

УДК 517.51

## УЗАГАЛЬНЕНА ГЕНЕРАТРИСА БЕЗ'Є

Ю.І. Волков

В этой статье рассматриваются свойства обобщенного преобразования Безье, его применение для приближения функций и построения кривых.

In this paper we consider properties of generalized Bezer's transformation, its using for the approximation of functions and curves tracing.

### 1. Вступ

Позначатимемо: через  $\{y\}$  ( або просто  $y$ ) числову послідовність  $\{y_0, \dots, y_{2n}\}$ ;

$$b = b(x, a) := \left( 1 - \frac{2a(1-x)}{a + \sqrt{1 + (a^2 - 1)(2x - 1)^2}} \right), 0 \leq x \leq 1, a > 0;$$

$$C(n, k, a) := \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (1 + 2az + z^2)^n \Big|_{z=0} = \sum_{i+2j=k} \frac{n!(2a)^i}{i!(n-i-j)!}, k = 0, 1, \dots, 2n.$$

**Означення 1.** Функция

$$B_n(y, x, a) := \sum_{k=0}^n y_k C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2}$$

називається узагальненою генератрисою Без'є послідовності  $\{y\}$ .

Зокрема, якщо  $a=1$ , то

$$C(n, k, 1) = C_{2n}^k, B_n(y, x, 1) = B_{2n}(y, x) = \sum_{k=0}^n y_k C_{2n}^k x^k (1-x)^{2n-k},$$

тобто,  $B_n(y, x, 1)$  це звичайна функція Без'є, яка породжена послідовністю  $\{y\}$  (див., наприклад, [1], стор. 44-62); якщо  $a=0$ , то

$$C(n, k, 0) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \text{ не парне} \\ C_{n-k/2}, & \text{якщо } k \text{ парне,} \end{cases}$$

а  $B_n(y, x, 0)$  це звичайна функція Без'є, яка породжена послідовністю  $\{y\} = \{y_0, \dots, y_{2n}\}$ .

Метою даної роботи є вивчення функцій  $B_n(y, x, a)$  та їхніх застосувань для апроксимації неперервних функцій і побудови кривих.

### 1. Допоміжні пропозиції.

**Лема 1.** Числа  $C(n, k, a)$  задовольняють рекурентному співвідношенню:

$$C(n, k, a) = C(n-1, k, a) + 2aC(n-1, k-1, a) + C(n-1, k-2, a), C(0, 0, a) = 1, C(0, k, a) = 1, C(1, 1, a) = 2a, C(2, 1, a) = 1.$$

Лема випливає з співвідношення

$$(1 + 2az + z^2)^n = (1 + 2az + z^2)^{n-1} (1 + 2az + z^2) \text{ , бо } C(n,k,a) \text{ це коефіцієнти}$$

многочлена  $(1 + 2az + z^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} C(n,k,a)z^k$ .

Таблиця чисел  $C(n,k,a)$  для  $n=1, 2, 3, 4$ .

1	2a	1						
1	4a	2+4a <sup>2</sup>	4a	1				
1	6a	3+12a <sup>2</sup>	12a+8a <sup>3</sup>	3+12a <sup>2</sup>	6a	1		
1	8a	4+24a <sup>2</sup>	24a+32a <sup>3</sup>	6+48a <sup>2</sup> +16a <sup>4</sup>	24a+32a <sup>3</sup>	4+24a <sup>2</sup>	8a	1

Далі використовуватимемо таке позначення:

$$w = w(x,a) := \sqrt{1 + (a^2 - 1)(1 - 2x)^2} = \sqrt{4x(1 - x) + a^2(1 - 2x)^2}.$$

**Лема 2.** Функція  $b(x,a)$ , її перша і друга похідні по  $x$  невід’ємні і  $b(x,a) \leq 1, 0 \leq x \leq 1, a \geq 0$ .

Дійсно,

$$b'(x,a) = \frac{w(x,a) + a(2x - 1)}{w(x,a)} \geq \frac{a|2x - 1| + a(2x - 1)}{w(x,a)} \geq 0.$$

Тому функція  $b(x,a)$  не спадає, а через те, що  $b(0,a)=0, b(1,a)=1$ , то  $0 \leq b(x,a) \leq 1$ .

Далі,

$$b''(x,a) = 2a(w(x,a))^{-3} \geq 0, \tag{1}$$

тому функція  $b'(x,a)$  не спадає, а через те, що

$$b'(0,a) = 0, b'(1,a) = 2, \text{ то } 0 \leq b'(x,a) \leq 2.$$

**Лема 3.** Має місце подання

$$B_n(y,x,a) = b(1 - x,a)^n \sum_{k=0}^{2n} y_k C(n,k,a) a^k \left( \frac{b(x,a)}{x - b(x,a)} \right)^k \tag{2}$$

Випливає з означення функції  $b(x,a)$ .

З (2) слідує, що операція переходу від послідовності  $\{y\}$  до функції  $B_n(y,x,a)$  лінійна і додатня.

Нехай  $E$  - оператор зсуву,  $I$  - одиничний оператор,  $\Delta$  - різницевий оператор. Тоді  $E^k y_0 = y_k, Iy_k = y_k, \Delta^k y_0 = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_i, k = 0,1,\dots$

**Лема 4.** Мають місце подання

$$B_n(y,x,a) = (b(1 - x,a) + 2(x - b(x,a))E + b(x,a)E^2)^n y_0, \tag{3}$$

$$B_n(y, x, a) = (1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^n y_0 = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i (b(x, a))^j \Delta^{i+2j} y_0. \tag{4}$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} B_n(y, x, a) &= (b(1-x, a) + 2(x-b(x, a))E + b(x, a)E^2)^n y_0 \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} b(1-x, a)^{n-i-j} 2^i (x-b(x, a))^i b(x, a)^j E^i E^{2j} y_0 \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} b(1-x, a)^n (2a)^i \left( \frac{a}{x-b(x, a)} \right)^{i+2j} b(x, a)^{i+2j} y_{i+2j} \\ &= b(1-x, a)^n \sum_{k=0}^{2n} y_k C(n, k, a) a^k \left( \frac{b(x, a)}{x-b(x, a)} \right)^k = B_n(y, x, a). \end{aligned}$$

Співвідношення (4) впливає з (1), якщо врахувати, що  $E = \Delta + I$ .

**Наслідок 1.** Нехай  $y_k^{(0)} = y_k, k = 0, 1, \dots, 2n$ ;

$$y_k^{(m)} = y_k^{(m-1)} + 2x\Delta y_k^{(m-1)} + b(x, a)\Delta^2 y_k^{(m-1)}, m = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots, 2(n-m).$$

Тоді

$$B_n(y, x, a) = B_{n-m}(y^{(m)}, x, a),$$

де

$$\{y^{(m)}\} = \{y_0^{(m)}, y_1^{(m)}, \dots, y_{2(n-m)}^{(m)}\}.$$

Дійсно, з (4) випливає

$$B_n(y, x, a) = (1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-m} ((1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^m y_0),$$

а звідси випливає наслідок.

**Лема 5.** Нехай  $\{y\} = \{0^m, 1^m, \dots, (2n)^m\}, m \in N$ . Тоді

$$B_n(y, x, a) = \sum_{k=0}^m k! S(m, k) \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i b(x, a)^j, \tag{5}$$

де  $S(m, k)$  числа Стірлінга другого роду.

Дійсно,

$$\begin{aligned} B_n(y, x, a) &= (1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^n 0^m \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i b(x, a)^j \Delta^{i+2j} 0^m \\ &= \sum_{k=0}^m \Delta^k 0^m \sum_{0 \leq i+j=k} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i b(x, a)^j, \end{aligned}$$

а звідси випливає (5), бо  $S(m, k) = \Delta^k 0^m / k!$ .

**Наслідок 2.** Нехай  $\{y\} = \{1, 1, \dots, 1\}$ . Тоді  $B_n(y, x, a) = 1$ .

**Наслідок 3.** Нехай  $\{y\} = \{0, 1, 2, \dots, (2n)\}$ . Тоді  $B_n(y, x, a) = 2nx$ . (6)

**Наслідок 4.** Нехай  $\{y\} = \{0^2, 1^2, 2^2, \dots, (2n)^2\}$ . Тоді  
 $B_n(y, x, a) = 2nx + 4n(n-1)x^2 + 2nb(x, a)$ . (7)

**Наслідок 5.** Нехай  $\{y\} = \{0^3, 1^3, 2^3, \dots, (2n)^3\}$ . Тоді  
 $B_n(y, x, a) = 2nx + 12n(n-1)x^2 + 6nb(x, a) + 8n(n-1)(n-2)x^3 + 12n(n-1)b(x, a)$ .

## 2. Властивості узагальненої генератрисы Без'є

**Теорема 1.** Якщо послідовність  $\{y\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{2n}\}$  не спадає (не зростає), то функція  $B_n(y, x, a)$  не спадає (не зростає).

*Доведення.* Нехай  $\{\tilde{y}\} = \{\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{2n}\}$ , де

$$\tilde{y}_k = (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)y_k = b'(1-x, a)\Delta y_k + b'(x, a)\Delta y_{k+1}, k = 0, 1, \dots, 2n-2.$$

Скористаємося (4) та (3). Отримаємо

$$\frac{d}{dx} B_n(y, x, a) = n(1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-1} (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)y_0 = B_{n-1}(\tilde{y}, x, a) \geq 0 (\leq 0), \text{ б}$$

о  $b'(x, a) \geq 0$  і  $2 - b'(x, a) = 1 - a(2x - 1)w^{-1} \geq 0$ , а послідовність  $\{y\}$  не спадає (не зростає).

**Теорема 2.** Якщо послідовність  $\{y\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{2n}\}$  опукла, то функція  $B_n(y, x, a)$  опукла.

*Доведення.* Нехай  $\{\hat{y}\} = \{\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{2n-4}\}$ , де

$$\hat{y}_k = (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)^2 y_k = b'(x, a)^2 \Delta^2 y_{k+2} + 2b'(x, a)(2 - b'(x, a))\Delta^2 y_{k+1} + (2 - b'(x, a))^2 \Delta^2 y_k, k = 0, 1, \dots, 2n-2,$$

а  $\{\bar{y}\} = \{\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{2n-2}\}$ , де

$$\bar{y}_k = b''(x, a)(1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)y_k = b(1-x, a)\Delta^2 y_k + 2(x - b(x, a))\Delta^2 y_{k+1} + b(x, a)\Delta^2 y_k, k = 0, 1, \dots, 2n-4.$$

Скористаємося (4) і (3). Отримаємо:

$$\frac{d^2}{dx^2} B_n(y, x, a) = n(n-1)(1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-2} (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)^2 y_0 +$$

$nb''(x, a)(1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-1} \Delta y_0 = n(n-1)B_{n-2}(\hat{y}, x, a) + nB_{n-1}(\bar{y}, x, a) \geq 0$ , бо  $b''(x, a) \geq 0$  (див. (1)),  $(2 - b'(x, a)) \geq 0$ ,  $(1 - 2x + b) \geq 0$ ,  $(x - b(x, a)) \geq 0$ , а послідовність  $\{y\}$  опукла.

**Теорема 3.** Нехай  $t = \{0, 1, \dots, 2n\}$ . Тоді

$$(x(1-2x) + b(x, a)) \frac{d}{dx} B_n(y, x, a) = B_n((t-2nx)y, x, a). \quad (8)$$

*Доведення.* Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_n(y, x, a) &:= \sum_{k=0}^n y_k C(n, k, a) b(x, a)^{k/2-1} b(1-x, a)^{n-k/2-1} \\ &\cdot \left( \frac{k}{2} (b'(x, a) b(1-x, a) + b(x, a) b'(1-x, a)) \right) - n b(x, a) b'(1-x, a), \\ &= \sum_{k=0}^n y_k C(n, k, a) b(x, a)^{k/2-1} b(1-x, a)^{n-k/2-1} \frac{2x(1-x)}{w(x, a)(a+w(x, a))} (k-2nx), \end{aligned}$$

а звідси випливає співвідношення (8), бо

$$\frac{2x(1-x)}{w(x, a)(a+w(x, a))} = \frac{x(1-2x) + b(x, a)}{w^2(x, a)}.$$

### 3. Апроксимаційні властивості

Візьмемо в якості членів послідовності  $\{y\}$  значення функції  $f(x)$ , яка визначена і неперервна на проміжку  $[0, 1]$ :

$$\left\{ f(0), f\left(\frac{1}{2n}\right), \dots, f\left(\frac{k}{2n}\right), \dots, f(1) \right\}.$$

Тоді послідовність функцій  $B_n(y, x, a)$  рівномірно збігається до функції  $f(x)$  на проміжку  $[0, 1]$ . Цей результат є наслідком того, що додатні лінійні оператори  $B_n(y, x, a)$ , в силу теореми 3, задовольняють співвідношенню:

$$B_n((\cdot - x)f(\cdot), x, a) = \frac{v(x, a)}{2n} \frac{d}{dx} B_n(f(\cdot), x, a),$$

де  $v(x, a) = x(1-2x) + b(x, a)$ , а тому оператори належать до класу  $\mathbf{B}$  (див.[2]), і, отже, результати цієї роботи можна застосувати й до операторів  $B_n(y, x, a)$ .

Якщо  $a=0$ , то  $B_n(y, x, 0) = B_n(f, x)$  – звичайні многочлени Бернштейна функції  $f(2t)$ , а якщо  $a=1$ , то це многочлени Бернштейна  $B_{2n}(f, x)$ .

**Теорема 4.** *Нехай функція  $f$  неперервна на проміжку  $[0, 1]$  і її модуль непервності  $\omega(\delta)$  опуклий (вгору). Тоді*

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \omega\left(\sqrt{\frac{v(x, a)}{2n}}\right).$$

**Доведення.**

$$\begin{aligned} |B_n(f, x, a) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{2n} \left| f\left(\frac{k}{2n}\right) - f(x) \right| C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2n} \omega\left(\left|\frac{k}{2n} - x\right|\right) C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \end{aligned}$$

$$\leq \omega \left( \left( \sum_{k=0}^{2n} \left( \frac{k}{2n} - x \right)^2 C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \right)^{1/2} \right) = \omega \left( \sqrt{\frac{v(x, a)}{2n}} \right).$$

**Наслідок 6.** Для всякого  $x$  з проміжку  $[0, 1]$

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \omega \left( \frac{1}{2\sqrt{(a+1)n}} \right), \text{ якщо } 0 \leq a \leq 2,$$

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \omega \left( \frac{a}{2\sqrt{(a^2-1)n}} \right), \text{ якщо } a > 2.$$

Дійсно,

$$\frac{d}{dx} v(x, a) = (1-2x) \left( 2 - \frac{a}{\sqrt{1+(a^2-1)(2x-1)^2}} \right),$$

а звідси випливає: якщо  $0 \leq a \leq 2$ , то найбільше значення функції  $v(x, a)$  досягається в точці  $x=0,5$ ; якщо  $a > 2$ , то найбільше значення функції досягається в точках  $0,5 \pm 0,25\sqrt{(a^2-4)(a^2-1)}$ .

**Наслідок 6.** Нехай виконуються умови теореми 4. Тоді

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \omega \left( \sqrt{\frac{2x(1-x)}{n} \left( \frac{|2x-1|}{1+|2x-1|} + \frac{1}{a} \right)} \right).$$

*Доведення.* Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial a} v(x, a) = -\frac{8x^2(1-x)^2}{w(a+w)^2} \leq 0,$$

то при кожному фіксованому  $x$  функція  $v(x, a)$ , як функція від  $a$ , спадає і

$$\lim_{a \rightarrow \infty} v(x, a) = \frac{2x(1-x)|2x-1|}{1+|2x-1|}.$$

Тому

$$v(x, a) = 2x(1-x) \left( \frac{|2x-1|}{1+|2x-1|} + \left( \frac{w}{a+w} - \frac{|2x-1|}{1+|2x-1|} \right) \right) \leq 2x(1-x) \left( \frac{|2x-1|}{1+|2x-1|} + \frac{1}{a} \right).$$

Звернемо увагу на те, що похибка наближення зменшується не тільки біля кінців проміжку  $[0, 1]$  (як у випадку многочленів Бернштейна), але і в околі середини проміжка при збільшенні параметра  $a$ .

Для отримання точних оцінок порядку наближення функцій операторами  $B_n(f, x, a)$  у випадку довільного модуля неперервності скористаємося результатами Сіккеми з роботи [3](стор.74-75). Після відповідних обчислень отримаємо такий результат.

**Теорема 5.** Нехай  $\omega(\delta)$  модуль неперервності функції  $f(x)$ . Тоді

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq$$

$$\left( 1 + \sum_{k=0}^{2n} \left[ \sqrt{2n} \left| \frac{k}{2n} - x \right| \right] C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \leq K(a) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$

де

$$K(a) = 1 + \begin{cases} K1(a), \text{ якщо } a_1 \leq a \leq a_2 \\ K2(a), \text{ якщо } 0 \leq a \leq a_1 \text{ або } a \geq a_2 \end{cases},$$

$$K1(a) = b\left(\frac{5-\sqrt{6}}{6}, a\right)^3 + 6a \sqrt{b\left(\frac{5-\sqrt{6}}{6}, a\right)^5 b\left(\frac{1+\sqrt{6}}{6}, a\right) + b\left(\frac{1+\sqrt{6}}{6}, a\right)^3},$$

$$K2(a) = b\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, a\right)^3 + 6a \sqrt{b\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, a\right)^5 b\left(\frac{6-\sqrt{6}}{6}, a\right) + b\left(\frac{6-\sqrt{6}}{6}, a\right)^3},$$

$a_1=0.319483292\dots, a_2=2.147963138\dots$  корені рівняння  $K1(a)=K2(a)$ .

Зокрема, якщо  $a=1$ , то отримуємо константу Сіккери ([3], стор.63)

$$\kappa = 1 + K1(1) = \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} = 1.089887331\dots$$

Якщо функція диференційовна на проміжку  $[0,1]$ , то має місце таке твердження.

**Теорема 6.** Нехай  $\omega_1(\delta)$  модуль неперервності функції  $f'(x)$ . Тоді

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq c_n(x, a) \omega_1(x),$$

де

$$c_n(x, a) = \frac{1}{2} x(1-2x) + \frac{1}{2} b(x, a) + \frac{1}{2n} (2nx - [2nx])(1-2nx + [2nx]).$$

Крім того,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} c_n(x, a) = \frac{1}{2} b\left(\frac{1}{2} + t, a\right) + \frac{1}{2} t - (2n+1)t^2,$$

де  $t$  єдиний дійсний корінь рівняння

$$1 + \frac{at}{\sqrt{1+4(a^2-1)t^2}} = 2(1+2n)t.$$

А звідси

$$\max_{0 \leq x \leq 1} c_n(x, a) \leq \frac{1}{4(a+1)} + \frac{1}{8n}, \text{ якщо } 0 \leq a \leq 2,$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} c_n(x, a) \leq \frac{a^2}{16(a^2-1)} + \frac{1}{8n}, \text{ якщо } a > 2.$$

Таблиця значень  $\max_{0 \leq x \leq 1} c_n(x, a)$ 

$n \backslash a$	1	2	3	4	5
1	0.225000	0.201106	0.194045	0.191281	0.189949
2	0.180556	0.145188	0.130633	0.123699	0.120005
3	0.163462	0.124863	0.107267	0.097953	0.092575
4	0.154412	0.114539	0.095617	0.085076	0.078666
5	0.148810	0.108315	0.088729	0.077524	0.070505
6	0.145000	0.104158	0.084198	0.072609	0.065208
7	0.142241	0.101186	0.080997	0.069168	0.061527
8	0.140152	0.098955	0.078616	0.066631	0.058829
9	0.138514	0.097220	0.076778	0.064684	0.056770
10	0.137195	0.095832	0.075315	0.063143	0.055149

Випишемо ще одне твердження, як частинний випадок більш загального, яке було отримано в [2] (стор. 668, співвідношення (31)).

**Теорема 7.** Нехай функція  $f$  має неперервні похідні до  $(m+2)$ -го порядку включно. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{d^m}{dx^m} B_n(f, x, a) - f^{(m)}(x) \right) = \frac{1}{2} \frac{d^m}{dx^m} (f^{(m)}(x) v(x, a)).$$

#### 4. Узагальнені криві Без'є

**Означення 2.** Нехай

$$\{A\} = \{A_0(x_0, y_0, z_0), A_1(x_1, y_1, z_1), \dots, A_{2n}(x_{2n}, y_{2n}, z_{2n})\}$$

множиса контрольних точок у просторі,  $\{x\}$  множина абсцис,  $\{y\}$  множина ординат,  $\{z\}$  множина аплікат цих точок.

Узагальненою кривою Без'є, яка породжена послідовністю  $\{A\}$ , називається крива з параметричними рівняннями

$$(x(t), y(t), z(t)) = (B_n(x, t, a), B_n(y, t, a), B_n(z, t, a)), 0 \leq t \leq 1.$$

**Теорема 8.** Нехай  $A_0(t=0)$  початкова точка кривої Без'є, а  $A_{2n}(t=1)$  кінцева точка. Тоді відрізки  $A_0A_1, A_{2n-1}A_{2n}$  дотикаються до кривої, відповідно, в точках  $A_0, A_{2n}$ .

Дійсно, вектор

$$\left( \left. \frac{d}{dt} B_n(x, t, a) \right|_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} B_n(y, t, a) \right|_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} B_n(z, t, a) \right|_{t=0} \right) \\ = (2n(x_1 - x_0), 2n(y_1 - y_0), 2n(z_1 - z_0))$$

колінеарний до вектора  $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ , а вектор

$$\left( \left. \frac{d}{dt} B_n(x, t, a) \right|_{t=1}, \left. \frac{d}{dt} B_n(y, t, a) \right|_{t=1}, \left. \frac{d}{dt} B_n(z, t, a) \right|_{t=1} \right) \\ = (2n(x_{2n} - x_{2n-1}), 2n(y_{2n} - y_{2n-1}), 2n(z_{2n} - z_{2n-1}))$$

колінеарний до вектора  $(x_{2n} - x_{2n-1}, y_{2n} - y_{2n-1}, z_{2n} - z_{2n-1})$ .

### 5. Багатовимірна узагальнена генератриса Без'є

Нехай  $x = (x_1, \dots, x_m)$  точка в  $m$ -мірному просторі,  $|x| = x_1 + \dots + x_m$ ,  $k = (k_1, \dots, k_m)$  -  $m$ -мірний індекс,  $|k| = k_1 + \dots + k_m$ ,  $k! = k_1! \dots k_m!$ ,  $x^k = x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$ ,  $T_m$  - одиничний  $m$ -мірний симплекс.

**Означення 3.** Нехай  $a \geq 0$ ,  $n$  - натуральне число,  $\{y\} = \{y_k\}, 0 \leq |k| \leq 2n$ , довільна  $m$  - кратна послідовність,  $x \in T_m$ . Функція

$$B_n(y, x, a) := \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k C(n, |k|, a) \frac{|k|!}{k!} b(|x|, a)^{|k|/2} b(1 - |x|, a)^{n - |k|/2}$$

називається узагальненою  $m$ -мірною генератрисою Без'є послідовності  $\{y\}$ .

**Теорема 9.** Нехай  $V(x, a) = \{v_{ij}\}$  матриця з елементами

$$v_{ij} = \delta_{ij} x_i - x_i x_j \frac{|x| - v(|x|, a)}{|x|^2}, i, j = 1, \dots, m.$$

Тоді

$$V(x, a) \cdot \begin{pmatrix} \partial B_n(y, x, a) / \partial x_1 \\ \dots \\ \partial B_n(y, x, a) / \partial x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n((k_1 - 2nx_1)y, x, a) \\ \dots \\ B_n((k_m - 2nx_m)y, x, a) \end{pmatrix}.$$

*Доведення.* Введемо позначення:

$$p_k(x) := C(n, |k|, a) \frac{|k|!}{k!} \left( \frac{x}{|x|} \right)^k b(|x|, a)^{|k|/2} b(1 - |x|, a)^{n - |k|/2}.$$

Тоді

$$B_n(y, x, a) = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k p_k(x), \quad \partial B_n(y, x, a) / \partial x_j = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k \partial p_k(x) / \partial x_j = \\ = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k \left( \frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) p_k(x), j = 1, 2, \dots, m.$$

Знайдемо добуток  $i$ -го рядка матриці  $V$  на стовпець  $dB_n(y, x, a) / dx, i = 1, 2, \dots, m$ .

Отримаємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} x_i y_k \left( \frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) p_k(x) - \\ & \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k p_k(x) \sum_{j=1}^m x_i x_j \left( \frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) \frac{|x| - v(|x|, a)}{|x|^2} \\ & = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} x_i y_k p_k(x) \left( \frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \left( 1 - \frac{|x| - v(|x|, a)}{|x|^2} \right) \right) \\ & = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} x_i y_k p_k(x) \left( \frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k p_k(x) (k_i - 2nx_i) \\ & = B_n((k_i - 2nx_i)y, x, a), \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

Нехай на симплексі  $T_m$  задана неперервна функція  $y=f(x)$ . Тоді, як і в одновимірному випадку, оператори

$B_n(y, x, a), \{y\} = \{f(k_1/(2n), \dots, f(k_m/(2n))\}, 0 \leq k_1 + \dots + k_m \leq 2n$ , можуть служити для апроксимації функції  $f$  на симплексі  $T_m$ . Якщо  $a=1$ , то  $B_n(y, x, 1) = B_{2n}(y, x)$  симплеціальні поліноми Бернштейна. Через те, що оператори  $B_n(y, x, a)$  задовольняють співвідношення

$$V(x, a) \cdot \frac{d}{dx} B_n(y, x, a) = 2n B_n((\cdot - x)f(\cdot), x, a),$$

то вони - оператори типу **B**. Їхні властивості вивчені в [4].

#### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Шенен П., Коснар М., Гардан И. и др., *Математика и САПР: кн.1* – М.:Мир, 1988.-204.
2. Волков Ю.И., О некоторых линейных положительных операторах. – *Матем. заметки*, 1978, т.23, №5, с.659-669.
3. Sikkema P.C. and van der Meer P.J.C., The exact degree of local approximation involving the modulus of continuity. – *Proc.Kon.ned.akad.wetensch*, 1979, A82, №1, p.63-76.
4. Волков Ю.И., Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега-Стилтьеса. – *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, 1983, т.47, №3, с.435-454.