

УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ МНОЖИН СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Г.В. Завізіон, І.Г. Ключник

Доведено існування диференційованих інваріантних торів систем інтегро-диференціальних рівнянь.

Доказано существование дифференцируемых инвариантных торов систем интегро-дифференциальных уравнений.

Prove existence of differentiate invariant tori of the system of integral-differential equation.

В [1-3] досліджуються динамічні системи в $\mathfrak{T}_m \times E^n$ і зроблено огляд результатів в [4]. В [5] доводяться теореми існування інваріантних множин для систем із запізненням, а в [6] доводиться існування липшицевих торів нелінійних систем із запізненням. В даній статті, використовуючи ідеї [7], доводяться теореми існування інваріантних множин системи інтегро-диференціальних рівнянь і вказується алгоритм їх побудови.

Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} = & -b(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s))ds, y(t), \int_0^T f(s, y(t), y(s))ds, \varepsilon)y(t) - \\ & -b_1(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s))ds, y(t), \int_0^T f(s, y(t), y(s))ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, y(t), y(s))ds) + c(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s))ds, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = & a(\varphi(t), y(t), \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

де $y = (y_1 \dots y_n), \varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_m), a, b, a_1, b_1, c, f$ періодичні функції по φ , $\psi = \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s))ds$ з періодом 2π , ці функції визначені для всіх y , $z = \int_0^T f(s, y(t), y(s))ds, \varepsilon$, які належать області

$$\|y\| \leq d, \|z\| \leq d, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \tag{2}$$

T – число. Припустимо, що $c(\varphi, \psi, 0) = 0$, тобто при $\varepsilon = 0$ система (1) має інваріантний тор $y = 0$.

Згідно [7], інваріантну множину системи (1) будемо шукати у вигляді $y = u(\varphi, \varepsilon)$, де $u(\varphi, \varepsilon)$ – неперервна функція, періодична по φ з періодом 2π . Нехай $\varphi_t = \varphi_t(\varphi), \varphi_\tau(\varphi) = \varphi$ розв'язок системи рівнянь $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, u(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)$, де τ, φ – довільні сталі, $u(\varphi, \varepsilon)$ – деяка періодична функція з періодом 2π . Функцію

$u(\varphi, \varepsilon)$ будемо визначати, як інваріантну множину системи (1), якщо для всіх $-\infty < t < \infty$ виконується тотожність

$$\begin{aligned} \frac{du(\varphi_t, \varepsilon)}{dt} = & -b(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, u(\varphi_t, \varepsilon), \int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times u(\varphi_t, \varepsilon) - b_1(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, u(\varphi_t, \varepsilon), \int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, \varepsilon). \end{aligned}$$

Для відшукування інваріантної множини $\mathfrak{Z}(\varepsilon)$ застосуємо ітераційний метод, який дає можливість знаходити $\mathfrak{Z}(\varepsilon)$, як границю послідовності торів $\mathfrak{Z}^0(\varepsilon) = \mathfrak{Z}(0), \mathfrak{Z}^1(\varepsilon) \dots \mathfrak{Z}^i(\varepsilon) \dots$ кожний з яких є інваріантним тором

$$\mathfrak{Z}^{i+1}(\varepsilon) : y = u^{i+1}(\varphi, \varepsilon), i = 0, 1, \dots, \tag{3}$$

відповідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & a(\varphi(t), u^i(\varphi(t), \varepsilon), \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} = & -b(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s)) ds, u^i(\varphi(t), \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi(t), \varepsilon), u^i(\varphi(s), \varepsilon)) ds, \varepsilon) y(t) - \\ & - b_1(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s)) ds, u^i(\varphi(t), \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi(t), \varepsilon), u^i(\varphi(s), \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, u^i(\varphi(t), \varepsilon), u^i(\varphi(s), \varepsilon)) ds) + c(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s)) ds, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4}$$

Можливість знаходити тор $\mathfrak{Z}(\varepsilon)$ таким шляхом обґрунтовує лема 1 з [7]. Згідно цієї леми, якщо функція $a(\varphi, y, \varepsilon), b(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon), b_1(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon), c(\varphi, \psi, \varepsilon)$ є неперервними по φ, ψ, y, z на множині (2), а також $z(t)$ неперервні по t для довільного скінченного відрізка T_1 прямої $-\infty < t < \infty$, то якщо послідовність (3) рівномірно збігається, для довільного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, до граничної функції $u = \lim_{i \rightarrow \infty} u^i(\varphi, \varepsilon)$, то $u(\varphi, \varepsilon)$ означає інваріантний тор $\mathfrak{Z}(\varepsilon)$. Дійсно, так як $y = u^{i+1}(\varphi, \varepsilon)$ інваріантний тор системи (4), то для траєкторій φ_t^i, y_t^i , які лежать на ньому, виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \varphi_t^i = & \varphi + \int_a^t a(\varphi_t^i, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), \varepsilon) dt, \\ u^{i+1}(\varphi_t^i, \varepsilon) = & u^{i+1}(\varphi, \varepsilon) + \int_\tau^t (-b(\varphi_t^i, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^i, \varphi_s) ds, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), u^i(\varphi_s^i, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times u^{i+1}(\varphi_t^i, \varepsilon) - b_1(\varphi_t^i, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^i, \varphi_s^i) ds, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), u^i(\varphi_s^i, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), u^i(\varphi_s^i, \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t^i, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^i, \varphi_s^i) ds) dt. \end{aligned} \tag{5}$$

З співвідношення (5) випливає рівномірна обмеженість і рівностепенна неперервність послідовності $\varphi_t^i (i = 0, 1, \dots)$ для довільного скінченного відрізка T_1 .

Значить існує рівномірно збіжна підпослідовність $\varphi_t^{i_k}$ і позначивши $\varphi_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_t^{i_k} (t \in T_1)$, і перейшовши в (5) при $i = i_k$ до границі, то одержимо, що

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \varphi + \int_{\tau}^t a(\varphi_t, u(\varphi_t, \varepsilon), \varepsilon) dt, \quad (t \in T_1), \\ u(\varphi_t, \varepsilon) &= u(\varphi, \varepsilon) + \int_{\tau}^t (-b(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, u(\varphi_t, \varepsilon), \int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ &\quad \times u(\varphi_t, \varepsilon) - b_1(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, u(\varphi_t, \varepsilon), \int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ &\quad \times (\int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, \varepsilon)) dt, \end{aligned}$$

що достатньо, щоб $y = u(\varphi, \varepsilon)$ визначала інваріантний тор системи (1). Таким чином, питання існування інваріантного тора системи (1) зв'язаний з питанням існування інваріантного тора системи (4). Для цього розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -b(\varphi_t(\varphi), \int_0^T f_1(s, \varphi_t(\varphi), \varphi_s(\varphi)) ds, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), u^i(\varphi_s(\varphi), \varepsilon)) ds, \varepsilon) y(t) - \\ &\quad - b_1(\varphi_t(\varphi), \int_0^T f_1(s, \varphi_t(\varphi), \varphi_s(\varphi)) ds, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), u^i(\varphi_s(\varphi), \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \quad (6) \\ &\quad \times (\int_0^T f(s, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), u^i(\varphi_s(\varphi), \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t(\varphi), \int_0^T f_1(s, \varphi_t(\varphi), \varphi_s(\varphi)) ds, \varepsilon), \end{aligned}$$

де $u^i(\varphi, \varepsilon)$ задана 2π – періодична по φ функція, $\varphi_t(\varphi) = \varphi_t^i(\varphi, \varepsilon) (\varphi_0(\varphi) = \varphi)$ загальний розв'язок першого рівняння (4). Позначимо $G_t^i(\tau, \varphi, \varepsilon)$ функцію Гріна задачі про обмежені розв'язки системи (6), припускаючи, що вона існує. Тоді співвідношення

$$y_t(\varphi, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t^i(\tau, \varphi, \varepsilon) c_1(\varphi_\tau(\varphi), \psi_\tau(\varphi), z_\tau(\varphi), \varepsilon) d\tau,$$

де

$$\begin{aligned} c_1(\varphi_t(\varphi), \psi_t(\varphi), z_t(\varphi), \varepsilon) &= -b_1(\varphi_t(\varphi), \psi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), u^i(\varphi_s, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ &\quad \times (\int_0^T f(s, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), u^i(\varphi_s(\varphi), \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t(\varphi), \psi_t(\varphi), \varepsilon), \end{aligned}$$

визначає сімейство обмежених розв'язків системи (6), яке залежить від φ і ε як від параметрів. Ці розв'язки заповнюють інваріантну множину

$$y = u^{i+1}(\varphi, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi, \varepsilon) c_1(\varphi_\tau(\varphi), \psi_\tau(\varphi), z_\tau(\varphi), \varepsilon) d\tau,$$

яка є інваріантною тороїдальною множиною системи (4).

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= a_0(\varphi(t)) + a_1(\varphi(t)), \\ \frac{dy}{dt} &= -(b_0(\varphi(t), \psi(t)) + b_1^0(\varphi(t), \psi(t)))y(t) + c_0(\varphi(t), \psi(t)), \end{aligned} \quad (7)$$

де $a_0, b_0, b_1^0, c_0 \in C^r(\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m) = C^r(\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m : 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi, 0 \leq \psi_i \leq 2\pi, i = \overline{1, m})$, a_0, b_0 - фіксовані, a_1, b_1^0, c_0 - довільні, але малі в смислі норми $C^r(\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m)$ функції. Вірною є лема, доведення якої аналогічно приведенному в [7].

Лема 1. Припустимо, що система рівнянь (7) така, що знайдуться ціле r і сталі M, α, K , такі, що при всіх $a_1(\varphi), b_1^0(\varphi)$ виконується нерівність $\max\{|a_1|_r, |b_1^0|_r\} \leq M$, де система рівнянь (7) має функцію Гріна про інваріантні тори $G_0(\tau, \varphi)$, яка для кожного $\tau \in (-\infty, +\infty)$ задовольняє умові

$$|G_0(\tau, \varphi, \varepsilon)c_0(\varphi_\tau(\varphi), \psi_\tau(\varphi))|_r \leq K \exp(-\alpha|\tau|)|c_0(\varphi, \psi)|_r. \quad (8)$$

Тоді система рівнянь (7) має інваріантний тор $\mathfrak{S} : u = u(\varphi, \varepsilon)$, для якого вірна оцінка

$$|u(\varphi, \varepsilon)|_r \leq \frac{2K}{\alpha} |c_0(\varphi, \psi)|_r \quad (9)$$

Застосуємо лему до послідовності торів (3). Покладемо $a_0(\varphi) = a(\varphi, 0, 0), b_0(\varphi, \psi) = b(\varphi, \psi, 0, 0, 0), a'(\varphi, y, \varepsilon) = a(\varphi, y, \varepsilon) - a(\varphi, 0, 0), b'(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon) = b(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon) - b(\varphi, \psi, 0, 0, 0)$, і будемо припускати, що $c(\varphi, \psi, \varepsilon), a(\varphi, y, \varepsilon), b(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon), b_1(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon) \in C^r(D)$, для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, де D - область $\|y\| \leq d, \|z\| \leq d, (\varphi, \psi) \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m$. Припустимо також, що вірні нерівності

$$\begin{aligned} \max\{|a'(\varphi, y, \varepsilon)|_r, |b'(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon)|_r, |b_1|_r \cdot PT + |c|_r\} &\leq L_r(d, \varepsilon_0), \\ \frac{4K}{\alpha} M_1 T |b_1|_r &\leq R < 1, \end{aligned} \quad (10)$$

де $L_r(d, \varepsilon_0)$ - додатня монотонно спадна функція одного із своїх аргументів при фіксованому значенні іншого, яка має властивість $L_r(d, \varepsilon_0) \rightarrow 0$ при $d \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0, R < 1; P = \max_t \|f(t, 0, 0)\|, \|f'_y(t, y, y)\| \leq M_1$. Існування послідовності торів (3) встановлює наступна теорема.

Теорема 1. Нехай функції $a_0(\varphi), b_0(\varphi, \psi)$, такі, що система рівнянь (6) задовольняє умовам лемати 1. Тоді можна вказати, таке $\varepsilon^0, 0 < \varepsilon^0 \leq \varepsilon_0$, щоб при $\varepsilon < \varepsilon^0$ послідовність (3) є послідовністю інваріантних торів, кожний з яких належить простору $C^r(\mathfrak{S}_m)$ і виконується нерівність

$$|u^i(\varphi, \varepsilon)|_r \leq \frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)} \quad (11)$$

Доведення. Оскільки $u^0 = 0$, то теорема справедлива при $i = 0$. Припустимо, що вона має місце для $i = k$ і доведемо, що інваріантний тор $\mathfrak{S}^{k+1}(\varepsilon) : y = u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$ існує і задовольняє нерівність (11). Для цього покладемо в (6) $i = k$ і тора $y = u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$ отримаємо систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_t^k}{dt} &= a_0(\varphi_t^k) + a'(\varphi, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= -(b_0(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds) + \\ &+ b'(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon) \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon) ds, \varepsilon))y(t) + \\ &+ c_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} c_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) = \\ = -b_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ \times (\int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, \varepsilon). \end{aligned}$$

В силу того, що функції a', b' задовольняють нерівність (10), а $u^k(\varphi, \varepsilon)$ нерівність (11), то при достатньо малому ε^0 для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon^0$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \max_{\varepsilon} \left\{ \left| a'(\varphi_t^k, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \varepsilon) \right|_r, \left| b'(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \right|_r \right\} \leq \\ \leq L_r \left(\frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)}, \varepsilon_0 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Так як $L_r(0, \varepsilon^0) \rightarrow 0$ при $\varepsilon^0 \rightarrow 0$, то завжди можна вважати ε^0 настільки малим, щоб крім нерівності (13) виконувалися нерівності

$$L_r \left(\frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)}, \varepsilon_0 \right) \leq M, \frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)} \leq d \quad (14)$$

При такому наборі ε^0 , для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon^0$ до системи (12) можна застосовувати лему 1, згідно якої існує тор $\mathfrak{S}^{k+1}(\varepsilon) : y = u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$, для якого вірна оцінка

$$\left| u^{k+1}(\varphi, \varepsilon) \right|_r \leq \frac{2K}{\alpha} |c_1(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon)|_r \leq \frac{2K}{\alpha} (|b_1|_r (2M_1 T |u^k|_r + PT) + |c|_r) \quad (15)$$

Але, згідно (10) і монотонного спадання $L_r(d, \varepsilon_0)$ по змінній d , маємо

$$|b_1|_r PT + |c|_r \leq L_r(0, \varepsilon_0). \quad (16)$$

Тоді з (10), (25), (26) одержимо

$$\begin{aligned} \left| u^{k+1}(\varphi, \varepsilon) \right|_r &\leq \frac{2K}{\alpha} (2|b_1|_r M_1 T |u^k|_r + L_r(0, \varepsilon_0)) \leq \frac{2K}{\alpha} \left(\frac{\alpha \cdot R \cdot 2M_1 T}{4KM_1 T} \times \right. \\ &\times \left. \frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)} + L_r(0, \varepsilon_0) \right) \leq \frac{2KL_r(0, \varepsilon_0)}{\alpha} \left(\frac{R}{1-R} + 1 \right) = \frac{2KL_r(0, \varepsilon_0)}{\alpha(1-R)} \leq d. \end{aligned}$$

Рівності (27), (29), (30) із [5] показують спосіб вибору ε^0 для випадку $r = 0$. Теорема доведена.

Вірною є така допоміжна лема.

Лема 2. *Мають місце нерівності*

$$\|\varphi_t^k - \varphi\| \leq e^{k_1|t|} - 1, \tag{17}$$

$$\left| \varphi_t^k - \varphi_t^{k-1} \right|_0 \leq \frac{\left| \omega^k(\varphi, \varepsilon) \right|_0 (e^{k_1|t|} - 1)}{1 + ld}, \tag{18}$$

де $\omega^k(\varphi, \varepsilon) = u^k(\varphi, \varepsilon) - u^{k-1}(\varphi, \varepsilon)$, $k_1 = l|a|_1(1 + ld)$. Доведення нерівності (17) впливає з наступних нерівностей

$$\begin{aligned} \|\varphi_t^k - \varphi\| &\leq \int_0^{|t|} \|a(\varphi_s^k, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon)\| dt \leq \int_0^{|t|} (\|a(\varphi_s^k, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon)\| + \\ &+ \|a(\varphi, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)\| + \|a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, 0, \varepsilon)\| + \|a(\varphi, 0, \varepsilon)\|) ds \leq \\ &\leq \|a_1\| \left(\int_0^{|t|} \|\varphi_s^k - \varphi\| ds + l \int_0^{|t|} \|u^k(\varphi_s^k, \varepsilon) - u^k(\varphi, \varepsilon)\| ds + l|u^k|_1|t| + |t| \right) \leq k_1|t| + k_1 \int_0^{|t|} \|\varphi_s^k - \varphi\| ds \end{aligned}$$

Застосовуючи до останньої нерівності теорему 1.2 із [8] одержуємо нерівність (17). З (17) випливає справедливність наступної нерівності

$$\int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi\| ds \leq \frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T$$

Застосовавши до нерівностей (36),(37) з [5] теорему 1.2 із [8] впливає виконання нерівності (18).

Доведемо збіжність послідовності інваріантних торів (3). Так як функція $u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$ задає інваріантний тор системи (5) при $i = k$, то вона задовольняє тотожності

$$\begin{aligned} \frac{du^{k+1}(\varphi_t^k, \varepsilon)}{dt} &\equiv \frac{\partial u^{k+1}(\varphi_t^k, \varepsilon)}{\partial \varphi_t^k} \cdot a(\varphi_t^k, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \varepsilon) \equiv \\ &\equiv -b(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) u^{k+1}(\varphi_t^k, \varepsilon) - \\ &- b_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon) \times \\ &\times \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, \varepsilon) \end{aligned} \tag{19}$$

При $t = 0$ нерівність набирає вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} \cdot a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) &\equiv \\ &\equiv -b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) u^{k+1}(\varphi, \varepsilon) - \\ &- b_1(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ &\times \left(\int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds \right) + c(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, \varepsilon), \end{aligned} \tag{20}$$

де $\varphi_0^k(\varphi) = \varphi$.

З (20) випливає тотожність

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} \cdot a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) + \frac{\partial u^k(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} (a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)) \equiv \\ & \equiv -b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon) - \\ & - (b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) - \\ & - b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon) \mu^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds, \varepsilon)) u^k(\varphi, \varepsilon) - \\ & - b_1(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) (\int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds) \\ & + b_1(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), u^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), u^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds) + c(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, \varepsilon) - c(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, \varepsilon). \end{aligned} \quad (21)$$

Тотожність (21) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} \cdot (a(\varphi, 0, 0) + (a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, 0, 0))) + \\ & + (b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, 0, 0, 0) + (b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) - \\ & - b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, 0, 0, 0))) \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon) = c_k(\varphi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} c_k(\varphi, \varepsilon) = & - \frac{\partial u^k(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} \cdot (a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)) - \\ & - b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) - \\ & - b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon) \mu^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds, \varepsilon)) u^k(\varphi, \varepsilon) - \\ & - b_1(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) (\int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds) + \\ & + b_1(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon) \mu^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon) \mu^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds) + c(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, \varepsilon) - c(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, \varepsilon). \end{aligned} \quad (23)$$

З співвідношення (22) випливає, що $y = \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$ є інваріантним тором системи

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &\equiv a(\varphi, 0, 0) + (a(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s) ds, \varepsilon) - a(\varphi, 0, 0)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -(b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, 0, 0, 0) + \end{aligned} \tag{24}$$

$$b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) - b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, 0, 0, 0))y + c(\varphi, \varepsilon)$$

В силу того, що система (24) має вигляд системи (12), то $y = \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$ можна записати через функцію Гріна задачі про інваріантні тори системи (24) у вигляді

$$y = \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0^k(\tau, \varphi) c_k(\varphi_\tau(\varphi), \varepsilon) d\tau,$$

причому для $\varepsilon \leq \varepsilon^0$, в силу нерівності (9), вірною є оцінка

$$|\omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)|_0 \leq \frac{2K}{\alpha} |c_k(\varphi, \varepsilon)|_0.$$

Враховуючи вигляд функції $c_k(\varphi, \varepsilon)$ визначений рівністю (23) маємо оцінку

$$\begin{aligned} |\omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)|_0 &\leq \frac{2K}{\alpha} \{ |u^k|_1 |a|_1 |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + l |c|_1 |f|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds + (l |b|_1 |f|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds + \\ &+ l |b|_1 |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + l^2 |b|_1 |f|_1 (2T |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + |u^k|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds) \cdot |u^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + \\ &+ (l |b|_1 |f|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds + l |b|_1 |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + l^2 |b|_1 |f|_1 (2T |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + |u^k|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds)) \times \\ &\times (2l |f|_1 |u^k|_0 + PT) + (2lT |f|_1 |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + l |f|_1 |u^k|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds) \times \\ &\times (l |b|_1 \int_0^T \|f_1(s, \varphi, \varphi_s^k)\| ds + l |b|_1 |u^k|_0 + l |b|_1 \cdot \int_0^T \|f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))\| ds + \|b_1(\varphi, 0, 0, 0, \varepsilon)\|) \} \end{aligned} \tag{25}$$

Знайдемо наступні оцінки

$$\begin{aligned} \int_0^T \|f_1(s, \varphi, \varphi_s^k)\| ds &\leq \int_0^T (\|f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) - f_1(s, \varphi, \varphi)\| + \|f_1(s, \varphi, \varphi)\|) ds \leq |f|_1 (\int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi\| ds + \\ &+ T) + \int_0^T \|f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))\| ds \leq \int_0^T (\|f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) - f(s, 0, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))\| + \\ &+ \|f(s, 0, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) - f(s, 0, 0)\| + \|f(s, 0, 0)\|) ds \leq 2l |f|_1 |u^k|_0 T + PT \end{aligned} \tag{26}$$

Підставляючи (26) в (25) і використовуюючи лему 2 одержимо

$$\begin{aligned} |\omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)|_0 &\leq \frac{2K}{\alpha} |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 \left\{ dl |a|_1 + \frac{l^2 |c|_1 |f|_1}{1+ld} \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T \right) + \frac{l^2 |b|_1 |f|_1}{1+ld} \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T \right) + \right. \\ &+ l |b|_1 + 2TL^2 |b|_1 |f|_1 + \frac{dl^3 |b|_1 |f|_1}{1+ld} \cdot \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T \right) + (2l |f|_1 d + PT) \cdot \left(\frac{l^2 |b|_1 |f|_1}{1+ld} \cdot \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -T) + l|b_{11}| + 2TL^2|b_{11}| |f|_1 + \frac{dl^3|b_{11}| |f|_1}{1+ld} \cdot \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T \right) + \left(2lT|f|_1 + \frac{l^2|f|_1}{1+ld} \cdot \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T \right) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{l|b_{11}| |f|_1}{k_1} \cdot (e^{k_1 T} - 1) + l|b_{11}| d + l|b_{11}| (2l|f|_1 dT + PT) + |b_{11}| \right) \Bigg\} \quad (27)
 \end{aligned}$$

Враховуючи (10) з нерівності (27) знаходимо

$$\left| \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon) \right|_0 \leq \rho \left| \omega^k(\varphi, \varepsilon) \right|_0 \leq \rho^{k-1} \left| u^1(\varphi, \varepsilon) \right|_0,$$

де ρ — додатня константа, менша одиниці, при малих ε . Остання нерівність доводить збіжність послідовності інваріантних торів (3) в просторі $C^0(\mathfrak{Z}_m)$ і неперервність граничної функції по ε в точці $\varepsilon = 0$.

Поклавши $\lim_{k \rightarrow \infty} u^k(\varphi, \varepsilon) = u(\varphi, \varepsilon)$ і використовуючи лему Арцела методом з [1] можна довести $u(\varphi, \varepsilon) \in C^{r-1}(\mathfrak{Z}_m)$. З леми 1 [7] і збіжності послідовності $u^k(\varphi, \varepsilon)$ в $C^{r-1}(\mathfrak{Z}_m)$ випливає наступна теорема.

Теорема 2. Нехай функції $a(\varphi, y, \varepsilon), b(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon), b_1(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon) \in C^r(D)$ і виконуються нерівності (10), а також для достаньо малих по нормі в $C^r(\mathfrak{Z}_m \times \mathfrak{Z}_m)$ функцій $a_1(\varphi), b_1^0(\varphi, \psi), c_0(\varphi, \psi)$ система рівнянь (7) має функцію Гріна $G_0(\tau, \varphi)$ задачі об інваріантних торах, яка задовольняє нерівність (8). Тоді можна вказати таке $0 < \varepsilon^0 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ система рівнянь (1) має інваріантний тор $\mathfrak{Z}(\varepsilon): y = u(\varphi, \varepsilon), u(\varphi, \varepsilon) \in C^{r-1}(\mathfrak{Z}_m)$, для якого $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| u(\varphi, \varepsilon) \right|_{r-1} = 0$.

Таким чином, вказані умови існування інваріантних тороїдальних множин системи інтегро- диференціальних рівнянь і пропонується алгоритм їх побудови.

БІБЛОГРАФІЯ

1. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. - М.: Наука, 1987. - 302 с.
2. Самойленко А.М. О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. - 1994. - 46, №12. - С. 1665 - 1699.
3. Самойленко А.М. К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе // Укр. мат. журн. - 2001. - 53, №4. - С. 513 - 521.
4. Самойленко А.М. Динамические системы в $\mathfrak{Z}_m \times E^n$ // Укр. мат. журн. - 1991. - 43, №10. - С. 1283 - 1297.
5. Мартынюк Д.И., Самойленко А.М. Существование инвариантных многообразий систем с запаздыванием // Укр. мат. журн. - 1974. - 26, №5. - С. 611 - 620.
6. Цидыло К.В. Колебания нелинейных систем с запаздыванием: Автореф. дис. ... кан. фіз. - мат. наук. - Київ, 1973. - 14 с.
7. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении. Изв. АН СССР. сер. матем., т. 34, №6, 1970. - С. 1219 - 1240.
8. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1976. - 151 с.