УДК 518.3 / 681.142.2

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ КОШИ ПО А-МЕТОДУ

П. Н. Денисенко

Аннотация

В работі побудовано та досліджено алгоритм розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь порядку k виду $D[y] = f(y, y' \dots, y^{(k-1)})$, де $D[y]$ лінійний диференціальний оператор з многочленними коефіцієнтами, на проміжку $[a, b]$. Цей алгоритм композиція методу простої ітерації [1], інтерполювання $U_n[f(y, y' \dots, y^{(k-1)})]$ по вузлам Чебишева [1] та диференціального алгоритму [2] а-методу Дзядика [3]. Результати дослідження доводять: цей алгоритм і реализуюча его APLAN-процедура обчислюють многочлен y_n апроксимацію розв'язку задачі Коші для диференціальних рівнянь досить широкого класу і цей многочлен оптимальний для символьних перетворень в системах комп'ютерної алгебри.

We constructed the algorithm of solving the initial-value problem within the interval $[a, b]$ for the differential equations of order k and of form $D[y] = f(y, y' \dots, y^{(k-1)})$, where $D[y]$ linear differential operator with polynomial coefficients. This algorithm is a composition of the simple iterations method, the Chebyshev nodes interpolation method $U_n[f(y, y' \dots, y^{(k-1)})]$ and the Dzyadyk a-method differential algorithm. The research results prove that this algorithm and the respective procedure in the APLAN programming language compute the polynomial y_n the initial-value problem solution approximation for the wide enough class of differential equations. Also, this polynomial is optimal for symbolic transformations in the computer algebra systems.

Введение

Задача. *Построить алгоритм решения на отрезке $[a, b]$ задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений вида*

$$D[y] = f(y, y', \dots, y^{(k-1)}) \ , \quad D[y] = A \cdot y^{(k)} + \dots + C \cdot y \quad -- \qquad (1)$$

линейный дифференциальный оператор с многочленными коэффициентами,

$$init\_cond(y, d) = \{ \ y(d) = Y_0, \dots, y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1} \ \} \ , \quad d \in [a, b] \ , \qquad (2)$$

в системах компьютерной алгебры (СКА). Решение задачи Коши по этому алгоритму оптимально для символьных преобразований в СКА.

Возможности СКА. СКА вычисляют аналитическое решение обыкновенных дифференциальных уравнений в следующем виде:
— композицию специальных математических функций (существует не часто),
— частную сумму ряда Тейлора решения задачи Коши порядка n. Обычно $n < 10$. Этот многочлен, как правило, не удовлетворяет основной критерий эффективности математических моделей — **точность**.

Актуальность задачи. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений являются классическим аппаратом математического моделирования [1]. Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab и другие компьютерные системы стали средой математического моделирования. Они символьно преобразуют функции и уравнения. Дифференциальные уравнения (1) применяются в математических моделях более часто, чем уравнения других типов.

1 Алгоритм 1

Вход: Задача Коши $task$ вида (1), (2), отрезок аппроксимации $[a, b]$ и порядок n искомого многочлена.

Выход: Многочлен

$$y_n = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n = algorithm(task\ ,\ [a,b]\ ,\ n)\ . \quad (3)$$

Этот многочлен аппроксимирует единственное точное решение y задачи Коши (1), (2) оптимально по точности —
в пространстве $C_{[a,b]}$ ограничен коэффициент оптимальности алгоритма

$$C_n(algorithm,\ task,\ C_{[a,b]}) = \|y - y_n\|_{C_{[a,b]}} / \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[a,b]}}\ .$$

Преобразования:

1. Вычислить начальное приближение к решению задачи Коши (1), (2)

$$y_n(0, x) = Y_0 + Y_1 \cdot (x - d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x - d)^k\ . \quad (4)$$

2. Для $s = 1,\ 2, \ldots$:

2.1. Вычислить линейное дифференциальное уравнение с многочленными коэффициентами (ЛДУМК)

$$D[y] = F_s\ , \quad F_s = U_n[f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})|_{y=y_n(s-1,x)}]\ , \quad (5)$$

где $U_n[f]$ — оператор алгебраического интерполирования по узлам Чебышева $\{cos(i \cdot \pi/n)\ ,\ \ i = 0, \ldots, n\}$ линейно перенесеным на отрезок $[a, b]$.

2.2. Решить систему из условий (2) и ЛДУМК (5) по дифференциальному алгоритму [2] а-метода [3] на отрезке $[a, b]$ и вычислить многочлен $y_n(s, x)$.

3. Вычислить искомую аппроксимацию решения задачи Коши (1), (2)

$$y_n = \lim_{s \to \infty} y_n(s, x)\ .$$

По дифференциальному алгоритму а-метода решают систему уравнений

$$(A(d) \cdot (y_n \in P_n) + (E_{m,n}(z(x)) \in H_{m \backslash n}))(i)|_{x=d} = A(d) * Y_i, \quad i = 0, \ldots, k-1,$$

$$D[y_n \in P_n] + (E_{m,n}(z(x)) \in H_{m \backslash n})^{(k)} = F_s\ , \quad (6)$$

где $y_n \in P_n$ — *многочлен общего вида множества* P_n ,
$E_{m,n}(z(x)) \in H_{m \backslash n}$ — *многочлен общего вида пространства* $H_{m \backslash n}$.

Многочлен $y_n \in P_n$ имеет вид (3) и символьные коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$. Дополнительный многочлен имеет вид

$$(E_{m,n}(z(x)) \in H_{m\backslash n}) = \tau_1 \cdot cheb(n+1, z(x)) + \cdots + \tau_{m-n} \cdot cheb(m, z(x)) ,$$

символьные коэффициенты $\tau_1, \ldots, \tau_{m-n}$, порядок

$$m = \deg(D[y_n \in P_n] - F_s) + k$$

и ортогональный базис пространства Гильберта $L_2(a, b; \rho)$ — многочлены Чебышева первого рода линейно перенесенные на отрезок $[a, b]$

$$cheb(i, x) = \cos(i \cdot \arccos(x)) , \quad z(x) = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1 \ : \ [a, b] \to [-1, 1] .$$

Замечание 1. Итерационным методом Ньютона или методом более высокого порядка и интерполяцией можно преобразовать дифференциальное уравнене (1) в последовательность ЛДУМК

$$D[y] = E_s \cdot y + \cdots + K_s \cdot y^{(k-1)} + L_s , \qquad s = 1, 2, \ldots ,$$

где коэффициенты $E_s, \ldots, K_s,\ L_s$ итерационный метод определяет по функции f (1) и решению полученному на предыдущей итерации $y_n(s-1, x)$. Решить задачу Коши (2) для этих ЛДУМК по дифференциальному алгоритму а-метода, как правило, значительно сложнее, чем задачу (5), (2).

2 Алгоритм 1 и метод ряда Тейлора

Модельная задача Коши — уравнение физического маятника

$$y'' = -\sin(y), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 . \tag{7}$$

Эта задача имеет единственное решение

$$y(x) = solve(task\ (7)) \approx sin(x) . \tag{8}$$

Функция y (8) — аналитическая в окрестности отрезка $[-1, 1]$ комплексной плоскости. Отличные от нуля коэффициенты Фурье - Чебышева функции y (8) на отрезке $[-1, 1]$ только нечетные

$$\{a_{2\cdot i+1}(y, [-1, 1])\}_{i=2}^{6} = \{0.001,\ -0.00005,\ 2 \cdot 10^{-6},\ -8 \cdot 10^{-8},\ 3 \cdot 10^{-9}\} \tag{9}$$

и, с ростом параметра $n = 2 \cdot i + 1$, регулярно убывают к нулю

$$|a_{2\cdot i+1}(y, [-1, 1])| = o(q^i), \quad q < 0.04 .$$

Поэтому для величины наилучшего приближения функции y (8) алгебраическими многочленами порядка n в пространстве $C_{[-1,1]}$ справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[-1,1]}} = (1 + o(1)) \cdot |a_{2\cdot[(n-1)/2]+3}(y, [-1, 1])| . \tag{10}$$

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1. Решение задачи Коши (7) по алгоритму 1 на отрезке $[-1,1]$ является нечетным многочленом и справедливо тождество

$$y_n = algorithm\_1(task\ (7)\ ,\ [-1,1]\ ,\ n) = y_{2\cdot[(n-1)/2]+1}\ .$$

Норма погрешности аппроксимации этим многочленом точного решения y (8) задачи Коши (7) в пространстве $C_{[-1,1]}$ удовлетворяет тождества

$$\{\ \|y - y_{2\cdot i+1}\|\ \}_{i=1}^{5}\ =\ \{0.0012,\ 5.6\cdot 10^{-5},\ 2.7\cdot 10^{-6},\ 8.5\cdot 10^{-8},\ 3.5\cdot 10^{-9}\}\ . \quad (11)$$

С ростом параметра n алгоритма эта норма погрешности монотонно убывает к нулю. Скорость убывания этой нормы погрешности тождественна скорости убывания нечетных коэффициентов Фурье - Чебышева (9) функции y (8) на отрезке $[-1,1]$ и имеют место тождества

$$\|y - y_n\|_{C_{[-1,1]}} / |a_{2\cdot[(n-1)/2]+3}(y, [-1,1])| = 1 + \alpha_n = 1 + \alpha_{2\cdot[(n-1)/2+1]}\ ,\ \ ,$$

$$\{\alpha_{2\cdot i+1}\ \}_{i=1}^{5}\ =\ \{0.21\ ,\ 0.14\ ,\ 0.11\ ,\ 0.09\ ,\ 0.07\ ,\ 0.04\}\ . \quad (12)$$

Из них и тождества (10) можно сделать следующее заключение.

Вывод 1. *Коэффициент оптимальности решения по алгоритму 1 задачи Коши (7) в пространстве* $C_{[-1,1]}$ *убывает к еденице (с ростом параметра)*

$$C_n(algorithm\_1,\ task\ (7),\ C_{[-1,1]}) = (1 + o(1))\cdot(1 + \alpha_{2\cdot[(n-1)/2]+1})\ . \quad (13)$$

Коэффициент оптимальности метода ряда Тейлора. Отличные от нуля коэффициенты Тейлора функции y (8) в точке ноль только нечетные

$$\{\ t_{2\cdot i+1}(y),\ i = 0,\ldots,7\ \} = \{1,\ -0.1(6),\ 0.01(6),\ -0.0026,$$

$$0.00044,\ -7.7\cdot 10^{-5},\ 1.4\cdot 10^{-5},\ -2.6\cdot 10^{-6},\ 4.6\cdot 10^{-7}\}\ . \quad (14)$$

С ростом параметра $n = 2\cdot i + 1$ эти коэффициенты Тейлора регулярно убывают к нулю и удовлетворяют тождества

$$|t_{2\cdot i+1}(y)| = o(q^i),\ q < 0.2\ ,\quad t_{2\cdot i+1}(y) = (1 + o(1))\cdot 2^{2\cdot i}\cdot a_{2\cdot i+1}(y, [-1,1])\ .$$

Знаки этих коэффициентов Тейлора чередуются. Поэтому норма погрешности аппроксимации функции y (8) частной суммой ее ряда Тейлора — $T_n[y]$ — в пространстве $C_{[-1,1]}$ удовлетворяет тождества

$$\|y - T_n[y]\|_{C_{[-1,1]}} = A_n\cdot|t_{2\cdot[(n-1)/2]+3}(y)|\ ,\quad A_n = A_{2\cdot[(n-1)/2]+1} < 1\ , \quad (15)$$

$$\{\|y - T_{2\cdot i+1}[y]\|\}_{i=1}^{5} = \{0.012,\ 0.0016,\ 0.00026,\ 4.1\cdot 10^{-5},\ 6.5\cdot 10^{-6}\} \quad (16)$$

и, с ростом параметра i, монотонно убывает к нулю. Скорость убывания этой нормы погрешности тождественна скорости убывания нечетных коэффициентов Тейлора (14) функции y (8) и имеет место тождество (15) и тождество

$$\|y-T_n[y]\|_{C_{[-1,1]}}/|a_{2\cdot[(n-1)/2]+3}(y,[-1,1])| = (1+\gamma_{2\cdot[(n-1)/2+1]})\cdot 2^{2\cdot[(n-1)/2]+1} , \quad (17)$$

$$\{\gamma_{2\cdot i+1}\}_{i=1}^{5} = \{0.5 \ , \ 0.04 \ , \ 0.03 \ , \ 0.02 \ , \ 0.01\} \ .$$

Из них и тождества (10) можно сделать следующее заключение.

Вывод 2. *Коэффициент оптимальности метода ряда Тейлора на функции (8) в пространстве* $C_{[-1,1]}$ *в* $O(2^n) \approx 2^n$ *больше коэффициента оптимальности (13) решения по алгоритму 1 задачи Коши (7) и равен* $O(2^n)$

$$C_n(Taylor,\ task\ (8),\ C_{[-1,1]}) = (1+o(1))\cdot(1+\gamma_{2\cdot[(n-1)/2]+1})\cdot 2^{2\cdot[(n-1)/2]+1} \ . \quad (18)$$

3 Алгоритм 1 и метод Галеркина с возмущением

Метод 1.

1. Преобразовать задачу (1), (2) в интегродифференциальное уравнение

$$V^k[D[y]] = V^k[f(y,y',\ldots,y^{(k-1)})] \ , \quad (19)$$

где $V[D[y]] = \int D[y]\,dx - subs(init\_cond(y,d), \int D[y]\,dx|_{x=d})$ — композиция операторов интегрирования и подстановки начальных значений (2).

2. Вычислить аппроксимацию уравнения (19) по методу Галеркина

$$S_n[V^k[D[y_n]]] = S_n[V^k[U_n[f(y_n,y_n',\ldots,y_n^{(k-1)})]]] \quad (y_n \in P_n) \quad (20)$$

с возмущением, где оператор $S_n[y]$ вычисляет частную сумму порядка n ряда Фурье - Чебышева функции y на отрезке $[a,b]$,
$U_n[f]$ — оператор алгебраического интерполирования по узлам Чебышева $\{cos(i\cdot\pi/n) \ , \ \ i=0,\ldots,n\}$ линейно перенесеным на отрезок $[a,b]$.

3. Решить уравнение (20) по методу простой итерации:
   3.1. Вычислить начальное приближение — многочлен $y_n(0,x)$ (4).
   3.2. Для $s=1,2,\ldots$ вычислить многочлены

$$G_s = U_n[f(y,y',\ldots,y^{(k-1)})|_{y=y_n(s-1,x)}] \ , \quad g_s = V^k[G_s] \ , \quad (21)$$

уравнение

$$V^k[D[y]] = g_s \ , \quad V^k[D[y]] = L[y]+g \ , \quad (22)$$

и решение $y_n(s,x)$ аппроксимации уравнения (22) по методу Галеркина

$$S_n[V^k[D[y_n]] - g_s] = 0 \quad (y_n \in P_n) \ , \quad (23)$$

где оператор $S_n[y]$ вычисляет частную сумму порядка n ряда Фурье - Чебышева функции y на отрезке $[a,b]$.

4. Вычислить искомую аппроксимацию решения уравнения (19)

$$y_n = \lim_{s\to\infty} y_n(s,x) \ . \tag{24}$$

Теорема 1. *Пусть:*

— система из условий (2) и ЛДУМК

$$D[y] = G, \quad G \in P_n \ ,$$

где $D[y]$ — линейный оператор уравнения (1), эквивалентна линейному интегральному уравнению с многочленными коэффициентами (ЛИУМК)

$$V^k[D[y]] = V^k[G] \ , \quad V^k[D[y]] = L[y] + g \ , \tag{25}$$

— существует и единственно решение аппроксимации уравнения (25) по методу Галеркина

$$S_n[V^k[D[y_n \in P_n]]] = S_n[V^k[G]] \ ,$$

где оператор $S_n[y]$ вычисляет частную сумму порядка n ряда Фурье - Чебышева функции y на отрезке $[a,b]$,

— последовательность решений уравнения (23) сходится (24),

— для оператора $D[y]$ уравнения (1) имеют место тождества

$$V^k[D[y_n \in P_n]]^{(i)}|_{x=d} = A(d)\cdot(i!\cdot c_i - Y_i), \quad i=0,\dots,k-1 \ , \tag{26}$$

— параметр алгоритма 1 $n \geq k$.

Тогда существует решение y_n задачи Коши (1), (2) по алгоритму 1 и это решение тождественно многочлену (24).

Доказательство. Согласно результатов исследования а-метода Дзядыка [3], уравнение (23) (дополненное тождествами) эквивалентно аппроксимации уравнения (22) по а-методу Дзядыка

$$V^k[D[y_n]] - V^k[G_s] + E_{m,n}(z(x)) = 0 \quad (y_n \in P_n,\ E_{m,n}(z(x)) \in H_{m\backslash n}) \ , \tag{27}$$

где

$$m = \deg(V^k[D[y_n \in P_n]] - V^k[G_s]) \ .$$

Для произвольного многочлена G справедливы тождества

$$V[G] = \int_d^x G(t)\,dt \ , \quad V[G]|_{x=d} = 0 \ .$$

Поэтому правая часть уравнения (25) является многочленом и для этого многочлена справедливы тождества

$$V^k[G]^{(i)}|_{x=d} = V^{k-i}[G]|_{x=d} = 0 \ , \quad i=0,\dots,k-1 \ .$$

Согласно этих тождеств, тождеств (26) и результатов исследования дифференциального алгоритма а-метода Дзядыка [2], если $n \geq k$, то уравнение (27) эквивалентно системе уравнений вида (6)

$$(A(d) \cdot (y_n \in P_n) + (E_{m,n}(z(x)) \in H_{m\backslash n}))(i)|_{x=d} = A(d) * Y_i, \quad i = 0, \ldots, k-1,$$

$$D[y_n \in P_n] + (E_{m,n}(z(x)) \in H_{m\backslash n})^{(k)} = G_s \ . \tag{28}$$

Начальные приближения $y_n(0,x)$ (4) алгоритма 1 и метода 1 тождественны. Следовательно:

— на первой итерации ($s = 1$) алгоритм 1 вычисляет:

— многочлен F_1 (5) тождественный многочлену G_1 (21),

— систему уравнений (6) тождественную системе уравнений (28) и, следовательно, эквивалентную уравнению (27) и уравнению (23),

— многочлен $y_n(1,x)$ тождественный решению уравнения (23) метода 1,

— на следующих итерациях эти тождества сохраняются.

4 Сходимость алгоритма 1

Из теоремы 1, оценок [4] (с. 77 – 95) оптимальности операторов S_n и U_n

$$\|S_n\|_{L_2(a,b,\rho)} = 1 \ , \quad \|y - S_n[y]\|_{L_2(a,b,\rho)} = E_n(y, L_2(a,b,\rho)) \ ,$$

$$\|S_n\|_{C_{[a,b]}} = (4/\pi^2) \cdot ln(n) + O(1) \ , \quad O(1) \leq 3 \ , \quad n > 0 \ ,$$

$$\|U_n\|_{C_{[a,b]}} = (2/\pi) \cdot ln(n) + O(1) \ , \quad O(1) \leq 1 \ , \quad n > 0$$

как аппарата аппроксимации можно сделать следущее заключение.

Вывод 3. *В случае решения по алгоритму 1 задачи Коши (2) для достаточно широкого класса дифференциальных уравнений вида (1), результаты исследования метода Галеркина [5] (теоремы 19.1 — 19.3) доказывают:*

— существование решения системы аппроксимирующих уравнений (6),

— сходимость последовательности решений y_k, $y_{k+1}, \ldots$ задачи Коши (1), (2) по алгоритму 1 к точному решению y этой задачи,

— ограниченность коэффициента оптимальности алгоритма 1.

5 Оценки погрешности алгоритма 1

Для пункта 2 алгоритма 1 имеют место результаты исследования дифференциального алгоритма а-метода Дзядыка [2]. На достаточно широком классе операторов $D[y]$ (1) эти результаты доказывают:

— точные и конструктивные априорные и апостериорные оценки нормы погрешности решения задачи Коши (5), (2) по дифференциальному алгоритму а-метода Дзядыка [2] в пространстве $C_{[a,b]}$,

— ограниченность коэффициента оптимальности дифференциального алгоритма а-метода Дзядыка [2] в пространстве $C_{[a,b]}$ на задаче Коши (5), (2) — этот коэффициент зависит только от оператора $D[y]$.

Если последовательность оценок погрешности решения задачи Коши (2) для ЛДУМК (5) ($s = 0, 1, \ldots$) по дифференциальному алгоритму а-метода Дзядыка [2] сходится, то естественно принять ее предел за оценку погрешности алгоритма 1 на задаче (1), (2).

6 Алгоритм 2

Вход: $task = \{D[y]+G = f(y, \ldots, y^{(k-1)})\ (1),\ init\_cond(y, d)\ (2)\},\ [a, b],\ n,\ q$.
Выход: Оценка погрешности алгоритма 1.
Преобразования:

1. Для оператора L (22) по а-методу [3] вычислить многочлены

$$W_{i,q}(x) = a{-}method(L[u] = cheb(i, z(x)),\ [a, b],\ q)\ ,\quad i = n+1, \ldots, m\ ,$$

и норму этих многочленов $\|W_{n+1,q}(x)\|_{C_{[a,b]}}, \ldots, \|W_{m,q}(x)\|_{C_{[a,b]}}$.

2. На итерации $s = 1, 2, \ldots$ алгоритма 1 вычислить коэффициенты дополнительного многочлена $\tau_1(n, s), \ldots, \tau_{m-n}(n, s)$ и оценку погрешности решения по алгоритму 6.2 задачи Коши для ЛДУМК (5), (2) — задачи $task\_s$
$R_{n,q}(task\_s,\ C_{[a,b]}) =$

$$|\tau_1(n, s)| \cdot \|W_{n+1,q}(x)\|_{C_{[a,b]}} + \cdots + |\tau_{m-n}(n, s)| \cdot \|W_{m,q}(x)\|_{C_{[a,b]}}\ .$$

3. Вычислить искомую оценку погрешности алгоритма 1 на задаче (1), (2)

$$R_{n,q}(\ task((1),\ (2)),\ C_{[a,b]}\ ) = \lim_{s\to\infty} R_{n,q}(\ task\_s,\ C_{[a,b]}\ )\ . \qquad (29)$$

Пример 1. (Иллюстрация эффективности алгоритма 2). Задача Коши

$$y'' + y = U_n[y_n(s-1, x) - sin(y_n(s-1, x))]\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 1\ , \qquad (30)$$

где $y_n(0, x) = x$, $y_n(s, x) = algorithm[2](task\ (30),\ [a, b],\ n)$, $s = 1, 2, \ldots$, имеет:

— оператор уравнения (25)

$$V^2[D[y]] = L[y] - x\ ,\ L[y] = y(x) - K[y]\ ,\ K[y] = -\int_0^x (x-t)\cdot y(t)\,dt\ , \qquad (31)$$

— функцию

$$W_n(x) = L^{-1}[cheb(n, x)] = cheb(n, x) + K[cheb(n, x)] + K^2[cheb(n, x)] + \cdots\ ,$$

— норму этой функции в пространстве $C_{[-1,1]}$

$$W_{2\cdot i+3} = \|L^{-1}[cheb(2\cdot i+3, x)]\|_{C_{[-1,1]}} = 1 + \beta_{2\cdot i+3}, \qquad (32)$$

$$\{\ \beta_{2\cdot i+3}\ \}_{i=0}^{5} = \{\ 0.28,\ 0.17,\ 0.12,\ 0.09,\ 0.08,\ 0.04\ \},$$

— один отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена $\tau(n,s)$,
— оценку погрешности решения по дифференциальному алгоритму а-метода Дзядыка [2] задачи (30)

$$\|y(s,x)-y_n(s,x)\|_{C_{[-1,1]}} = |\tau(n,s)|\cdot\|W_{2\cdot[(n-1)/2]+3}(x)\|_{C_{[-1,1]}} .$$

Если $q > n$, то а-метод [3] с параметром q вычисляет многочлен

$$W_{n,q}(x)\approx W_n(x)\ ,\quad \|W_{n,q}(x)-W_n(x)\|_{C_{[-1,1]}} < 2\cdot|\tau(n,q)|$$

и $|\tau(n,s)|\cdot\|W_{2\cdot[(n-1)/2]+3,q}(x)\|$ аппроксимирует оценку $\|y(s,x)-y_n(s,x)\|$ с погрешностью

$$\big|\|y(s,x)-y_n(s,x)\|_{C_{[-1,1]}} - |\tau(n,s)|\cdot\|W_{2\cdot[(n-1)/2]+3,q}(x)\|_{C_{[-1,1]}}\big|$$

$$< 2\cdot|\tau(n,s)|\cdot|\tau(2\cdot[(n-1)/2]+3,q)|\ ,\ |\tau(i,q)| = o(u^{q-i})\ ,\ u<0.1\ .$$

Поведение коэффициента $\tau(i,q)$ иллюстрируют его значения при $q=25$

$$\{\tau(2\cdot j+1,25)=\tau(2\cdot j+1,26)\ ,\ j=0,\ldots,13\} =$$

$$\{-1\cdot10^{-36},\ 4\cdot10^{-35},\ -3\cdot10^{-33},\ 5\cdot10^{-31},\ -1\cdot10^{-28},\ 6\cdot10^{-26},\ -4\cdot10^{-23},$$
$$3\cdot10^{-20},\ -3\cdot10^{-17},\ 4\cdot10^{-14},\ -7\cdot10^{-11},\ 10^{-7},\ -3\cdot10^{-4},\ 1\}\ . \qquad (33)$$

Мы решили задачу Коши (7) по алгоритму 1 для $n=3,\ldots,11$ и вычислили последовательности значений отличного от нуля коэффициента дополнительного многочлена $\{\ \tau(n,1),\ \tau(n,2),\ldots\}$. Если $s>2$, то элементы этих последовательностей не изменяются. Так последовательность

$$\{\ \tau(5,1),\ \tau(5,2),\ldots\} = \{\ 9\cdot10^{-6},\ -2.4987\cdot10^{-5},\ldots,\ -2.4987\cdot10^{-5},\ldots\}\ .$$

Эти последовательности имеют пределы

$$\{\ \tau(3),\ \tau(5),\ldots\ \tau(11)\} = \{\ 0.007,\ -2.5\cdot10^{-5},\ 1.8\cdot10^{-6},\ -3.9\cdot10^{-8},\ 1.6\cdot10^{-9}\ \}\ .$$

Поэтому полученная по алгоритму 2 оценка погрешности алгоритма 1 на задаче Коши (7) в случае $q=25$

$$\{\ R_{2\cdot i+1,q}((7),\ C_{[-1,1]})\ \}_{i=1}^{5} = \{\ 0.001,\ 3\cdot10^{-5},\ 2\cdot10^{-6},\ 4\cdot10^{-8},\ 2\cdot10^{-9}\ \}$$

хорошо аппроксимирует погрешности (11) алгоритма 1 на этой задаче.

7 Алгоритм 3

Вход: $task = \{\ D[y]\ (1)\ ,\ init\_cond(y,d)\ (2)\ \}\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ,\ q\ .$

Выход: Оценка коэффициента оптимальности алгоритма 1.

Преобразование: Вычислить оценку коэффициента оптимальности решения по дифференциальному алгоритму а-метода Дзядыка [2] задачи Коши

(2) для ЛДУМК (5) (с оператором $D[y]$ (1)) и принять ее за искомую оценку коэффициента оптимальности решения по алгоритму 1 задачи Коши (1), (2)

$$C_{n,q}(task(\ (1),\ (2)\ ),\ C_{[a,b]})\ =\ C_{n,q}(task(\ (5),\ (2)\ ),\ C_{[a,b]})\ .$$

Пример 2. (Иллюстрация эффективности алгоритма 3). Задача Коши (30) имеет оператор (31) и функцию $W_n(x) = L^{-1}[cheb(n,x)]$ с нормой (32). Коэффициент Фурье - Чебышева порядка n этой функции на отрезке $[-1,1]$ имеет значения

$$\{\ a_i(W_i(x),[-1,1])\ \}_{i=0}^{13} = \{0.76, 0.88, 1.15, 1.06,$$

$$1.04, 1.02, 1.015, 1.01, 1.008, 1.006, 1.005, 1.004, 1.0035, 1.003, 1.0026\}\ .$$

Поэтому

$$1/a_{2\cdot i+1}(W_{2\cdot i+1}(x),[-1,1]) = 1 - \delta_{2\cdot i+1}\ , \tag{34}$$

$$\{\delta_{2\cdot i+1},\ i = 1,\ldots,6\} = \{0.05,\ 0.02,\ 0.01,\ 0.006,\ 0.004,\ 0.003\}\ .$$

Аппроксимация (6) задачи Коши (30) имеет один отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена $\tau(n,s)$ — коэффициент при многочлене Чебышева нечетного порядка. Поэтому оценка коэффициента оптимальности решения задачи Коши (30) по дифференциальному алгоритму a-метода Дзядыка [2] имеет вид

$$\|y(s,x) - y_n(s,x)\|_{C_{[-1,1]}}/|a_{2\cdot[(n-1)/2]+3}(y(s,x),[-1,1])| = 1 + \alpha_{2\cdot[(n-1)/2]+3} =$$

$$\|W_{2\cdot[(n-1)/2]+3}(x)\|_{C_{[-1,1]}} \cdot 1/a_{2\cdot[(n-1)/2]+3}(W_{2\cdot[(n-1)/2]+3}(x),[-1,1])\ ,$$

$$\{\ \alpha_{2\cdot i+1}\ \}_{i=1}^{5} = \{0.21\ ,\ 0.14\ ,\ 0.11\ ,\ 0.09\ ,\ 0.07\ ,\ 0.04\}\ .$$

Эта оценка практически тождественна коэффициенту оптимальности (12) алгоритма 1 на задаче (7).

Если $q > n$, то a-метод вычисляет многочлен

$$W_{n,q}(x) \approx W_n(x)\ ,\quad \|W_{n,q}(x) - W_n(x)\|_{C_{[-1,1]}} < 2\cdot|\tau(n,q)|\ .$$

Коэффициент Фурье - Чебышева порядка n этого многочлена

$$a_n(W_{n,q}(x),[-1,1])\ ,\quad |a_n(W_{n,q}(x),[-1,1]) - a_n(W_n(x),[-1,1])| < 2\cdot|\tau(n,q)|\ ,$$

и аппроксимация $C_{n,q}(task\ (30),\ C_{[-1,1]})$ оценки коэффициента оптимальности (12) алгоритма 1 на задаче (7)

$$\|W_{2\cdot[(n-1)/2]+3,q}(x)\|_{C_{[-1,1]}} \cdot 1/a_{2\cdot[(n-1)/2]+3}(W_{2\cdot[(n-1)/2]+3,q}(x),[-1,1])\ ,$$

$$|1+\alpha_{2\cdot i+1} - \|W_{2\cdot i+3,q}(x)\|_{C_{[-1,1]}}\cdot 1/a_{2\cdot i+3}(W_{2\cdot i+3,q}(x),[-1,1])| = O(|\tau(2\cdot i+3,q)|\ ,$$

где $|\tau(2 \cdot i + 3, q)|$ удовлетворяет тождества (33).

8 Программирование алгоритма 1 в СКА

Мы запишем алгоритм 1 на языке APLAN системы алгебраического программирования APS и исследуем полученную процедуру. Результаты этого исследования оценивают эффективность реализации алгоритма 1 в СКА.

9 Программирование алгоритма 1 в APS

Структура данных на входе.

1. Линейный дифференциальный оператор с многочленными коэффициентами $D[y]$ — левая часть уравнения (1) — имеет вид

   `A * dif( y , k ) + . . . + C * y ,`

   где y — атом, коэффициенты A , ..., C — многочлены переменной x. Эти многочлены являются термами и имеют вид естественный для математики. Переменная x является атомом.
2. Функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ — правая часть уравнения (1) — имеет вид обычный для СКА и аргументы `x` , `y` , `y1` $= y'$, `y2` $= y''$, ..., .
3. Начальные условия (2) определяют:
   — начальная точка `InitPoint := d ;`
   — список тождеств (2) (в этой точке) относительно атома y

   `init_cond := ( y = Y_0,..., dif(y,k-1) = Y_{k-1} ) ;`
4. Отрезок аппроксимации $[a, b]$ определяет список `(a , b)` .
5. Параметр n алгоритма является целым числом.

Структура данных на выходе. Многочлен y_n (3) имеет коэффициенты — числа и вид естественный для математики `d + . . . + f * x ^ n` .

APLAN - процедура.

Алгебраическая спецификация п. 2 алгоритма 1.

```
y1_n := d_x(y_n);                                         /*  y'_n  */
y2_n := d_x(y1_n);                                        /*  y"_n  */
....
fy_n := subs((y = y_n, y1 = y1_n,...), fy)); /* f(x,y_n,...) */
F_s := Cheb_interpol(fy_n , interval , n);    /*  U_n[fy_n]  */
LDUMK := ( Dy + (-1) * F_s  = 0 );
```

APLAN - процедура реализующая
дифференциальный алгоритм а-метода Дзядыка [2].

Структура выхода операторов APLAN-процедуры.

Процедура вычисляет начальное приближение $y_n(0, x)$ (4) — многочлен с числовыми коэффициентами вида естественного для математики.

На каждой итерации процедура вычисляет:
— производные многочлена $y_n(s-1,x)$ вида естественного для математики,
— функцию $f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})|_{y=y_n(s-1,x)}$ естественного вида,
— многочлен $U_n[f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})|_{y=y_n(s-1,x)}]$ естественного вида,
— ЛДУМК (5) вида принятого в процедуре [2]

```
A * dif( y , k ) + . . . + C * y + -1 * F_s = 0  ,
```

— следующее приближение $y_n(s,x)$ к решению задачи (1), (2) — многочлен с числовыми коэффициентами вида естественного для математики.

10 Исследование APLAN - процедуры

Теорема 2. *Сложность выполнения одной итерации алгоритма 1 APLAN-процедурой полиномиальная по параметру n*

$$(m+1)\cdot Q(canplf,m)+O(n^3)\ ,\quad m=\max\{\deg(D[y_n\in P_n]),n\}+k\ ,\quad (35)$$

где $Q(canplf,m)$ — сложность преобразования оператором $canplf$ многочлена P : многочлен $canplf(P)$ является суммой мономов вида
`c( i ) * x ^ j $ b` , $i=n+1,\dots,m\ ,\ j=0,\dots,m\ ,\quad m=n+O(1)\ .$

Доказательство. Процедура вычисления одной итерации решения линейная. Поэтому, вычислительная сложность этой процедуры тождественна сумме вычислительной сложности операторов этой процедуры. Вычислительная сложность APLAN - процедуры реализующей дифференциальный алгоритм а-метода Дзядыка [2] полиномиальная (35). Остальные операторы процедуры имеют по параметру n полиномиальную сложность $O(n^s),\ s\le 3$.

11 Вычислительный эксперимент с APLAN-процедурой

Описание задачи (7) на языке APLAN.

```
process[1] := ( Dy := dif(y , 2) + y ;  fy := y + -1 * sin(y) ;
            InitPoint := 0 ;
            init_cond := ( y = 0 , dif(y , 1) = 1 );
                  interval := (-1 , 1) ;      ...);
```

Результаты решения задачи (7) процедурой ($n=3$).

```
fy_n := subs((y = y_n, y1 = y1_n,...), fy)) = x + -1 * sin(x);
F_s := Cheb_interpol(fy_n , interval , n) = 0.156507 * x ^ 3 +
                                                0.00202223 * x ;
LDUMK := ( Dy + -1 * F_s  = 0 ) = ( dif (y , 2) + y +
                   -0.156507 * x ^ 3 + -0.00202223 * x = 0 );
... y_n := ser(n,Coef)   = -0.146596 * x ^ 3 + 0.995264 * x ;
```

```
F_s := Cheb_interpol(fy_n , interval , n) = 0.0826425 * x ^ 3
                                        + 0.0156247 * x ;
LDUMK := ( Dy + -1 * F_s = 0 ) = (dif (y , 2) + y +
                 -0.0826425 * x ^ 3 + -0.0156247 * x = 0 );
... y_n := ser(n,Coef) =  -0.148983 * x ^ 3 + 0.996381 * x  ;
    ...
... y_n := ser(n,Coef) =  -0.148988 * x ^ 3 + 0.996391 * x  ;
```

Вывод 4. *Результаты вычислительного эксперимента хорошо иллюстрируют эффективность теоремы 2.*

12 Алгоритм 1 и методы Рунге - Кутта

Модельная задача Коши для методов Рунге - Кутта [6] , с (106)

$$y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \ , \quad y(0) = -8/5 \ . \tag{35}$$

Эта задача имеет единственное решение

$$y(x) = solve(task\ (35)) = -2/(x \cdot (x+2)) \ . \tag{36}$$

Функция y (36) — аналитическая в комплексной плоскости и имеет два полюса. Коэффициенты Фурье - Чебышева функции y (36) на отрезке $[0.5, 1]$

$$\{a_n(y, [0.5,1])\}_{n=0}^{6} = \{-1,\ 0.45,\ -0.08,\ 0.014,\ -0.002,\ 0.0004,$$
$$-7.2\cdot 10^{-5},\ 1.2\cdot 10^{-5},\ -2.1\cdot 10^{-6}, 3.6\cdot 10^{-7},\ -6.2\cdot 10^{-8},\ 10^{-8},$$
$$-1.8\cdot 10^{-9},\ 3.1\cdot 10^{-10},\ -5.4\cdot 10^{-11},\ 9.3\cdot 10^{-12},\ -1.6\cdot 10^{-12}\} \ , \tag{37}$$

с ростом параметра n регулярно убывают к нулю

$$|a_n(y, [0.5,1])| = o(u^n), \quad u < 0.2 \ .$$

Поэтому для величины наилучшего приближения функции y (8) многочленами порядка n в пространстве $C_{[0.5,1]}$ справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[0.5,1]}} = (1 + o(1)) \cdot |a_{n+1}(y, [0.5,1])| \ . \tag{38}$$

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1. Норма погрешности аппроксимации многочленом

$$y_n = algorithm\_1(task\ (35)\ ,\ [0.5,1]\ ,\ n) \tag{39}$$

точного решения y (36) задачи Коши (35) в пространстве $C_{[0.5,1]}$ удовлетворяет тождества

$$\{\|y - y_n\|\}_{n=1}^{7} = \{0.21,\ 0.025,\ 0.004,\ 0.00074,\ 10^{-4},\ 1.8\cdot 10^{-5},\ 3.2\cdot 10^{-6}\}.$$

С ростом параметра n алгоритма эта норма погрешности монотонно убывает к нулю. Скорость убывания этой нормы погрешности тождественна скорости убывания нечетных коэффициентов Фурье - Чебышева (37) функции y (36) на отрезке $[0.5, 1]$ и имеют место тождества

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} / |a_{n+1}(y, [0.5, 1])| = Const + \alpha_n \ , \tag{40}$$

$$\{Const + \alpha_n\}_{n=1}^{7} \ = \ \{2.6 \ , \ 2.8 \ , \ 2 \ , \ 1.8 \ , \ 1.4 \ , \ 1.5, \ 1.5\} \ .$$

Из них и тождества (38) можно сделать следующее заключение.

Вывод 5. *Коэффициент оптимальности решения по алгоритму 1 задачи Коши (35) в пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *убывает к константе* $Const \approx 1.5$ *(с ростом параметра* n *)*

$$C_n(algorithm\_1, \ task \ (38), \ C_{[0.5,1]}) = (1 + o(1)) \cdot (Const + \alpha_n) \ . \tag{41}$$

Погрешность методов Рунге - Кутта на задаче Коши (35). По методу Рунге - Кутта порядка m $(m = 3, 4, 6)$ решают задачу Коши (1), (2) первого порядка, разрешенную относительно y', [6] (с. 103 – 105) на отрезке $[d, \ d + H]$ с шагом h и вычисляют сеточную функцию

$$y_h = Runge\_Kutta\_m) \, (y' = f(x, y), \, y(d) = y_0, \, [d, d{+}H], \, h) = \{ \, y_h(x_i) \, \}_{i=0}^{[H/h]} \, . \tag{42}$$

Если шаг этого метода $h > h_m$, то его погрешность [6] (с. 103 – 105) удовлетворяет тождество

$$\max_{i=0,\ldots,[H/h]} |y(x_i) - y_h(x_i)| = A_m \cdot h^m \ . \tag{43}$$

Погрешность решения задачи Коши (35) на отрезке $[0.5, 1]$ по методу Рунге - Кутта порядка $m = 3, \ 4, \ 6$ с шагом h , соответственно, равным $1/50$, $1/20$, $1/10$ равна $3 \cdot 10^{-6}$. Это погрешность алгоритма 1 с параметром $n = 7$ на задаче (35). Следовательно, для вычисления решения задачи (35) на отрезке $[0.5, 1]$ с точностью $3 \cdot 10^{-6}$ число узлов сетки решений, полученных методами Рунге - Кутта, больше порядка многочлена, вычисленного по алгоритму 1.

Метод интерполяции сеточной функции метода Рунге - Кутта. Композиция метода Рунге - Кутта и алгебраического интерполирования P_q сеточной функции y_h (42) является методом вычисления многочленов

$$(P_q \ , \ Runge\_Kutta\_m) \ (y' = f(x, y), \ y(d) = y_0, \ [d, d + H]) P_q[y_h] \tag{44}$$

порядка $q = [H/h]$. Норма погрешности этого метода в пространстве $C_{[d,d+H]}$ не меньше погрешности метода Рунге - Кутта

$$\max_{x \in [d,d+H]} |y(x) - P_q[y_h]| \geq \max_{i=0,\ldots,q} |y(x_i) - y_h(x_i)| \ .$$

Поэтому коэффициент оптимальности метода (44) в пространстве $C_{[d,d+H]}$

$$C_q((P_q\ ,\ Runge\_Kutta\_m)\ ,\ task\ (1),\ (2),\ C_{[d,d+H]}) \geq$$
$$\max_{i=0,\dots,q} |y(x_i) - y_h(x_i)| / \inf_{c_0,\dots,c_q} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_q \cdot x^q)\|_{C_{[d,d+H]}}\ .$$

Для задачи Коши (35) из этого неравенства и тождеств (37), (38), (43) можно сделать следующее заключение.

Вывод 6. *Коэффициент оптимальности метода (44) в пространстве $C_{[0.5,1]}$ на задаче Коши (35):*

— *решающего эту задачу с точностью $2 \cdot 10^{-8}$ не меньше 10000,*

— *растет с ростом параметра $q = [0.5/h]$*

$$C_q((P_q\ ,\ Runge\_Kutta\_m)\ ,\ task\ (35)\ ,\ C_{[0.5,1]}) =$$
$$O(h^m/|a_q(-2/(x \cdot (x+2)), [0.5,1])|) > O(v^q/q^m)\ , \quad v > 5\ .$$

Заключение.

Построенные в работе алгоритм и APLAN-процедура решают задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка k вида (1), (2) на отрезке $[a,b]$ и вычисляют алгебраический многочлен y_n (3). Эта аппроксимация решения задачи Коши оптимальна для символьных преобразований в системах компьютерной алгебры — коэффициент оптимальности алгоритма в пространстве $C_{[a,b]}$ ограничен на достаточно широком классе дифференциальных уравнений вида (1). Этот алгоритм реализует идею В. К. Дзядыка:

построить на основании а-метода

эффективные численные методы решения функциональных уравнений.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Lanczos C. (Ланцош К.) *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз, 1961 — 524 с.

[2] Денисенко П. М. *Модифікований метод Дзядика розв'язування задачі Коші.* // Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету, вип. 12 (1997), с. 44 — 51.

[3] Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка, 1988 — 304 с.

[4] Paszkowski S. (Пашковский С.) *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука, 1983 — 384 с.

[5] Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука , 1969 — 456 с.

[6] Babuska I., Prager M., Vitasek E. (Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.) *Численные процессы решения дифференциальных уравнений.*— М.: Мир, 1969 — 368 с.