

Доведення. Рівняння (6) одержано з умови періодичності рівняння (3). Тому, якщо рівняння (6) буде мати єдиний розв'язок, то цей розв'язок буде періодичним. Запишемо (6) у вигляді $y=Ry,$ де $R-$ інтегральний оператор в (6). Тоді

$$Ry(t)-Rz(t)=\int_0^\omega K(t,\tau)A(\tau)(y(\tau)-z(\tau))d\tau+\int_0^\omega K(t,\tau)d\tau\int_0^\tau \Gamma(\tau,s)(y(s)-$$

$$-z(s))ds-\int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau\int_0^\tau \Gamma(\tau,s)(y(s)-z(s))ds.$$

Скориставшись останньою рівністю оцінимо норму

$$\|Ry-Rz\|\le(\alpha\max_{t\in[0;\omega]}\int_0^\omega\|K(t,\tau)\|d\tau+\Gamma\max_{t\in[0;\omega]}\int_0^\omega\tau\|K(t,\tau)\|d\tau+\frac{j\omega^2\Gamma}{2})\max_t\|y(t)-z(t)\|.$$

Оцінимо такі інтеграли

$$\max_{t\in[0;\omega]}\int_0^\omega\|K(t,\tau)\|d\tau=\max_{t\in[0;\omega]}(\int_0^t\|K(t,\tau)\|d\tau+\int_t^\omega\|K(t,\tau)\|d\tau)\le$$

$$\le j\max_{t\in[0;\omega]}(\int_0^t\|\Phi(\tau)\|d\tau+\int_t^\omega\|\Phi_1(\tau)\|d\tau)\le j\alpha\max_{t\in[0;\omega]}(t^2+\frac{\omega^2}{2}-t\omega)=\frac{j\alpha\omega^2}{2},$$

$$\max_{t\in[0;\omega]}\int_0^\omega\tau\|K(t,\tau)\|d\tau=\max_{t\in[0;\omega]}(\int_0^t\tau\|K(t,\tau)\|d\tau+\int_t^\omega\tau\|K(t,\tau)\|d\tau)\le$$

$$\le j\alpha\max_{t\in[0;\omega]}(\frac{2t^3}{3}+\frac{\omega^3}{6}-\frac{\omega t^2}{2})=\frac{j\alpha\omega^3}{3}.$$

Використовуючи попередні оцінки маємо

$$\|Ry-Rz\|\le q\|y-z\|. \tag{9}$$

З (7), (9), умови існування періодичного розв'язку (8) та принципу стистнутих відображень слідує існування єдиного розв'язку рівняння (6).

Побудова періодичного розв'язку системи з параметром. Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівняньз параметром

$$\frac{dy}{dt}=\lambda A(t)y+\lambda\int_0^\tau\Gamma(t,s)y(s,\lambda)ds+g(t). \tag{10}$$

Інтегральне рівняння еквівалентне (10) має вигляд

$$y(t,\lambda)=y(0,\lambda)+\lambda\int_0^t A(\tau)y(\tau,\lambda)d\tau+\int_0^t g(\tau)d\tau+\lambda\int_0^t d\tau\int_0^\tau\Gamma(\tau,s)y(s,\lambda)ds. \tag{11}$$

Підставляючи в (11) $t=\omega$ і із $\omega-$ періодичності функції $y(t,\lambda)$ маємо

$$\lambda\int_0^\omega A(\tau)y(\tau,\lambda)d\tau=-\int_0^\omega g(\tau)d\tau-\lambda\int_0^\omega d\tau\int_0^\tau\Gamma(\tau,s)y(s,\lambda)ds. \tag{12}$$

Підставивши (5) в (12) та спростивши одержимо

$$y(t,\lambda)=\int_0^\omega K(t,\tau)(\lambda A(\tau)y(\tau,\lambda)+g(\tau))d\tau+\lambda\int_0^\omega K(t,\tau)d\tau\int_0^\tau\Gamma(\tau,s)y(s,\lambda)ds-$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^\omega\Phi^{-1}(\omega)g(\tau)d\tau-\int_0^\omega\Phi^{-1}(\omega)d\tau\int_0^\tau\Gamma(\tau,s)y(s,\lambda)ds. \tag{13}$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (13) у вигляді

$$y(t,\lambda)=\frac{1}{\lambda}y_{-1}(t)+\sum_{k=0}^\infty\lambda^k y_k(t). \tag{14}$$

Застосовуючи до рівняння (13) метод малого параметра, одержимо

$$y_{-1}(t)=-\int_0^\omega\Phi^{-1}(\omega)g(\tau)d\tau-\Phi^{-1}(\omega)\int_0^\omega d\tau\int_0^\tau\Gamma(\tau,s)y_{-1}(s)ds, \tag{15}$$

$$y_0(t)=\int_0^{\omega}K(t,\tau)(A(\tau)y_{-1}+g(\tau))d\tau+\int_0^{\omega}K(t,\tau)d\tau\int_0^{\tau}\Gamma(\tau,s)y_{-1}(s)ds-$$

$$-\int_0^{\omega}\Phi^{-1}(\omega)d\tau\int_0^{\tau}\Gamma(\tau,s)y_0ds, \qquad (16)$$

$$y_k(t)=\int_0^{\omega}K(t,\tau)A(\tau)y_{k-1}(\tau)d\tau+\int_0^{\omega}K(t,\tau)d\tau\int_0^{\tau}\Gamma(\tau,s)y_{k-1}(s)ds-$$

$$-\int_0^{\omega}\Phi^{-1}(\omega)d\tau\int_0^{\tau}y_k(s)ds, k=1,2,\dots \qquad (17)$$

Скориставшись раніше приведеними оцінками інтегралів оцінемо формулу (17)

$$\|y_k\|\le\overline{q}\|y_{k-1}\|, \qquad (18)$$

де $\overline{q}=\dfrac{q-\dfrac{j\Gamma\omega^2}{2}}{1-\dfrac{j\Gamma\omega^2}{2}}$.

З (17) маємо

$$\|y_k\|\le\overline{q}_1^k\|y_0\|, k=1,2\dots \qquad (19)$$

Ряд (14) буде збіжним, коли

$$0<|\lambda|<\frac{1}{\overline{q}}. \qquad (20)$$

Врахувавши (7), маємо $\dfrac{1}{q}>1$. Отже $\lambda=1$ задовольняє нерівність (20). Поклавши $\lambda=1$ в (14), отримаємо збіжний ряд

$$y(t)=y(t,1)=y_{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}y_k(t), \qquad (21)$$

де $y_{-1}(t), y_k(t)(k=1,2\dots)-\omega-$ періодичні функції. Знайдемо оцінку збіжності ряду (21) і точного розв'язку рівняння (3).

$$\|y(t)-\overline{y}_m(t)\|\le\frac{\overline{q}^{m+1}\|y_0\|}{1-\overline{q}},$$

$$\|y(t)\|\le\|y_{-1}\|+\frac{\|y_0\|}{1-\overline{q}},$$

де $\overline{y}_m(t)=y_{-1}+\sum_{k=0}^{m}y_k(t).$ Тоді для рівняння (1) має місце оцінка

$$\|x(t)\|\le\frac{1}{(1-\beta\omega)}(\|y_{-1}\|+\frac{\|y_0\|}{1-\overline{q}}), \qquad (22)$$

$$\|x-x_m\|\le\frac{\overline{q}^{m+1}\|y_0\|}{(1-\overline{q})(1-\beta\omega)}.$$

Вірною є теорема.

Теорема 2. *Нехай виконується умова (2) існування періодичного розв'язку системи (1) і неперервність (7). Тоді* $\omega-$ *періодичний розв'язок системи (1) має вигляд*

$$x = (E - B(t))^{-1} y, \tag{23}$$

де $y(t)$ *визначається за формулами (17), (21) і справедливі оцінки (22). Періодичний розв'язок* $y(t,\lambda)$ *інтегро-диференціального рівняння з параметром (10) при* $\lambda \to 0$ *прямує до періодичного розв'язку відповідного незбуреного диференціального рівняння.*

Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь з параметром іншого вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \lambda A(t)y + \lambda^2 \int_0^\tau \Gamma(t,s)y(s,\lambda)ds + g(t). \tag{24}$$

Записавши до (24) еквівалентне інтегральне рівняння та скориставшись $\omega-$ періодичністю розв'язку рівнянн (24), а потім проінтегрувавши за частинами інтеграли в одержаній рівності маємо

$$y(t,\lambda) = \int_0^\omega K(t,\tau)(\lambda A(\tau)y(\tau,\lambda) + g(\tau))d\tau + \lambda^2 \int_0^\omega K(t,\tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s,\lambda)ds -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)g(\tau)d\tau - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s,\lambda)ds. \tag{25}$$

Розв'язок рівняння (25) будемо шукати у вигляді (14). Підставивши (14) в (25) і застосувавши метод малого параметра отримаємо

$$y_{-1}(t) = -\Phi^{-1}(\omega)\int_0^\omega g(\tau)d\tau, \tag{26}$$

$$y_0(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)A(\tau)y_{-1}(\tau)d\tau + \int_0^\omega K(t,\tau)g(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y_{-1}(s)ds, \tag{27}$$

$$y_k(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)A(\tau)y_{k-1}(\tau)d\tau + \int_0^\omega K(t,\tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y_{k-2}(s)ds -$$

$$-\Phi^{-1}(\omega)\int_0^\omega d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y_{k-1}(s)ds, k = 1,2\ldots \tag{28}$$

Дослідимо на збіжність ряд (14), де $y_{-1}, y_k, k = 0,1,\ldots$ визначаються за формулами (26) – (28). Оцінюючи рівність (28) прийдемо до такої рекурентної нерівності

$$\|y_k\| \le q_1\|y_{k-1}\| + q_2\|y_{k-2}\|, \tag{29}$$

де $q_1 = \frac{\alpha^2 j\omega^2}{2} + \frac{j\Gamma\omega^2}{2}, q_2 = \frac{\Gamma j\alpha\omega^3}{3}$. Використовуючи (29) можна показати, що досліджуваний ряд буде збіжний, при виконанні наступної нерівності

$$|\lambda|q_1 + |\lambda|^2 q_2 < 1.$$

Звідси $0 < |\lambda| < [\frac{-q_1 + \sqrt{q_1 + 4q_2}}{2q_2}] = \lambda_0 > 1.$ Покладемо в (14) $\lambda = 1$, отримаємо $\omega-$ періодичний розв'язок (21) системи (3). З (29) справедлива нерівність

$$\|y_{k+1}\| \le a_1\mu_1^k + a_2\mu_2^k, \tag{30}$$

де $\mu_{1,2} = \frac{q_1}{2} \pm \sqrt{\frac{q_1}{4} + q_2}, a_1 = \frac{\|y_{-1}\|\mu_2 - \|y_0\|}{\mu_2 - \mu_1}, a_2 = \frac{\|y_{-1}\|\mu_1 - \|y_0\|}{\mu_1 - \mu_2}.$

З нерівності (30) знайдемо оцінку швидкості збіжності ряду (21) 1 точного розв'язку рівняння (3):

$$\|y - \bar{y}_m(t)\| \le \frac{a_1\mu_1^m}{1-\mu_1} + \frac{a_2\mu_2^m}{1-\mu_2}, \|y\| \le \|y_{-1}\| + \|y_0\| + \frac{a_1}{1-\mu_1} + \frac{a_2}{1-\mu_2}. \tag{31}$$

Тоді оцінка для рівняння (1) буде така:

$$\|x\| \le \frac{1}{1-\beta\omega}(\|y_{-1}\| + \|y_0\| + \frac{a_1}{1-\mu_1} + \frac{a_2}{1-\mu_2}),$$

$$\|x - \bar{x}_m\| \le \frac{1}{1-\beta\omega}(\frac{a_1\mu_1^m}{1-\mu_1} + \frac{a_2\mu_2^m}{1-\mu_2}). \tag{32}$$

Вірною є теорема.

Теорема 3.

Нехай виконується умова (2) існування періодичного розв'язку системи (1) і нерівність (7). Тоді $\omega-$ *періодичний розв'язок системи (1) має вид (23) та (21), де* $y_k(t), k = -1,0,1,\ldots$ *визначаються за формулами (26) – (28). Оцінки швидкості збіжності і точного розв'язку системи (1) має вид (32).*

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М. Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях //Диференц. уравнения. – 1991. - № 9. – С. 1516 – 1521.
2. Самойленко А.М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем дифференциальных уравнений I. II //Укр. мат. журн. – 1965. – 17, № 4. – С. 82 – 93.
3. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. 270 с.
4. Лаптинский В.Н. К вопросу о построении периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1983. – 19, № 8. – С. 1335 – 1343.
5. Самойленко А.М., Лаптинский В.Н.,Кенжебаев К.К. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач. – Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – 220 с.
6. Завізіон Г.В. Періодичні розв'язки системи інтегро-диференціальних рівнянь // Наукові вісті. – 2005. - № 5. – С. 143 – 146.
7. Шкиль Н.И., Зивизион Г.В., Самойленко М.В. Периодические решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Нелінійні коливання. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 553 – 573.