УДК 519.21

МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Ю.И. Волков

Пропонуються методи побудови з натуральною параметризацією багатовимірних розподілів степеневих рядів.

In this article the methods of construction with natural parametrization of multivariate distributions of power series are proposed.

В одномерном случае понятие распределения степенных рядов появилось в работе [1], в многомерном – [2, 4, 6]. Позже этим распределениям было посвящено много других работ, см., например, [3, 5].

Пусть $k=(k_1,...,k_m)$ мультииндекс с неотрицательными целочисельными координатами и пусть ряд

$$\omega(y_1,...,y_m)=\sum_{k_1\ge 0,...,k_m\ge 0} a_{k_1}...a_{k_m}y_1^{k_1}...y_m^{k_m},$$

$a_{k_1}\ge 0,\dots,a_{k_m}\ge 0$, сходится в полицилиндре

$$Y:=\{y_1\mid 0\le y_1<R\}\times\cdots\times\{y_m\mid 0\le y_m<R\}.$$

Распределение случайного вектора $\xi=\{\xi_1,...,\xi_m\}$ *с вероятностями координат*

$$\mathrm{P}\{\xi_1=k_1,....,\xi_m=k_m\}=\frac{a_{k_1}\cdots a_{k_m}y_1^{k_1}...y_m^{k_m}}{\omega(y_1,...,y_m)},k_1\ge 0,...,k_m\ge 0$$

называется распределением степенного ряда (РСР) функции ω.

Производящая функция:

$$P(z)=\sum_k\frac{(z_1y_1)^{k_1}...(z_my_m)^{k_m}}{\omega(y_1,...,y_m)}a_{k_1}\cdots a_{k_m}=\frac{\omega(z_1y_1,...,z_my_m)}{\omega(y_1,...,y_m)}.$$

Отсюда получим математическое ожидние

$$\mathrm{M}\xi=(\mathrm{M}\xi_1,...,\mathrm{M}\xi_m)=\left(y_1\frac{\partial\log\omega}{\partial y_1},...,y_m\frac{\partial\log\omega}{\partial y_m}\right)=\left(\frac{\partial\log\omega}{\partial\log y_1},...,\frac{\partial\log\omega}{\partial\log y_m}\right)=\frac{\partial\log\omega}{\partial\log y}$$

и ковариационную матрицу $\mathrm{D}\xi=\dfrac{d^2\log\omega}{(d\log y)^2}$ с элементами

$$D_{ij}=y_iy_j\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y_i\partial y_j}\frac{1}{\omega}-\frac{\partial\omega}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y_i}\cdot\frac{1}{\omega^2}\right)+\delta_{ij}y_i\frac{\partial\omega}{\partial y_j}\cdot\frac{1}{\omega}.$$

Если ввести новую параметризацию (ее будем называть *натуральной*) $x = \dfrac{\partial \log \omega}{\partial \log y}$, то-есть,

$$x_1 = \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y_1}, \ldots, x_m = \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y_m}, \tag{1}$$

то $D\xi = \widetilde{y}\,\dfrac{dx}{dy}$, где

$$\widetilde{y} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_m \end{pmatrix}, \text{ а } \quad \frac{dx}{dy} = \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial y_1 & \cdots & \partial x_m / \partial y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_1 / \partial y_m & \cdots & \partial x_m / \partial y_m \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\dfrac{dx}{dy} = \widetilde{y}^{-1}\,\mathrm{D}\xi$, то эта матрица положительно определенная, следовательно, отображение (1) на выпуклом множестве Y имеет обратное

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_m), \\ y_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_m), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned} \tag{2}$$

После введения новой параметризации матрицу $\mathrm{D}\xi$ будем обозначать через $V(x) = V(x_1, \ldots, x_m), x \in X$, где X образ Y при отображении (1).

Теорема. *Имеет место соотношение:*

$$\frac{\partial P}{\partial x} V(x) - \frac{\partial P}{\partial z} \widetilde{z} + xP = 0, P(1, \ldots, 1, x_1, \ldots, x_m) = 1,$$

$$P = P(z_1, \ldots, z_m, f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_m)),$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial x_m} \right), \frac{\partial P}{\partial z} = \left(\frac{\partial P}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial z_m} \right), \widetilde{z} = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_m \end{pmatrix}.$$

В правильности теоремы можно убедиться непосредственной проверкой.

Дальше для суммы координат m–мерного вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$ будем использовать обозначение $|x| = x_1 + \cdots + x_m$.

Для построения конкретных РСР функций воспользуемся степенными рядами в одномерном случае.

Пусть $\omega(u)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k u^k, 0\le u<R$ и функция $f(x)$ является обратной к функции $x=y\frac{\omega'(y)}{\omega(y)}$.

1). Рассмотрим РСР функции $\omega(y_1,...,y_m)=\omega(y_1+\cdots+y_m)$. В этом случае

$y_1=f(|x|)\frac{x_1}{|x|},...,y_1=f(|x|)\frac{x_m}{|x|}$, а распределение случайного вектора $\xi=(\xi_1,...,\xi_m)$ такое:

$$\mathrm{P}\{\xi_1=k_1,...,\xi_m=k_m\}=$$

$$=\frac{a_{|k|}!}{\omega(f(|x|))k_1!\cdots k_m!}\left(\frac{x_1}{|x|}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{x_m}{|x|}\right)^{k_m}(f(|x|))^{|k|}, k_1\ge 0,...,k_m\ge 0,$$

элементы матрицы $V(x)=\{v_{ij}\}$ находятся при помощи формул

$$v_{ij}=\delta_{ij}x_i-x_ix_j\left(\frac{\omega(u)}{\omega'(u)}\right)'|_{u=f(|x|)}, i,j=1,...,m,$$

$$\det V(x)=x_1\cdots x_m\left(1-|x|\left(\frac{\omega(u)}{\omega'(u)}\right)'|_{u=f(|x|)}\right). \qquad (3)$$

2). Рассмотрим РСР функции $\omega(y_1,...,y_m)=\omega(y_1)\omega(y_1y_2)\cdots\omega(y_1y_2\cdots y_m)$.
Тогда

$$y_i=\frac{f(x_i-x_{i+1})}{f(x_{i-1}-x_i)}, i=1,...,m, x_{m+1}:=0, f(x_0-x_1):=1,$$

ковариационная матрица:

$$V(x_1,...,x_m)=\begin{pmatrix} w_1+\cdots+w_m & w_2+\cdots+w_m & \cdots & w_m \\ w_2+\cdots+w_m & w_2+\cdots+w_m & \cdots & w_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m & w_m & \cdots & w_m \end{pmatrix}, \det V(x)=w_1\cdots w_m,$$

где

$$w_i = w_i(x) = \frac{f(x_i - x_{i+1})}{f'(x_i - x_{i+1})}, i = 1,\ldots,m.$$

Пример 1. $\omega(y) = (1+y)^n, n \in N.$

Имеем $f(x) = \dfrac{x}{n-x}, \dfrac{\omega(y)}{\omega'(y)} = \dfrac{1+y}{n}, \left(\dfrac{\omega(y)}{\omega'(y)}\right)' = \dfrac{1}{n}$, а отсюда для элементов ковариационной матрицы РСР функции $\omega(y_1 + \cdots + y_m)$ получим:

$v_{ij} = \delta_{ij}x_i - x_i x_j n^{-1}, \det V(x) = x_1 \cdots x_m (1 - |x| n^{-1})$.

Если обозначить через $p_1 = x_1/n, \ldots, p_m = x_m/n$, то

$\mathrm{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_m = k_m\} =$

$\dfrac{n!}{k_1! \cdots k_m!(n - |k|)!} p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m} (1 - p_1 - \cdots - p_m)^{n-|k|}$,

т.е., получим полиномиальное распределение.

Пример 2. $\omega(y) = \exp y.$

В этом случае *f(x)=x*, а для элементов ковариационной матрицы РСР функции $\omega(y_1)\omega(y_1y_2)\cdots\omega(y_1y_2\cdots y_m)$ получим $v_{ij} = x_i$, если $i \geq j$ и $v_{ij} = x_j$, если *i<j*, $\det V(x) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\cdots(x_{m-1} - x_m)x_m$.

Для получения других распределений можно воспользоваться примерами из статьи [8].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. 1.Noack A. A class of Random Variables with Discrete Distributions//Ann.Math.Statist.-1950.-№21, P.127-132.
2. Khatry C.G. On certain properties of power-series distributions//Biometrika. -1959.-№46, P.486-490.
3. Johnson L., Kotz S. Developments in Discrete Distributions, 1969-1980//
4. Int.Statist.Rev.-1982.-v.50, №1, P.71-101.
5. Kotz S., Johnson L. Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol.6.-New York, John Wiley and Sons.-1985.
6. Johnson L., Kotz S., Balakrishnan N. Discrete Multivariate Distributions.Wiley.-1997-328p.
7. Evans M., Hastings N., Peacock B. Statistical Distributions. Wiley.-2000.-221p.
8. Волков Ю.І. Розподіли степеневих рядів із заданими коваріаціями.// Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка, серія: фізико-математичні науки, Випуск 43, 2002.- С.16-21.