УДК 532.59

# УМОВИ ЛІНІЙНОЇ СТІЙКОСТІ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

**О.В.Авраменко, В.В.Нарадовий**

Методом багатомасштабних розвинень отримано перші три наближення нелінійної задачі поширення хвильових пакетів на поверхні контакту двох рідких середовищ та на вільній поверхні. Знайдено розв'язки задачі першого наближення, виведене дисперсійне рівняння.

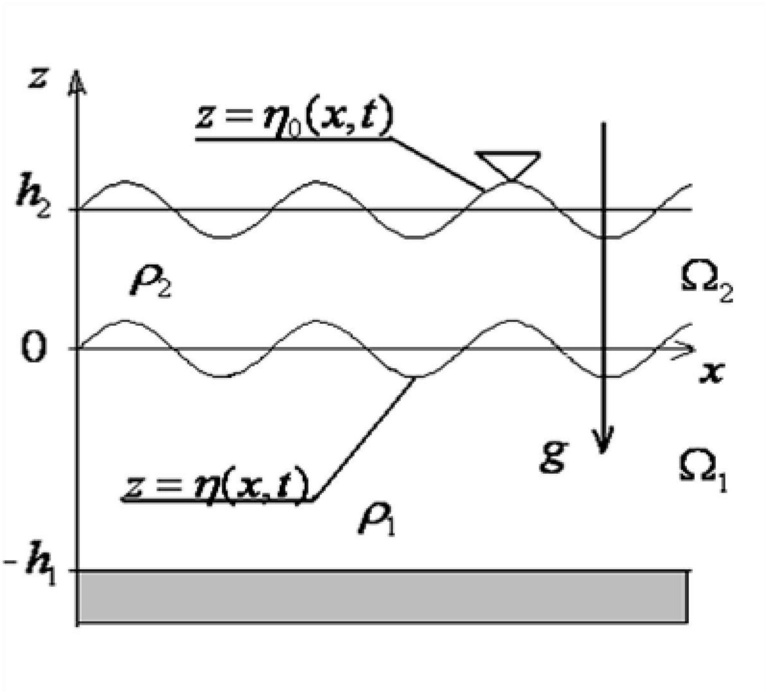
The first three linear approximation problems of the non-linear problem of wave-packets propagation along the interface of two fluids and free surface are founded by the method of multiply scales. Solutions of the first problem and the dispersion equation are obtained.

**Вступ.** Останні дослідження у області нелінійної гідромеханіки, зокрема у застосуванні такого поширеного математичного методу, як метод багатомасштабних розвинень, стикнулися з проблемою обчислень наступних членів у еволюційних рівняннях. Ця проблема пояснюється як недостатньо розробленим алгоритмом, так і підвищеною громіздкістю аналітичних перетворень.

До теперішнього часу у переважній кількості задач механіки і фізики, де застосовувався метод багатомасштабних розвинень, були отримані результати тільки до третього порядку. Серед них можна особливо виділити клас задач, що враховують поверхневий натяг, що істотно впливає на капілярно - гравітаційні хвилі, де важливий внесок високих гармонік у хвильовий процес у цілому. В публікаціях [1], [3], [5]-[9] досліджено двошарові системи вигляду "півпростір - півпростір", "шар - півпростір" до четвертого наближення та систему "шар - шар" до третього наближення, а також вироблено обґрунтування методологічних нюансів методу багатомасштабних розвинень. Аналіз попередніх досліджень показує, що більшість задач поширення хвильових пакетів вздовж поверхні контакту в рамках слабко нелінійних моделей стосувалися двошарових рідин, при цьому вивчались поверхневі або внутрішні хвильові пакети. Зараз особливий інтерес викликають дослідження не тільки поширення окремих хвильових пакетів, а і взаємодію внутрішніх та поверхневих хвиль. Наближення «твердої кришки» достатньо обґрунтоване в рамках окремих моделей хвильових рухів, але межі його достовірності для гравітаційно-капілярних хвиль в рамках слабко нелінійної моделі також становить значний інтерес.

У даній роботі розглядається нова слабко нелінійна задача поширення хвильових пакетів у гідродинамічній системі, яка складається з двох рідин з різними властивостями, верхня з яких обмежена згори вільною поверхнею. Створюються умови для поширення хвильових пакетів як на вільній поверхні, так і на поверхні контакту рідин. На обох поверхнях враховується сила поверхневого натягу середовищі з урахуванням поверхневого натягу.

**1. Постановка задачі та метод розв'язання.** В роботі досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту рідкого шару з густиною $\rho_1$ та верхнього рідкого шару з густиною $\rho_2$. Шари розділені поверхнею контакту $z=\eta(x,t)$, а верхній шар обмежений згори вільною поверхнею $z=\eta_0(x,t)$. При розв'язанні враховуємо сили поверхневого натягу на поверхні контакту та на вільній поверхні. Сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному $z$-напрямку. Нижче представимо математичну постановку задачі.




Швидкість поширення пакетів у відповідних областях виражаються через градієнти потенціалів і повинні задовольняти рівнянням руху,

$$\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z^2}=0 \quad \text{у} \quad \Omega_j,\ j=1,2, \tag{1}$$

кінематичні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \quad \text{при} \quad z=\eta(x,t),\ j=1,2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\eta_0}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=-\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \quad \text{при} \quad z=\eta_0(x,t), \tag{3}$$

динамічні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}-\rho\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+(1-\rho)\eta+\frac{1}{2}(\nabla\varphi_1)^2-\frac{1}{2}\rho(\nabla\varphi_2)^2-$$

$$-T\left(1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \quad z=\eta(x,t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\eta_0+\frac{1}{2}(\nabla\varphi_2)^2-T_0\left(1+\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \quad z=\eta_0(x,t), \tag{5}$$

гранична умова на дні

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1 . \tag{6}$$

Введемо безрозмірні величини за допомогою характерної довжини $L$, що рівна товщині верхнього шару $h_2$, максимального відхилення вільної поверхні $a$, характерного часу $(L/g)^{1/2}$, густини нижньої рідини $\rho_1$, де $g$ прискорення вільного падіння. Перейдемо до безрозмірних величин, які позначимо зірочкою,

$$(x,z) = L(x^*, z^*), \qquad t = \sqrt{\frac{L}{g}} t^*, \quad \rho_2 = \rho_1 \rho^*, \qquad (\eta, \eta_0) = a(\eta^*, \eta_0^*),.$$

$$\varphi = \frac{La}{\sqrt{L/g}} \varphi^*, \qquad (T, T_0) = L^2 \rho_1 g (T^*, T_0^*). \tag{7}$$

Позначивши величину $\frac{a}{L} = \alpha$ та використавши формули (7) перепишемо систему (1)-(6) у безрозмірних змінних

$$\frac{\partial^2 \varphi_j^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j^*}{\partial z^2} = 0 \quad \text{у} \quad \Omega_j,\ j = 1,2\ , \tag{8}$$

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial z^*} = -\alpha \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial x^*} \quad \text{при} \quad z^* = \alpha \eta^*(x,t), \quad j=1,2\ , \tag{9}$$

$$\frac{\partial \eta_0^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z^*} = -\alpha \frac{\partial \eta_0^*}{\partial t^*} \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z^*} \quad \text{при} \quad z^* = \alpha \eta_0^*(x,t), \tag{10}$$

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t^*} - \rho^* \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} + (1-\rho^*)\eta^* + \frac{1}{2}\alpha \left(\nabla \varphi_1^*\right)^2 - \frac{1}{2}\alpha \rho^* \left(\nabla \varphi_2^*\right)^2 -$$

$$- T^* \left(1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad \text{при } z^* = \alpha \eta^*(x,t), \tag{11}$$

$$\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} + \eta^* + \frac{1}{2}\alpha \left(\nabla \varphi_2^*\right)^2 - T_0^* \left(1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x^*}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta_0^*}{\partial x^{*2}} = 0 \text{ при } z^* = \alpha \eta_0^*(x,t), \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{при} \quad z^* = -h_1^* = -\frac{h_1}{L}, \tag{13}$$

$\alpha$ – коефіцієнт нелінійності [2].

Для розв'язування задачі використаємо метод багатомасштабних розвинень до третього порядку (в подальшому зірочки опускаємо) [4]. Представимо шукані функції відхилення поверхні контакту, відхилення вільної поверхні та потенціали швидкостей у вигляді

$$\eta(x,t)=\sum_{n=1}^{3}\alpha^{n-1}\eta_n(X_0,X_1,X_2,T_0,T_1,T_2)+O(\varepsilon^4)\ ,$$

$$\eta_0(x,t)=\sum_{n=1}^{3}\alpha^{n-1}\eta_{0n}(X_0,X_1,X_2,T_0,T_1,T_2)+O(\varepsilon^4)\ , \tag{14}$$

$$\varphi_j(x,z,t)=\sum_{n=1}^{3}\alpha^{n-1}\varphi_{jn}(X_0,X_1,X_2,z,T_0,T_1,T_2)+O(\varepsilon^4),\qquad j=1,2\ . \tag{15}$$

Швидкий масштаб $t_0$ и короткий масштаб $x_0$ характеризують частоту та довжину хвилі, відповідно. Повільні масштаби $t_1$, $t_2$ та довгі масштаби $x_1$, $x_2$ характеризують часові та просторові зміни фази та амплітуди хвилі.

**2. Три лінійні наближення нелінійної задачі.** Підставивши формули (14)-(15) в систему (8)-(13), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях α отримуємо три лінійні наближення нелінійної задачі (8)-(13).

*Перше наближення (при α):*

$$\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial X_0^2}+\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial z^2}=0\qquad \text{у}\ \Omega_1\ , \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial X_0^2}+\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial z^2}=0\qquad \text{у}\ \Omega_2\ , \tag{17}$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}=0\qquad \text{при}\quad z=0\ , \tag{18}$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial z}=0\qquad \text{при}\ z=0\ , \tag{19}$$

$$\frac{\partial\eta_{01}}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial z}=0\qquad \text{при}\ z=h_2\ , \tag{20}$$

$$\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial T_0}-\rho\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial T_0}+(1-\rho)\eta_1-T\frac{\partial^2\eta_1}{\partial X_0^2}=0\qquad \text{при}\ z=0\ , \tag{21}$$

$$\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial T_0}+\eta_{01}-T\frac{\partial^2\eta_{01}}{\partial X_0^2}=0\qquad \text{при}\ z=h_2\ , \tag{22}$$

$$\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}=0\qquad \text{при}\quad z=-h_1\ . \tag{23}$$

*Друге наближення (при $\alpha^2$):*

$$\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial X_0^2}+\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial X_0\partial X_1}=0\qquad \text{у}\quad \Omega_1\ , \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial X_0^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial X_0\partial X_1}=0\qquad \text{у}\quad \Omega_2\ , \tag{25}$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial T_1}+\frac{\partial\eta_2}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z}-\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial z^2}=-\frac{\partial\eta_1}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial X_0}\quad \text{при } z=0\ , \tag{26}$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial T_1}+\frac{\partial\eta_2}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial z}-\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial z^2}=-\frac{\partial\eta_1}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}\quad \text{при } z=0\ , \tag{27}$$

$$\frac{\partial\eta_{01}}{\partial T_1}+\frac{\partial\eta_{02}}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial z}-\eta_{01}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial z^2}=-\frac{\partial\eta_{01}}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}\quad \text{при } z=h_2\ , \tag{28}$$

$$\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial T_0}+\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial T_0\partial z}-\rho\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial T_0}+\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial T_0\partial z}\right)+(1-\rho)\eta_2+$$
$$+0.5\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial X_0}\right)^2+0.5\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}\right)^2-\rho\left(0.5\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}\right)^2+0.5\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial z}\right)^2\right)-$$
$$-T\left(\frac{\partial^2\eta_2}{\partial X_0^2}+2\frac{\partial^2\eta_1}{\partial X_0\partial X_1}\right)=0\qquad \text{при } z=0\ , \tag{29}$$

$$\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial T_0}+\eta_{01}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial T_0\partial z}+\eta_{02}+0.5\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}\right)^2+0.5\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial z}\right)^2-$$
$$-T_0\left(\frac{\partial^2\eta_{02}}{\partial X_0^2}+2\frac{\partial^2\eta_{01}}{\partial X_0\partial X_1}\right)=0\qquad \text{при } z=h_2\ , \tag{30}$$

$$\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z}=0\qquad \text{при}\quad z=-h_1. \tag{31}$$

*Третє наближення (при $\alpha^3$):*

$$\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial X_0^2}+\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial X_1^2}+\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial X_0\partial X_1}+2\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial X_0\partial X_2}=0\quad \text{у}\quad \Omega_1, \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial X_0^2}+\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial X_1^2}+\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial X_0\partial X_1}+2\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial X_0\partial X_2}=0\quad \text{у}\quad \Omega_2, \tag{33}$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial T_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial T_2}+\frac{\partial\eta_3}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial z}-\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial z^2}-\eta_2\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial z^2}-0.5\eta_1^2\frac{\partial^3\varphi_{11}}{\partial z^3}=-\frac{\partial\eta_1}{\partial X_1}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial X_0}-$$
$$-\frac{\partial\eta_2}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial X_0}-\frac{\partial\eta_1}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial X_1}-\frac{\partial\eta_1}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial X_0}-\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial X_0}\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial X_0\partial z}\quad \text{при } z=0\ , \tag{34}$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial T_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial T_2}+\frac{\partial\eta_3}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial z}-\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial z^2}-\eta_2\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial z^2}-0.5\eta_1^2\frac{\partial^3\varphi_{21}}{\partial z^3}=-\frac{\partial\eta_1}{\partial X_1}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}-$$

$$-\frac{\partial\eta_2}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}-\frac{\partial\eta_1}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_1}-\frac{\partial\eta_1}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial X_0}-\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial X_0}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial X_0\partial z}\quad \text{при } z=0\ , \qquad (35)$$

$$\frac{\partial\eta_{02}}{\partial T_1}+\frac{\partial\eta_{01}}{\partial T_2}+\frac{\partial\eta_{03}}{\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial z}-\eta_{01}\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial z^2}-\eta_{02}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial z^2}-0.5\eta_{01}^2\frac{\partial^3\varphi_{21}}{\partial z^3}=$$

$$=-\frac{\partial\eta_{01}}{\partial X_1}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}-\frac{\partial\eta_{02}}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}-\frac{\partial\eta_{01}}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_1}-\frac{\partial\eta_{01}}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial X_0}-\eta_{01}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial X_0\partial z}\frac{\partial\eta_{01}}{\partial X_0}$$

$$\text{при } z=h_2\ , \qquad (36)$$

$$\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial T_2}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial T_0}+\eta_2\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial T_0\partial z}+\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial T_1\partial z}+0.5\eta_1^2\frac{\partial^3\varphi_{11}}{\partial T_0\partial z^2}-$$

$$-\rho\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial T_2}+\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial T_0}+\eta_2\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial T_0\partial z}+\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial T_1\partial z}+0.5\eta_1^2\frac{\partial^3\varphi_{21}}{\partial T_0\partial z^2}\right)+$$

$$+\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial T_0\partial z}+(1-\rho)\eta_3+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial X_1}+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial X_1}+\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial X_0\partial z}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial X_0}+$$

$$+\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z}+\eta_1\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial z^2}--\rho\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial T_0\partial z}-\rho\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_1}-\rho\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial X_1}-$$

$$-\rho\eta_1\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial X_0\partial z}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}-\rho\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial z}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial z}-\rho\eta_1\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial z^2}-T\frac{\partial^2\eta_3}{\partial X_0^2}-T\frac{\partial^2\eta_1}{\partial X_1^2}-$$

$$-2T\frac{\partial^2\eta_2}{\partial X_0\partial X_1}-2T\frac{\partial^2\eta_1}{\partial X_0\partial X_2}-1.5T\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial X_0}\right)^2\frac{\partial^2\eta_1}{\partial X_0^2}=0 \qquad \text{при } z=0\ , \qquad (37)$$

$$\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial T_2}+\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial T_0}+\eta_{02}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial T_0\partial z}+\eta_{01}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial T_1\partial z}+0.5\eta_{01}^2\frac{\partial^3\varphi_{21}}{\partial T_0\partial z^2}+$$

$$+\eta_{01}\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial T_0\partial z}+\eta_{03}+\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_1}+\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial X_{01}}+\eta_{01}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial X_0\partial z}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial X_0}+$$

$$+\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial z}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial z}+\eta_{01}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial z^2}-T_0\frac{\partial^2\eta_{03}}{\partial X_0^2}-$$

$$-T_0\frac{\partial^2\eta_{01}}{\partial X_1^2}-2T_0\frac{\partial^2\eta_{02}}{\partial X_0\partial X_1}-T_0\frac{\partial^2\eta_{01}}{\partial X_0\partial X_2}-1.5T_0\left(\frac{\partial\eta_{01}}{\partial X_0}\right)^2\frac{\partial^2\eta_{01}}{\partial X_0^2}=0,$$

$$\text{при } z=h_2\ , \qquad (38)$$

$$\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial z} = 0, \qquad \text{при} \quad z = -h_1 \,. \tag{39}$$

**3. Розв'язки першої лінійної задачі та дисперсійне рівняння.** Розв'язок першої лінійної задачі (16)-(21) знайдено методом невизначених коефіцієнтів.

Невідомі функції шукаємо у вигляді

$$\varphi_{11} = \left( ae^{i\theta} + \bar{a}\, e^{-i\theta} \right) \mathrm{ch}(k(h_1 + z)) + \left( be^{i\theta} + \bar{b}\, e^{-i\theta} \right) \mathrm{sh}(k(h_1 + z)), \tag{40}$$

$$\varphi_{21} = \left( ce^{i\theta} + \bar{c}\, e^{-i\theta} \right) \mathrm{ch}(k(h_2 - z)) + \left( de^{i\theta} + \bar{d}\, e^{-i\theta} \right) \mathrm{sh}(k(h_2 - z)), \tag{41}$$

де $\theta = kx_0 - \omega t_0$, $k$ – хвильове число центру хвильового пакету, $\omega$ – частота центру хвильового пакету.

Підставляючи (40) у (18), і враховуючи (23) отримуємо

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial T_0} = k\left( ae^{i\theta} + \bar{a}\, e^{-i\theta} \right) \mathrm{sh}(kh_1),$$

звідки отримуємо, що

$$\eta_1 = -\frac{k}{i\omega}\left( ae^{i\theta} + \bar{a}\, e^{-i\theta} \right) sh(kh_1)\,.$$

Введемо позначення

$$A = -\frac{k}{i\omega} a\, \mathrm{sh}(kh_1), \quad \overline{A} = -\frac{k}{i\omega} \overline{a}\, \mathrm{sh}(kh_1),$$

тоді можна записати наступне

$$\eta_1 = Ae^{i\theta} + \overline{A}\, e^{-i\theta} \tag{42}$$

$$\varphi_{11} = -\frac{i\omega}{k}(Ae^{i\theta} - \overline{A}\, e^{-i\theta}) \frac{\mathrm{ch}(k(h_1 + z))}{\mathrm{sh}(kh_1)}\,. \tag{43}$$

Підставимо (41) в (20) та отримаємо

$$\eta_{01} = De^{i\theta} + \overline{D}e^{-i\theta}, \text{ де } D = \frac{k}{i\omega} d, \quad \overline{D} = -\frac{k}{i\omega} \overline{d}\,. \tag{44}$$

Підставивши вирази (41) та (44) у (22), та враховуючи співвідношення (19), отримаємо, що:

$$\varphi_{12} = \frac{i\omega}{k} \left( \frac{\omega^2\, \mathrm{sh}(k(h_2 - z)) - (k + T_0 k^3)\, \mathrm{ch}(k(h_2 - z))}{\omega^2\, \mathrm{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3)\, \mathrm{sh}(kh_2)} \right) \left( Ae^{i\theta} - \overline{A}\, e^{-i\theta} \right), \tag{45}$$

$$\eta_{01} = \left( \frac{\omega^2}{\omega^2\, \mathrm{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3)\, \mathrm{sh}(kh_2)} \right) \left( Ae^{i\theta} + \overline{A}\, e^{-i\theta} \right). \tag{46}$$

Отже, отримано розв'язки першої лінійної задачі у вигляді (42)-(46). Підставимо знайдені розв'язки в співвідношення (21) й отримаємо дисперсійне рівняння, що пов'язує між собою частоту та хвильове число центру хвильового пакету

$$\omega^4(\rho+\mathrm{cth}(kh_1)\,\mathrm{cth}(kh_2))-\omega^2[\mathrm{cth}(kh_1)(k+T_0k^3)+\mathrm{cth}(kh_2)(k+T_0k^3)+ \\ +\mathrm{cth}(kh_2)(k-\rho k+Tk^3)]+(k-\rho k+Tk^3)(k+T_0k^3)=0 \qquad (47)$$

Дисперсійне рівняння (47) задає умови поширення лінійно стійких хвильових пакетів у розглядуваній гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею».

Достовірність отриманого дисперсійного співвідношення (47) підтверджують виконання відповідних граничних переходів та порівняння його з аналогічними результатами для гідродинамічних систем «шар-шар» [8], «півпростір-півпростір» [5], «півпростір з вільною поверхню» [9]

**Висновки.** Представлено перші три лінійні наближення нової слабко нелінійної задачі про поширення хвильових пакетів у двошаровій гідродинамічній системі, яка знизу обмежена твердим дном, а згори – вільною поверхнею. В результаті аналізу першої лінійну задачі отримано вирази для потенціалів швидкостей у верхньому та нижньому шарах, а також вирази для відхилень вільної поверхні та поверхні контакту рідких середовищ. Отримано дисперсійне рівняння, яке задає умови лінійної стійкості хвильових пакетів у розглядуваній системі.

## БІБЛІОГРАФІЯ


1. Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Особливості хвильових пакетів у двошаровій рідині // Каразінські природознавчі студії. Матеріали міжнародної наукової конференції 14-16 червня 2004 р. – Харків: Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2004. – С.168.
2. Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Фізичний зміст параметру багатомасштабного розвинення // Наукові записки.- Випуск 66. – Серія: Математичні науки: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2007. - С. 3-5.
3. Авраменко О.В., Селезов И.Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред // Прикладна гідромеханика.- 2002.- Т.4(76), №4.- С.3-13.
4. Найфэ А. Методы возмущений.- М.: Мир, 1976.
5. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладна гідромеханика.- 2001.- Т.3(75), №.4.- С.38-46.
6. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта // Мат. методи та фіз.-мех. поля.- 2000.- 44, №2. - С. 113-122.
7. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – Том 7(79), № 1. - С. 80-89.
8. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. Устойчивость волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе //Прикладна гідромеханіка. - 2006, - 8(90), №4. - С.60-65.
9. Nayfeh A.H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME., Ser. E.- 1976.- 43, N4.- P. 584-588.