

УДК 517.9

СУЧАСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

З.Ю. Філер, О.І. Музиченко

Рассмотрены колебания консервативной системы. Предложен метод численного отыскания периода колебаний. Исследуются также колебания в нелинейных системах, рассматривается проблема центра-фокуса, получено численное решение дифференциальных уравнений и построены фазовые траектории. Рассмотрено уравнение Ван дер Поля и методы его исследования.

The vibrations of the conservative system are considered. The method of the numeral searching of period of vibrations is offered. Vibrations are also probed in the nonlinear systems, the problem of center-focus is examined, got numeral decision of differential equalizations and phase trajectories are built. Equalization of Van der Paul and methods of his research is considered.

Вступ. При малих деформаціях (переміщеннях, струмах) часто можна обмежитись розгляданням лінійних членів (за законом Гука чи Ома); тоді можна отримати розв'язок в аналітичній формі. Інколи цього достатньо для якісних висновків про поведінку системи, що вивчається. Але наявність нелінійних членів може приводити до нових *якісних* змін у поведінці системи. Яскравим прикладом цього є маятник. Навіть в ідеалізованій теорії без врахування сил опору, але з врахуванням нелінійності, отримуємо незатухаючі коливання, період яких залежить від амплітуди, тобто від початкового запасу енергії. При достатньо великих значеннях енергії замість коливань маятника отримуємо його обертання з періодично змінною кутовою швидкістю.

Для лінійної системи $\dot{x} = ax + by, \dot{y} = cx + ey$ маємо той чи інший тип особливої точки $O(0;0)$ — вузол, сідло чи центр [8]. Для *центру* повинні виконуватися достатньо жорсткі умови $a+e=0, ae > bc$. При незначних відхиленнях від першої рівності, центр перетворюється у фокус, тобто *якісно* змінюється характер розв'язку: від незатухаючих коливань ми отримуємо наростаючі або затухаючі коливання. Уточнення значень a і e не врятовують ситуацію. Тут нуль у рівності $a+e=0$ повинен бути *цілим* числом, тобто a і e повинні відрізнятися тільки знаком. Для нелінійної системи $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$ проблема центру-фокусу ще ускладнюється. Аналогічні складнощі виникають при вивченні одного рівняння другого порядку з членом $\dot{x} \cdot h(x, y)$. При зміні знаку функції $h(x, y)$ цей член відіграє роль або генератора, або опору нелінійних коливань.

Такі проблеми вивчав А. Пуанкаре, присвятивши їм монографію [8]. Розглядувані ним приклади підібрані так, щоб можна було здійснити вірні якісні висновки про поведінку інтегральних кривих. Відсутність в той час

потужної обчислювальної техніки не дозволило йому розробити ефективні алгоритми вивчення таких систем. Зокрема, він розглядає рівняння

$$\frac{dx}{x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1)} = \frac{dy}{y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1)} \quad (1)$$

Очевидно, що наявність групи $(x^2 + y^2 - 1)$ різко спрощує рівняння, зводячи його до $\frac{dx}{-2xy} = \frac{dy}{2xy}$ при $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Якщо б коефіцієнти при x^2 та y^2 були *різні* зліва і справа, то отримати навіть якісну інформацію про розв'язок було б складніше. Тут точка O є особливою, бо в ній обидва знаменники перетворюються в нуль. Якщо не вдається провести хоча б наближено спрощення системи й встановити поведінку розв'язку в околі особливої точки, нічого не залишається, крім використання чисельних та якісних методів, наприклад, методу ізоклін.

Траєкторія 1 на рис. 1 відповідає малим значенням E енергії математичного маятника; 2 — сепаратрисі при $E=2$. Траєкторія 3 відповідає не коливанням, а нерівномірному обертанню маятника. При малих значеннях енергії ($E=0,005$) період коливань наближається до 2π .

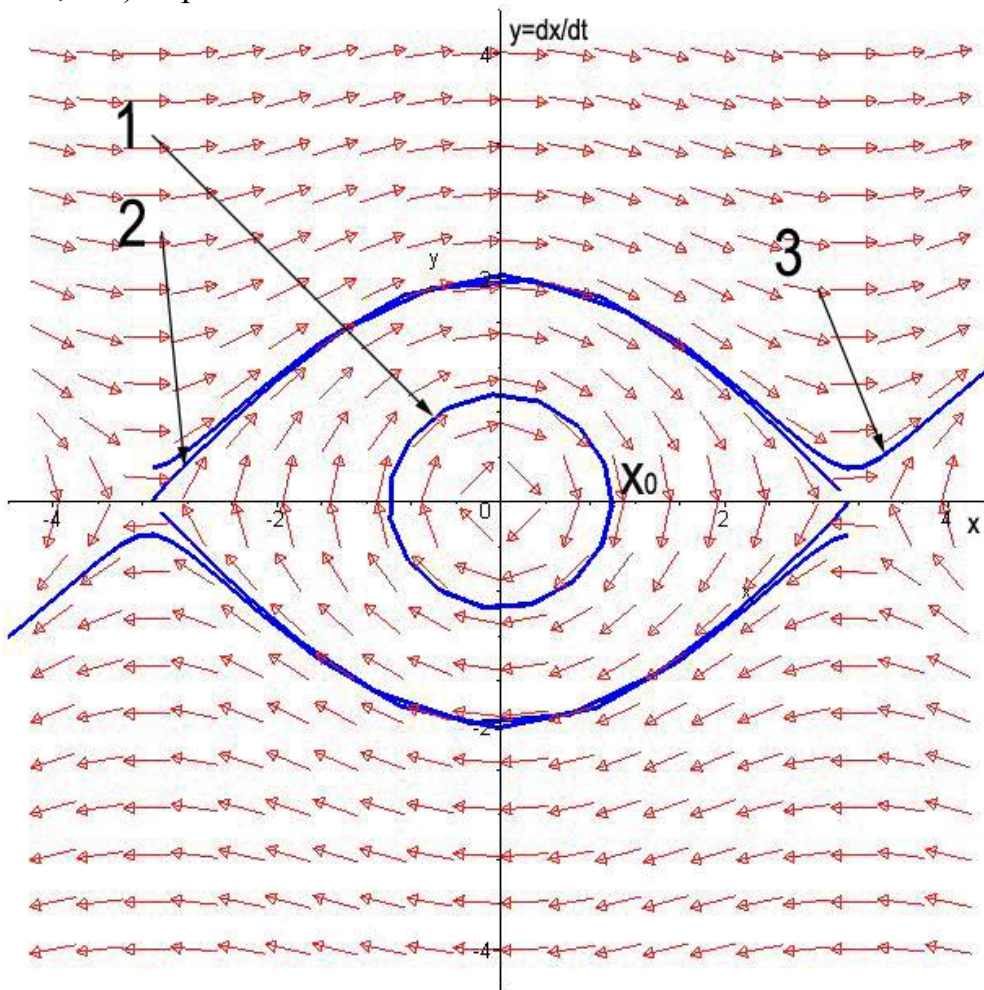


Рис. 1.

1. Консервативна система. Для системи, що описується рівнянням $m\ddot{x} + f(x) = 0$, після множення на \dot{x} та інтегрування, отримуємо закон збереження енергії $0.5m\dot{x}^2 + \Phi(x) = E = const$ звідки маємо $\dot{x}(t) = \pm\sqrt{2/m \cdot (E - \Phi(x))}$.

Тут $\Phi(x) = \int_0^x f(z) dz$ представляє собою потенціальну енергію.

Для знаходження крайніх положень a^- , a^+ тіла, що коливається, при заданій повній енергії $E = 0.5m\dot{x}_0^2 + \Phi(x_0)$, яка визначається початковим станом (x_0, \dot{x}_0) , розв'яжемо рівняння $\Phi(x) = E$. Використовуючи метод дотичних Ньютона, знаходимо a^- , a^+ з допомогою ітерацій: $x_{n+1} = x_n + (E - \Phi(x)) / f(x)$.

Швидше збіжний ітераційний процес отримуємо в результаті заміни цього рівняння задачею Коші $x'(x) = E / f(x)$, $x(z_0) = x_0$, $z_0 = \Phi(x_0) / E$:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n) / f'(x_n) \cdot (1 - \exp(f'(x_n)(\Phi(x_n) - E) / f^2(x_n))).$$

Розв'язок останньої будується з допомогою ітерацій відповідного інтегрального рівняння [10]. Корінь знаходимо як значення $x(0)$. Цей процес поблизу кореня збігається вдвічі швидше, ніж метод Ньютона. Вибираючи початкове наближення x_0 поблизу a^- чи a^+ , знаходимо їх як границі відповідних послідовностей. В якості x_0 можна взяти $\pm A$, де A – амплітуда, що відповідає головному члену Cx^α функції $f(x)$: тоді $\Phi(A) = CA^{\alpha+1} / (\alpha + 1)$, звідки $A = ((\alpha + 1)E / C)^{1/(\alpha+1)}$. В цьому випадку $a^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}^-$, $a_0^- = -A$, $a_0^+ = A$.

Період коливань отримуємо за формулою

$$T = \sqrt{2m} \int_{a^-}^{a^+} \frac{dx}{\sqrt{E - \Phi(x)}}. \quad (2)$$

В роботі [4] для обрахунку невластного інтегралу (2) (підінтегральна функція необмежена в околі кінців відрізка інтегрування), запропонована заміна змінних, після якої інтеграл обчислюється за формулою Сімпсона з допомогою значень підінтегральної функції в 9 точках, включаючи положення рівноваги 0 і крайні точки a^- , a^+ . Навіть для лінійної характеристики $f(x) = Cx$ запропонована формула не є точною, даючи завищене на 0,1% значення періоду. У випадку нелінійної характеристики точність значно нижча.

1.1. Обчислення невластного інтегралу (2). Нами запропоновано інший спосіб обчислення інтеграла (2), що дає точний результат для лінійної характеристики $f(x) = Cx$:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \sqrt{\frac{2}{f'(a^-)}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{f'(a^-)(x-a^-) + f(a^-)}{|f(a^-)|} \right), \\
 I_n &= \sqrt{\frac{2}{f'(a^+)}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{f'(a^+)(x-a^+) + f(a^+)}{|f(a^+)|} \right), \\
 I_k &= \sqrt{\frac{2}{f'(x_{k+1/2})}} \arcsin \frac{f'(x_{k+1/2})(x-x_{k+1/2}) + f(x_{k+1/2})}{\sqrt{f^2(x_{k+1/2}) + 2f'(x_{k+1/2})(E-\Phi(x_{k+1/2}))}} \Bigg|_{x_k}^{x_{k+1}}, \\
 T &= \sqrt{2m} \left(I_0 + I_n + \sum_{k=1}^{n-1} I_k \right),
 \end{aligned} \tag{3}$$

подаючи інтеграл у вигляді суми n-1 інтеграла I_k по відрізках $]x_k, x_{k+1}]$ для k від 1 до n-1, і інтегралів I_0 і I_n по відрізках $]a^-, x_1]$ і $]x_n, a^+[$. Особливі точки виділені в першому і останньому відрізках, інші доданки не містять особливих точок і їх можна обчислювати за будь-якими квадратурними формулами.

Через те, що $E - \Phi(x)$ у крайніх точках a^-, a^+ обертається в 0, то використовуючи розвинення в ряд Тейлора в їх околі до $(x-a)^2$ включно, отримаємо

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \sqrt{\frac{2}{f'(a^-)}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{f'(a^-)(x-a^-) + f(a^-)}{|f(a^-)|} \right), \\
 I_n &= \sqrt{\frac{2}{f'(a^+)}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{f'(a^+)(x-a^+) + f(a^+)}{|f(a^+)|} \right).
 \end{aligned} \tag{4}$$

В разі непарності функції $f(x)$ $I_0 = I_n$. Весь інтервал (a^-, a^+) можна пройти однаковими кроками довжиною h , замінюючи в усіх частинних інтегралах вираз $E - \Phi(x)$ за формулою Тейлора в точках $x_{k+1/2}$. Тоді алгоритм спроститься, не втрачаючи точності. Тут k буде змінюватися від 0 до n-1. Інтеграл на проміжку $[x_1; x_n]$ можна знаходити за допомогою класичної формули чисельних квадратур, наприклад, за формулою Сімпсона. Але можна знаходити цей інтеграл і як суму інтегралів по проміжках $[x_k; x_{k+1}]$, кожний з яких знаходиться аналогічно I_0 і I_n , тобто замінюючи $\Phi(x)$ за формулою Тейлора другого степеня в околі точки $x_{k+1/2}$ до $(x-x_{k+1/2})^2$ включно, маємо

$$I_k = \sqrt{\frac{2}{f'(x_{k+1/2})}} \arcsin \frac{f'(x_{k+1/2})(x - x_{k+1/2}) + f(x_{k+1/2})}{\sqrt{f^2(x_{k+1/2}) + 2f'(x_{k+1/2})(E - \Phi(x_{k+1/2}))}} \Big|_{x_k}^{x_{k+1}}. \quad (5)$$

Тоді

$$T = \sqrt{2m} \left(I_0 + I_n + \sum_{k=1}^{n-1} I_k \right). \quad (6)$$

Формула (5) спрощується для рівновіддалених точок x_k і симетричної характеристики $f(x)$. При достатній кількості точок n ділення відрізка $[a^-; a^+]$ можна отримати високу точність обчислень періоду T .

Використовуючи теорему Лагранжа, можна отримати оцінку похибки ΔI_k обчислень інтеграла (5):

$$\Delta I_k \approx -f''(x_{k+1/2}) h^4 \left(E - \Phi(x_{k+1/2}) \right)^{-3/2}, h = x_{k+1} - x_k.$$

Аналогічно знаходимо

$$\Delta I_0 \approx \frac{-f''(a^-) h_0^{5/2} |f(a^-)|^{-3/2}}{30}, \Delta I_n \approx \frac{-f''(a^+) h_n^{5/2} |f(a^+)|^{-3/2}}{30},$$

$$h_0 = x_1 - a^-, h_n = a^+ - x_n.$$

Це дозволяє оцінити похибку обчислень періоду

$$\Delta T = \sqrt{2m} \left(\Delta I_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta I_k + \Delta I_n \right).$$

Величина ΔT може бути взята у ролі поправки – уточнення величини періоду.

Формула (5) точна для кусково-лінійної характеристики $f(x)$, якщо x_k – абсциси її точок "переключення" (зламу). У реальних конструкціях вібротомашин нелінійна пружна характеристика й створюється за допомогою кусково-лінійних пружних елементів.

На основі вказаних залежностей створено програму в математичному пакеті Maple чисельного відшукування періоду коливань консервативної системи при заданих енергії E і пружній характеристиці $f(x)$, яка використовує аналітичні вирази для $\Phi(x), f(x), f'(x)$. Результатом її роботи є амплітуди a^-, a^+ і період коливань T (рис. 2).

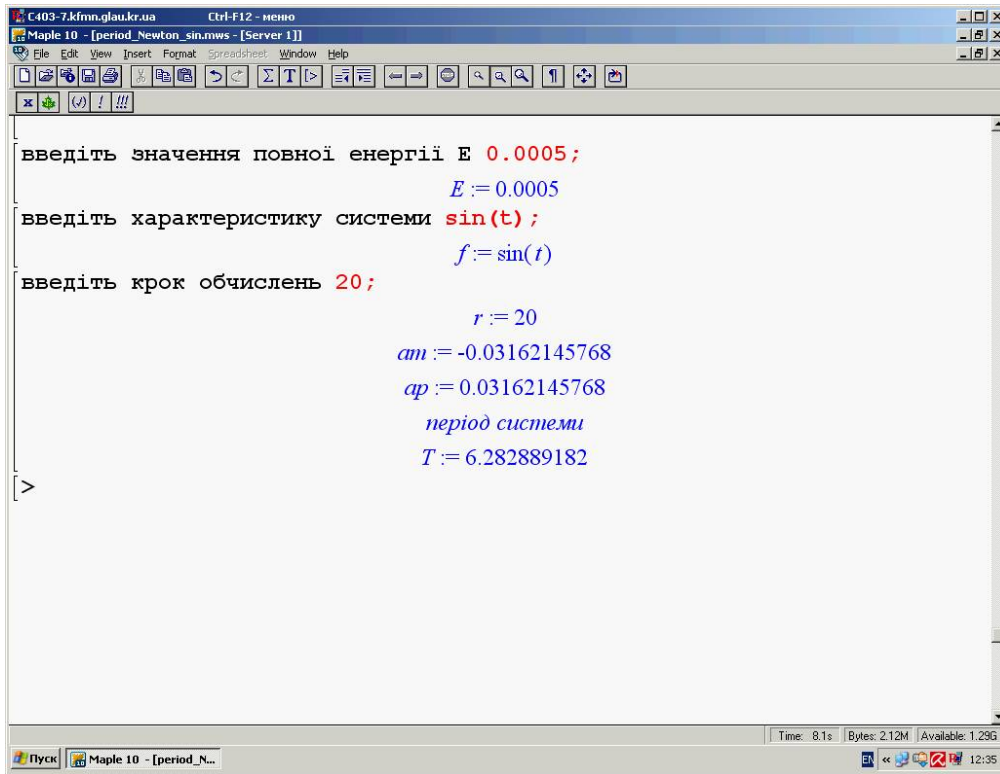


Рис. 2.

2. Коливання нелінійної неконсервативної системи. Вивчення коливань у нелінійних системах триває вже більше 200 років. Праці П. С. Лапласа, А. Пуанкаре, О.М. Ляпунова, М.М. Крилова та М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, інших учнів М.М. Боголюбова та його наукових “онуків”, створили низку якісних та кількісних методів. Більшість з них були розраховані на “ручні” викладки. Але, вже майже 60 років існує ЕОМ, а в останні десятиріччя їх можливості дозволяють додати до потужних якісних методів чисельні розрахунки, які полегшують та прискорюють висновки про поведінку системи не тільки в режимі усталених коливань, а й у перехідних процесах.

2.1. Проблема центру – фокусу. Як ми вже писали, для лінійної системи з двома невідомими $\dot{x} = ax + by, \dot{y} = cx + ey$ характеристичне рівняння (ХР):

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & e-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ є квадратним; для комплексних коренів (при } D = (a-e)^2 + 4bc < 0 \text{ й}$$

$a+e \neq 0$) єдина точка спокою $O(0;0)$ буде *фокусом*. Він буде *стійким* при $a+e < 0$ й *нестійким* при $a+e > 0$. При $a+e = 0$ та $ae - bc < 0$ корені $\lambda_{1,2}$ будуть дійсними різних знаків, а тому т. О буде *сідлом*. При $ae - bc > 0$ корені будуть уявними комплексно спряженими, а точка О буде *центром*. Фазові траєкторії будуть концентричними *еліпсами*. У випадку фокусу вони будуть *спіралями*, які *намотуються* на т. О у стійкому випадку й *змотуються* з неї у нестійкому.

Для нелінійної системи $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$ відповідною системою першого наближення буде система з $a = \frac{\partial P}{\partial x}, b = \frac{\partial P}{\partial y}, c = \frac{\partial Q}{\partial x}, e = \frac{\partial Q}{\partial y}$ в точці О.

Якщо $a+e \neq 0$, то тип особливої точки (фокус при $D < 0$ й сідло чи вузол при $D > 0$) зберігається. Для $D < 0$ й $ae - bc > 0$ відповідна лінійна система має центр, нелінійна система може мати в т. О фокус. Як відрізнити ці типи точок для такої нелінійної системи? У цьому й полягає *проблема центру – фокусу*.

Ця система еквівалентна диференціальному рівнянню (ДР) першого порядку $dx/P(x;y)=dy/Q(x;y)$, для розв'язків якого t відіграє роль параметру. Особлива точка рівняння, коли $P(x;y)=0$, $Q(x;y)=0$, є стаціонарною точкою системи, для якої проблема центру - фокусу зводиться до встановлення типу фазових траєкторій в малому околі точки О.

2.2. Граничні цикли. Диференціальне рівняння [8]:

$$\frac{dx}{x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1)} = \frac{dy}{y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1)} \quad (7)$$

еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = x(r^2 - 1) - y(r^2 + 1), \quad \frac{dy}{dt} = y(r^2 - 1) + x(r^2 + 1), \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (8)$$

2.3. Перехід до нових змінних. Помножимо перше рівняння на x , а друге – на y та додамо їх і отримаємо:

$$x \cdot x' + y \cdot y' = (r^2 - 1)r^2 \Rightarrow (r^2)' = 2r^2(r^2 - 1) \quad (9)$$

Помножимо перше рівняння на y , а друге – на x та віднімемо їх і отримаємо:

$$x \cdot y' - y \cdot x' = (r^2 + 1)r^2 \Rightarrow \arctg(y/x)' = \varphi' = r^2 + 1 \Rightarrow \omega(t) = r^2 + 1 \quad (10)$$

2.3.1. Аналіз рівнянь (9) і (10). При $r > 1$ похідна від $r^2 > 0 \Rightarrow r^2$ зростає; при $0 < r^2 < 1$ похідна від $r^2 < 0 \Rightarrow r^2$ спадає. Точка спокою О ($r=0$) є стійким фокусом; фазові траєкторії – спіралі, які накручуються на точку О. Коло $r=1$ є нестійким **граничним циклом**, фазові траєкторії – спіралі, які змотуються з нього **проти** годинникової стрілки.

Краще уявлення про ситуацію ми отримаємо, зробивши заміну знаку часу t у рівняннях (8). Це дасть зміну знаку в рівняннях (9) і (10), що приведе до протилежних висновків: точка О стане нестійким фокусом, а коло $r=1$ буде стійким граничним циклом. Фазові траєкторії будуть спіралями, які закручуються **за** годинниковою стрілкою, наближаючись до граничного циклу (рис. 3 а і б).

2.3.2. Розв'язання рівнянь (9) і (10). Для спрощення зробимо в рівнянні (9) заміну $a := r^2$. Тоді при $t < 0$ отримаємо рівняння:

$$a' = -2a(a-1) \Rightarrow \frac{da}{a(a-1)} = -2dt \Rightarrow \quad (9a)$$

$$\int_{a_0}^a da \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} \right) = -2t \Rightarrow \ln \frac{a}{|a-1|} = \ln \frac{a_0}{|a_0-1|} + 2t \Rightarrow \frac{a}{|a-1|} = \frac{r_0}{|a_0-1|} e^{2t}.$$

Враховуючи, що коло $r=1$ відділяє спіралі в крузі $r < 1$ від спіралей зовні (при $r > 1$), можемо не використовувати знак модуля.

Звідси отримуємо залежність $a(t) = a_0 / (a_0 - (a_0 - 1)e^{-2t})$. Це дає

$$r(t) = r_0 / (r_0^2 - (r_0^2 - 1)e^{-2t})^{1/2}. \tag{11}$$

Тепер отримаємо $\omega(t)$ з рівняння (10). Враховуючи, що $r(t) \rightarrow 1$, матимемо при великих значеннях t , що $1 < \omega(t) < 2$, тобто період $T \in (\pi; 2\pi)$

Фазові траєкторії дійсно мають вигляд рис. 3а і б.

2.4. Чисельне розв'язання рівнянь (7)

За допомогою програмного забезпечення пакету Maple-9 отримано чисельний розв'язок диференціальних рівнянь (1) й побудовані фазові траєкторії, які зображені на рис. 3а і б, свідчать про вірність уявлень, описаних в пункті 2.2. У часи Пуанкаре здійснити чисельний розв'язок

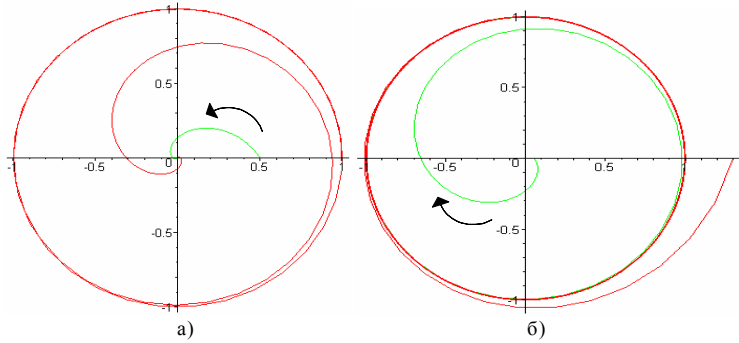


Рис. 2.

нелінійного рівняння можна було тільки вручну з великим кроком. Сьогоднішні ЕОМ дають можливість отримати достатньо точний результат.

На рис. 3а зображені траєкторії рівнянь (8); на рис. 3б — знак t змінено на протилежний.

2.5. Стійкість розв'язків системи (7)

Точки спокою $a=0$ та $a=1$ рівняння (9а) для величини a стійкі чи нестійкі в залежності від знаку похідної $f'(a)$ правої частини цього рівняння:

$f'(a) = -2(2a - 1)$. Графік функції $f'(a)$ зображено на рис. 4. Тоді $f'(0) = +2$ й точка O є нестійкою; $f'(1) = -2$ й граничний цикл $r(t) \equiv 1$ є стійким. Змінна $a=r^2$ відіграє роль *функції Ляпунова*: вона додатна при всіх $r \neq 0$, а її похідна зберігає знак в околі точки спокою. Ці висновки можна зробити, не розв'язуючи систему (8). У роботі Пуанкаре поняття стійкості при $t \rightarrow +\infty$ відсутнє; для нього стійкість означає поведінку при $t \rightarrow \pm\infty$. Можливо, це й завадило йому розробити метод, який зараз називають “метод функцій Ляпунова”.

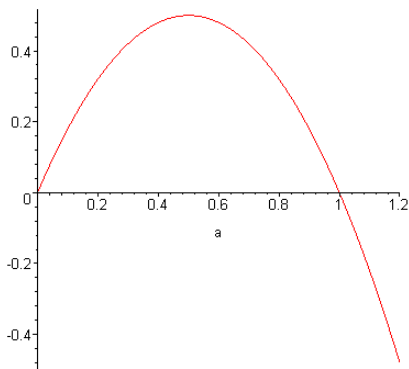


Рис.3

Ця функція в методі Ляпунова взагалі відіграє роль квадрату відстані від точки O . Її зменшення гарантує наближення до точки O — асимптотичну *стійкість*, при зростанні — маємо нестійку точку O .

2.6. Використання комплексної змінної для аналізу системи (7)

Множачи 2-е рівняння на i та додаючи до 1-го, отримаємо рівняння

$$(x + iy)' = (x + iy)((r^2 - 1) + i(r^2 + 1)).$$

Уводячи комплексну функцію $z = x + iy$ та використовуючи «показникову» форму змінної $z = re^{i\varphi}$, уводячи нові дійсні змінні – модуль r та аргумент φ , отримуємо рівняння, скорочуючи на $e^{i\varphi} \neq 0$:

$$r' + ri\varphi' = r((r^2 - 1) + i(r^2 + 1)).$$

Прирівнюючи окремо дійсні та уявні частини зліва й справа, отримуємо рівняння для зміни модуля r та аргументу φ : $r' = r(r^2 - 1)$, $\varphi' = r^2 + 1$.

Ці рівняння співпадають з рівняннями (8) і (9). Інтегруючи перше рівняння, маємо $\frac{r^2}{r^2 - 1} = \frac{r_0^2 e^{2t}}{r_0^2 - 1}$, як це було знайдено раніше. Тепер для частоти $\omega = \varphi'$ отримуємо значення $\omega = r^2 + 1$. Використання знайденої рівності дає

$$r^2 + 1 = 1 / (1 - \frac{r_0^2 e^{2t}}{r_0^2 - 1}) + 1, \text{ звідки}$$

$$\varphi(t) = 2t + 0,5 \ln(1 - \frac{r_0^2 - 1}{r_0^2} e^{-2t}). \quad (12)$$

При великих t маємо $\varphi(t) \approx 2t - \frac{r_0^2 - 1}{2r_0^2} e^{-2t} \approx 2t$. Таким чином, кругова частота «обертання» спіралей буде наближатися до 2, період – до π .

3. Рівняння Ван дер Поля. У 1920 році Б. Ван дер Поль вивів диференціальні рівняння автоколивань в ламповому генераторі [3, С. 93-94]:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \varepsilon \frac{dy}{dt} (1 - y^2). \quad (13)$$

При $\varepsilon > 0$ права частина відіграє роль *генератора* для $|y| < 1$, тому положення спокою є нестійким. Якщо $|y| > 1$, цей член відіграє роль *активного опору* й коливання струму стають обмеженими.

Ідейно математично суть методу Ван дер Поля полягає у використанні методу варіації довільних сталих у виразі загального розв'язку лінійної системи $y'' + y = 0$ (при $\varepsilon = 0$). $y = a \cos t + b \sin t$, де a і b відіграють роль нових *змінних*, що дає для \dot{y} вираз $\dot{y} = -a \sin t + b \cos t$, як при сталих a і b . Тоді

$$\dot{a} \cos t + \dot{b} \sin t = 0. \quad (14)$$

Це дає для другої похідної вираз $\ddot{y} = -a \cos t - b \sin t - \dot{a} \sin t + \dot{b} \cos t$. Підстановка його у рівняння (13) дає, додатково до рівняння (14), ще одне рівняння:

$$-\dot{a} \sin t + \dot{b} \cos t = \varepsilon (-a \sin t + b \cos t) (1 - (a \cos t + b \sin t)^2). \quad (15)$$

Таким чином маємо систему нелінійних ДР (14)–(15), звідки отримуємо *нормальну* систему для a і b :

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon \sin t \cdot f(a, b, t), & f(a, b, t) = (-a \sin t + b \cos t) (1 - (a \cos t + b \sin t)^2) \\ \dot{b} = \varepsilon \cos t \cdot f(a, b, t). \end{cases} \quad (16)$$

При малих значеннях ε праві частини рівнянь (16) малі, й тому a і b змінюються *повільно*. Тому, можемо вважати, що за один період коливання (довжиною 2π) вони зміняться *мало*, тобто протягом періоду їх вважатимемо сталими.

Це дає *середній* темп їх зміни за допомогою інтегрування за період. Як відомо, середнє значення функції $F(x)$ на проміжку $[a, b]$ дорівнює

$\frac{1}{b-a} \int_b^a F(x) dx$. Це дає для *осередненого* значення амплітуд \bar{a} і \bar{b} рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\bar{a}, \bar{b}, t) \sin t dt = P_1(\bar{a}, \bar{b}), \\ \frac{d\bar{b}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\bar{a}, \bar{b}, t) \cos t dt = P_2(\bar{a}, \bar{b}). \end{aligned} \tag{17}$$

Розв'язок рівняння (13) можна також шукати у вигляді $y = a \cdot \cos \varphi$, $\dot{y} = -a \cdot \sin \varphi$, $\varphi = t + \theta$, що дає для другої похідної $\ddot{y} = -\dot{a} \sin \varphi - a \cos \varphi (1 + \dot{\theta})$. Цей підхід є другим варіантом методу варіацій довільних сталих з наступним усередненням по φ за період $[0; 2\pi]$. Таким чином отримаємо систему нелінійних ДР:

$$\begin{cases} -\dot{a} \sin \varphi - a \dot{\theta} \cos \varphi = -\varepsilon a \sin \varphi (1 - a^2 \cos^2 \varphi), \\ \dot{a} \cos \varphi - a \dot{\theta} \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему відносно похідних \dot{a} , $\dot{\theta}$ маємо наступні рівняння:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon a \sin^2 \varphi (1 - a^2 \cos^2 \varphi), \\ \dot{\theta} = \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi (1 - a^2 \cos^2 \varphi). \end{cases}$$

При $0 < \varepsilon \ll 1$, \dot{a} , $\dot{\theta}$ — малі, тому a , θ можна вважати сталими (за один період вони змінюються мало). Тому їх можна *усереднити*:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}} &= \frac{\varepsilon \bar{a}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 - \bar{a}^2 \cos^2 \varphi) d\varphi, \\ \dot{\bar{\theta}} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi (1 - \bar{a}^2 \cos^2 \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Звідки маємо вирази для $\dot{\bar{a}}$, $\dot{\bar{\theta}}$:

$$\dot{\bar{\theta}} = 0, \quad \bar{\theta} = const; \quad \dot{\bar{a}} = \frac{\varepsilon \bar{a}}{8} (4 - \bar{a}^2). \tag{18}$$

Аналізуючи вираз (12), отримаємо різні випадки фазових траєкторій.

При $0 < \bar{a}_1 < 2 \Rightarrow \dot{\bar{a}} > 0$, отже \bar{a} — зростає і спіраль розкручується від точки O до граничного циклу (рис. 4а); якщо $\bar{a}_2 > 2 \Rightarrow \dot{\bar{a}} < 0$, тому \bar{a} — спадає і спіраль наближається до граничного циклу ззовні — стійкий граничний цикл (рис. 4а). При $\varepsilon < 0$, маємо нестійкий граничний цикл (рис. 4б), спіралі відходять від нього.

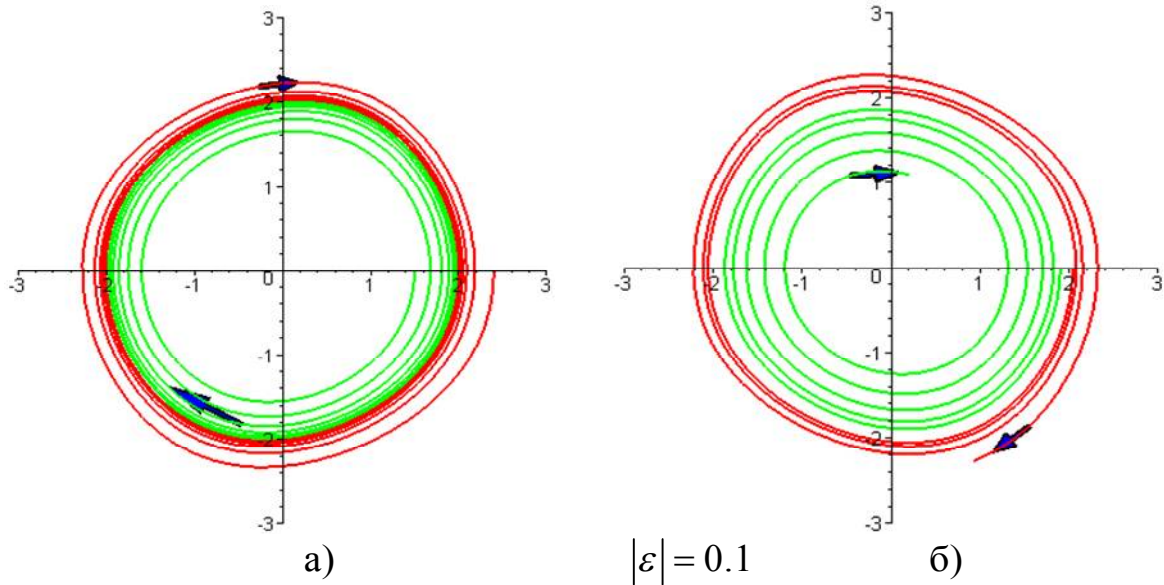


Рис. 4.

$\dot{a} = 0$ буде при $a = 0$ – точка спокою; при $|a| = 2$ маємо стійкий граничний цикл – фазовий портрет (рис. 4б). На рисунку 5а зображено графік функції $y = y(t)$ коливання, які помітно відрізняються від гармонічних, навіть в усталеному режимі (при $|a| = 2$). При малому ε коливання близькі до синусоїдальних, а фазовий портрет в усталеному режимі близький до кола радіуса 2 (рис. 4). При великих ε граничний цикл суттєво відрізняється від кола, але при швидкості $y = 0$ маємо «амплітуду» $a = 2$.

Ван дер Поль зробив аналіз лампового генератора, виходячи з фізичних уявлень. Математичне обґрунтування цього методу дано українськими математиками М.М. Криловим та М.М. Боголюбовим [5]. Вони розробили загальний *метод усереднення* після переходу за допомогою заміни до автономних рівнянь для повільно змінних величин.

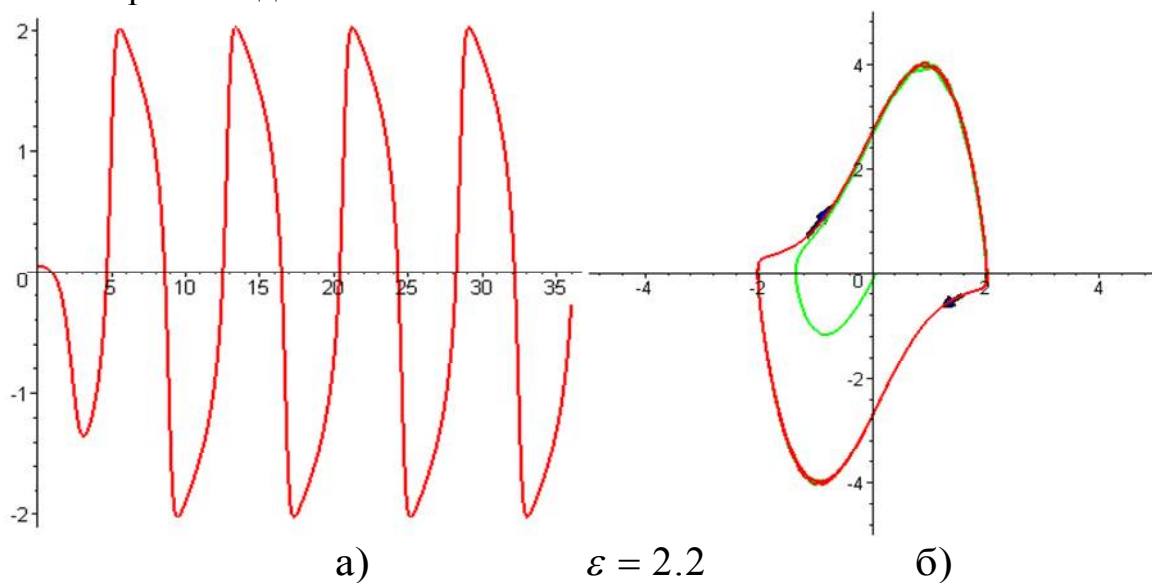


Рис. 5.

Як і метод Ван дер Поля, їх метод усереднення дає не тільки *усталений* режим коливань, а й *перехідний* процес, на відміну від методу малого параметру Пуанкаре. В останньому методі розв'язок відшукується у вигляді степеневого ряду по ε з періодичними коефіцієнтами так, щоби не виникали «резонансні» члени. Це дає рівняння типу (11) для сталих амплітуд \bar{a}, \bar{b} . Метод осереднення отримав розвиток в працях Боголюбова М.М. з учнями та науковими «онуками» [2, 8].

З.Ю. Філеру вдалося здійснити синтез методів Пуанкаре та усереднення [11]. Далі цей підхід було реалізовано й для хвильових рівнянь [9].

Висновки

1. Розглянуто коливання консервативної системи. Запропоновано метод чисельного відшукування амплітуд та періоду коливань. Отримано оцінку похибки обчислень.
2. На основі розроблених алгоритмів складено програму з використанням математичного пакету Maple.
3. Розглянуто проблему центра-фокусу. Наведено приклад дослідження нелінійного диференціального рівняння, запропоновані чисельні методи розв'язання рівняння, побудовані відповідні фазові траєкторії.
4. Розглянуто рівняння Ван дер Поля та методи його дослідження: методи Ван дер Поля та усереднення, розроблений М.М. Криловим та М.М. Боголюбовим

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 321 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1963. — 410 с.
3. Бородин А.И., Бугай А.С. Выдающиеся математики: Биографический словарь — справочник. 2-е изд.—К.: Рад. шк., 1987. — 656 с.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика. — М.: Иностран. лит-ра, 1961. — 777 с.
5. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. — К.: Изд-во АН УССР, 1937.— 365 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971. — 432 с.
7. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. — М.: Наука, 1980. — 270 с.
8. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.–Л.: ГИТ–ТЛ, 1947. — 392 с. (С. 109, С.88)
9. Филер З.Е. Метод итерации отыскания периодических решений волновых уравнений// Прикл. мех., 1985, 21, № 12. — С. 119–183.
10. Филер З.Е. δ -метод теории колебаний в численной форме. — Динамика и прочность машин, 1979. вып. 29. — С. 21–24.
11. Филер З.Е. О синтезе методов малого параметра Пуанкаре и Ван дер Поля в нелинейной теории колебаний// Вибротехника. — Каунас: Минтис, 1984, 3(51).— С. 59–62.