На рис. 3б зображений годограф при $R_0=2.8$. Таким чином, мірою нестійкості є число *1.8*.

Висновки. 1. Запропоновано отримання матриці монодромії, використовуючи чисельні методи.

2. За принципом аргументу побудовано простий критерій стійкості систем з періодичною матрицею.

3. Розроблені відповідні алгоритми і програми.

4. Уводяться поняття запасу стійкості μ та міри нестійкості M, та пропонуються алгоритми їх відшукання.

5. Наведені численні приклади.

6. Результати можуть бути використані також і для аналізу стійкості систем зі сталою матрицею.

7. Отримані результати можуть бути використані для аналізу та синтезу конкретних електромеханічних систем та в навчальному процесі.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

2. Одинцова В., Синицкий Л. Об устойчивости параметрических систем второго порядка //Сб. труд. конф. «Моделирование – 2006», т. 2. – Киев: ИПМЭ, 2006. – С. 347 – 348.

3. Филер З.Е., Колманович В.Ю. Об устойчивости систем линейных автономных дифференциальных уравнений//Динамика и прочность тяжелых машин, вып. 6. -- Днепропетровск: ДГУ, 1982. – С. 183-187.

УДК 512.552.1

НАПІВСПАДКОВІ БАГАТОРЯДНІ КІЛЬЦЯ

Ю.В.Яременко

Описано структуру напівспадкових багаторядних кілець.

The structure of semihereditary multiserial rings is described.

Важливим напрямком теорії кілець являється проблематика виділення і вивчення класів тих кілець, які можна охарактеризувати властивостями модулів над ними.

Одним з основних понять теорії кілець та модулів є поняття простого модуля, тобто модуля, у якого решітка усіх підмодулів є двоелементним ланцюгом. Класично напівпрості кільця характеризуються тим, що усі модулі над ними напівпрості, тобто розкладаються в прямі суми простих модулів. Кільця, над якими всі нерозкладні модулі прості, охарактеризовані класичною теоремою Веддербарна-Артина.

Більш широкий клас модулів – клас ланцюгових модулів, тобто модулів, у яких решітка усіх підмодулів є ланцюгом – розглядали Кете, Асано, Накаяма, Скорняков і ін. Відповідним розширенням класу напівпростих модулів є напівланцюгові модулі, тобто прямі суми ланцюгових модулів.

Напівланцюгові кільця займають важливе місце в теорії кілець. Вони є напівдосконалими кільцями, над якими всі нерозкладні праві й ліві проективні модулі мають лінійну структуру підмодулів. Ці кільця характеризуються тим, що над ними всі скінчено зображувані модулі напівланцюгові. Цей клас кілець має безпосереднє використання в деяких питаннях лінійної алгебри і теорії абелевих груп.

Важливим узагальненням напівланцюгових кілець являються бірядні кільця. Поняття артинового бірядного кільця введено Фуллером в роботі [1] у зв'язку з вивченням кілець дистрибутивно модульного типу. Клас артинових бірядних кілець містить узагальнено однорядні кільця Накаями, розщепимі групові алгебри скінченного модульного типу та кільця дистрибутивно модульного типу. У роботі [2] введені бірядні напівдосконалі кільця без будь-яких обмежень скінченності. Структура спадкових , напівспадкових бірядних кілець та кускових бірядних областей вказана у роботах [3,4].

Узагальненням бірядних кілець являються багаторядні кільця [5].

При вивченні напівланцюгових та бірядних кілець широко використовується метод сагайдаків. Поняття сагайдака скінченновимірної алгебри над полем було введене Габріелем у зв'язку з вивченням зображень алгебр, квадрат радикала яких дорівнює нулю. Це поняття, перенесене на напівдосконалі кільця В.В.Кириченко, відіграє важливу роль в структурній теорії напівдосконалих кілець. Наприклад, за допомогою сагайдаків та первинних сагайдаків були повністю описані нетерові напівланцюгові кільця, нетерові справа напівланцюгові кільця, спадкові справа напівланцюгові кільця, спадкові та напівспадкові бірядні кільця, кускові бірядні області і ін.

Нерозкладний модуль M називається *n-рядним* [5], якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі $K_1, \ldots, K_n$ (можливо і нульові) такі, що $K_1 + \ldots + K_n$ є M, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_i \cap K_j$, $i \neq j$, – нуль або простий модуль.

Має місце наступний критерій дистрибутивності модуля.

Теорема 1 [6]. *Модуль дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли кожен його фактормодуль містить у своєму цоколі з точністю до ізоморфізму не більше одного примірника кожного простого модуля.*

Напівдосконале кільце A будемо називати *n-рядним*, якщо кожний головний правий і кожний головний лівий A-модуль є n-рядним [5]. Природно, що можна розглядати і n-рядні тільки справа або зліва кільця. Часто, не уточнюючи n, n–рядне кільце будемо називати багаторядним.

Зрозуміло, що при n=1 ми отримуємо напівланцюгові кільця, а при $n = 2$ – бірядні кільця.

Теорема 2 [5]. *Якщо кільце A багаторядне справа (зліва), e – ненульовий ідемпотент кільця A, то кільце eAe багаторядне справа (зліва). Зокрема, якщо кільце A багаторядне, то й кільце eAe багаторядне.*

Д о в е д е н н я проведемо для багаторядного справа кільця A. В силу теореми 1.4 [7] кільце eAe напівдистрибутивне справа. Нехай $P = gA$ – головний A-модуль. З двостороннього пірсовського розкладу радикала Джекобсона, отримуємо, що модуль $gRe = Pre$ є єдиним максимальним підмодулем модуля Pe. Очевидно також, що якщо K – ланцюговий A-модуль, то і Ke – ланцюговий eAe-модуль.

Нехай модуль P n-рядний, тобто $PR = K_1 + \ldots + K_n$, де $K_1, \ldots, K_n$ – ланцюгові модулі $K_i \cap K_j$ рівні нулю або прості ($i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, s$). Тоді

$Pre = K_1e + \ldots + K_ne$ – сума ланцюгових eAe-модулів $K_1e, \ldots, K_ne$. Якщо

$K_i \cap K_j = 0$, то і $K_ie \cap K_je = 0$. Нехай $K_i \cap K_j = U$, де U – простий A-модуль. Тоді $K_ie \cap K_je = Ue$. Якщо $Ue = 0$, то доведення завершене.

Нехай $Ue \neq 0$. Покажемо, що eAe-модуль Ue простий. Якщо це не так, то Ue містить нетривіальний eAe-підмодуль Ve, породжуючий нетривіальний A-підмодуль в U, що приводить до протиріччя. Теорема доведена.

Теорема 3 [5]. *Локальне багаторядне кільце A є ланцюговим.*

Д о в е д е н н я знову проведемо для правого випадка. Припустимо, що кільце A не є ланцюговим справа модулем. Тоді в A існують два підмодуля A_1 і A_2 такі, що $M_1 \cap M_2 \neq M_1$ і $M_1 \cap M_2 \neq M_2$. Це означає існування елементів $m_1 \in M_1$ і $m_2 \in M_2$ таких, що $m_2 \notin M_1$, а $m_1 \notin M_2$. Зрозуміло, що цоколь фактор-модуля $(m_1A + m_2A) / (m_1R + m_2R)$ не вільний від квадратів і за теоремою 1 кільце A не дистрибутивне справа, що приводить до протиріччя. Теорема доведена.

Нагадаємо, що кільце A називається *напівспадковим*, якщо будь-який його скінченнопороджений ідеал проективний .

Лема 1 [8]. *Якщо A напівспадкове справа кільце і $e^2=e \in A$, то кільце eAe також напівспадкове справа .*

Лема 2. *Якщо напівдосконале кільце A напівспадкове справа, то всякий ненульовий гомоморфізм $\varphi : P_i \to P_j$ головних A-модулів є мономорфізм.*

Д о в е д е н н я **.** Так як образ $Im\,\varphi$ скінченнопороджений, а значить проективний модуль, маємо, що $P_i \cong Im\,\varphi \oplus Ker\,\varphi$. Але оскільки P_i – нерозкладний, то $Ker\,\varphi = 0$ і φ – мономорфізм.

Таким чином, напівдосконале напівспадкове кільце A є кусковою областю, двосторонній пірсовский розклад якої, у силу основної теореми роботи [9], має вигляд :

(1) $$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{mm} \end{pmatrix},$$ — де A_{ii} -$(i=1, \ldots, m)$ - первинні

кускові області, причому якщо A_{ij} і A_{jk} не дорівнюють нулю, то $A_{ik} \neq 0$ $(i,j=1,\ldots,m)$.

Нехай $1=f_1+\ldots+f_m$ – відповідний розклад $1\in A$ в суму попарно ортогональних ідемпотентів. У цьому випадку первинний радикал I кільця A має вигляд:

$$I=\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ 0 & 0 & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, він нільпотентний.

Розглянемо факторкільце $\breve{A}={}^{A}/I=\breve{A}_1\times\ldots\times A_m$, де $\breve{A}_i$ ($i=1, \ldots ,m$) нерозкладні кільця. $1=f_1+\ldots+f_m$ – відповідний розклад $1\in \breve{A}$ у суму попарно ортогональних ідемпотентів.

Позначимо $V={}^{I}/_{I^2}$ і співставимо ідемпотентам $f_1, \ldots, f_m$ точки $1, \ldots,m$ з'єднуючи точку i з точкою j стрілкою тоді і тільки тоді, коли $f_iVf_j\neq 0$. Отриманий скінченний орієнтований граф називається *первинним сагайдаком* кільця A і позначається $PQ(A)$.

Враховуючи теорему 1.11 [4] про однозначність розкладу напівдосконалого кільця в прямий добуток нерозкладних кілець, неважко бачити, що сагайдак $PQ(A)$ визначений однозначно, з точністю до перенумерації вершин. Очевидно також, що сагайдак $PQ(A)$ не змінюється при переході до кілець еквівалентних у сенсі Моріти і $PQ(A)=PQ({}^{A}/_{I^2})$.

Теорема 4 [10, ст.94]. *Первинний радикал кільця A є найменшим серед ідеалів I, для який ${}^{A}/_{I}$ – напівпервинне кільце .*

Лема 3. *Фактормодуль n-рядного модуля – n-рядний.*

Д о в е д е н н я. Очевидно,що фактормодуль дистрибутивного модуля дистрибутивний. Нехай P – головний *n-рядний* модуль, $K_1, K_2, .., K_n$ – ланцюгові модулі, сума яких є найбільшим власним підмодулем в P. Позначимо через M – довільний підмодуль модуля P. Якщо $M= K_1+\ldots+K_n$, то ясно, що P/M *n-рядний*. Нехай M не збігається з $K_1+\ldots+K_n$. Тоді в силу дистрибутивності модуля P, $M=M\cap K_1+\ldots+M\cap K_n$ звідки випливає, що $(K_1+\ldots+K_n)/M\cong K_1/K_1\cap M+\ldots+K_n/K_n\cap M$, де доданки в сумі – ланцюгові модулі. Лема доведена .

З цієї леми випливає:

Лема 4. *Факторкільце n–рядного справа (зліва) кільця A n–рядне справа (зліва). Зокрема, факторкільце n–рядного кільця n–рядне.*

Теорема 5. *Нехай напівспадкове багаторядне кільце A має двосторонній пірсовський розклад (1). Тоді $\breve{A}={}^{A}/_{I}$ розкладається в прямий добуток тіл і первинних напівланцюгових кілець.*

Д о в е д е н н я. Факторкільце $\breve{A}={}^{A}/_{I}$–багаторядне за лемою 4.

За теоремою 4 $\breve{A}$ – напівпервинне кільце, яке за наслідком 3.3 і теоремою 3.4 [7] розпадається в прямий добуток первинних напівланцюгових кілець.

Лема 5. *Нехай A таке напівспадкове багаторядне кільце, що його факторкільце* $\breve{A}$ *по первинному радикалу I ізоморфне або тілу D, або первинному напівланцюговому кільцю* Δ*, тоді* $A \cong D$*, або* $A \cong \boldsymbol{\Delta}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\breve{A} \cong D$, тоді A-локальне кільце. Так як воно напівспадкове справа, то за лемою 2 воно не містить ненульових нільпотентних елементів. Оскільки первинний радикал збігається з множиною усіх строго нільпотентних елементів (теорема Левицького[11]), а строго нільпотентний елемент є нільпотентним, то $I=0$ і доведення для тіл завершено.

Нехай тепер $\breve{A}\cong\Delta$. Розглянемо розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів: $1=e_1+...+e_S$ таких, що $e_i+I\in\Delta$ є матричними ідемпотентами кільця Δ. Тоді e_iAe_i - локальні кільця, причому за твердженням 5.9 [12] $eIe =rad\ eAe$, тоді, як і для тіл, одержуємо, що $e_iIe_i=0$ для будь-якого $i=1,...,s$. Припустимо, що $e_iIe_j\neq 0$ $(i\neq j)$. Виберемо ненульовий елемент $a\in e_iIe_j$. Множення елементів кільця A зліва на елемент a визначає ненульовий гомоморфізм $\varphi: P_j\to P_i$ головних A-модулів, що за лемою 2 є мономорфізмом . Так як $\varphi(a_{ij})\subset e_iIe_i$, де $a_{ij}\in A_{ij}(a_{ij}\neq 0)$, то $e_iIe_i\neq 0$, що суперечить попередньому. Отже, $I=0$ і лема доведена.

Наслідок 1. *Якщо напівспадкове багаторядне кільце A має двосторонній пірсовский розклад (1), то кільця* $A_{ii}(i=1,...,m)$ *ізоморфні або тілу D, або первинному напівланцюговому кільцю* Δ.

Д о в е д е н н я безпосередньо випливає з того, що $f_iAf_i\ /\ f_iIf_i \cong (f_i+I)\breve{A}(f_i+I)$ і теореми 5 та леми 5.

Теорема 6 [13]. *Первинний сагайдак напівдосконалого кільця A з нільпотентним первинним радикалом I зв'язний тоді і тільки тоді, коли A нерозкладне в прямий добуток кілець.*

Оскільки напівспадкове багаторядне кільце задовольняє умову теореми 6, то його первинний сагайдак зв'язний.

Лема 6. *Якщо кільце ендоморфізмів головного модуля P над напівспадковим багаторядним кільцем A не є тілом, то P - ланцюговий модуль. Це ж має місце і для лівих головних A - модулів.*

Д о в е д е н н я. Нехай $P=eA$, де e-локальний ідемпотент і $eRe\neq 0$. Тоді $PR=K_1+...+K_n$, де $K_i(\ i=1,...,n)$ – ланцюговий модуль .Можна вважати, що $eRe=K_te$. Розглянемо підмодуль K_teA, який лежить в P. Якщо $Pe_j\neq 0$, для деякого локального ідемпотента e_j, то так як A – напівспадкове кільце $K_teAe_j\neq 0$. Значить модуль K_t має ненульові компоненти в пірсовскому розкладі на тих же місцях, що й модуль P. Припустимо, що P не ланцюговий. Тоді $K_t\cap K_s$ $(s\neq t)$ $=u$- простий A-модуль. K_s– не простий і існує локальний ідемпотент $f\neq e$, такий, що $uf\neq 0$ (оскільки, згідно леми 10.3 [12] простий модуль над зведеним напівдосконалим кільцем не анулюється одним локальним ідемпотентом). Але тоді кільце $(e+f)A(e+f)$ не є напівланцюговим, що суперечить твердженню 3.4 [3]. Повністю аналогічно лема доводиться для головних лівих модулів.

Скінченний орієнтований граф (сагайдак у термінології Габріеля) називається *ациклічним графом* (*сагайдаком*), якщо у ньому немає орієнтованих циклів ([14], § 8.5).

Точка сагайдака Q називається *витоком* (*стоком*), якщо в неї не входить (з неї не виходить) стрілка ([14], § 8.6).

Будемо говорити, що точка j первинного сагайдака напівспадкового багаторядного кільця A має вагу D чи вагу Δ, якщо $f_jAf_j \cong D$ чи $f_jAf_j \cong \Delta$.

Теорема 7 [15]. *Первинний сагайдак $PQ(A)$ напівспадкового n-рядного кільця A $(n \geq 2)$ має наступні властивості:*

1) *у точку з вагою Δ входить не більш однієї стрілки і виходить з такої точки не більш однієї стрілки;*

2) *$PQ(A)$ ациклічний;*

3) *з кожної точки $PQ(A)$ виходить не більше ніж n стрілок;*

4) *у кожну точку $PQ(A)$ входить не більше ніж n стрілок;*

5) *якщо в точку входить більше однієї стрілки, то ця точка є стоком;*

6) *якщо з точки виходить більше однієї стрілки, то ця точка є витоком;*

7) *з кожної точки в іншу веде не більше одного шляху.*

Доведення.

1).Нехай у точку g з вагою Δ входять стрілки з точок i і j $(i<j<g)$.

Тоді $A_{ig}\neq 0$, $A_{jg}\neq 0$, причому $A_{ig}\not\subset I^2$, $A_{jg}\not\subset I^2$. Якщо $A_{ij}=0$, то кільце A не буде n-рядним за лемою 6. Якщо ж $A_{ij}\neq 0$, то згідно леми 2 одержуємо, що $A_{ig}=A_{ij}A_{jg}$. Тобто $A_{ig}\subset I^2$, що знову приводить до протиріччя. Аналогічно з точки з вагою Δ не можуть виходити дві стрілки .

2).Властивість безпосередньо випливає з клітинно - трикутного вигляду (1) кільця A.

3).Нехай із точки 1 виходять стрілки в точки $2, ..., n+1, n+2$. Тоді

$A_{12}, A_{13}, ..., A_{1n+2}$ ненульові, причому $A_{23}, ... A_{2n+2}, A_{34}, ... A_{3n+2}, .. A_{n+1n+2}$ дорівнюють нулю (інакше існують A_{1i} $(i=2,...,n+2)\subset I^2$). Ясно, що при цьому 0головний A–модуль $P_1=f_1A$ є $n+1$–рядним, що суперечить n–рядності кільця A.

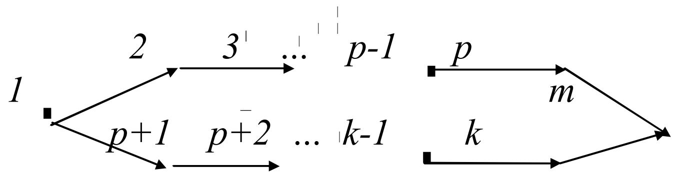
4).Доведення таке ж, як і у випадку 3, тільки для лівих головних A - модулів.

5).Розглянемо головний модуль $P_i=e_iA$, де e_i – локальний ідемпотент кільця A. $P_iR=K_1+...+K_n$, де K_t – ланцюговий модуль $(t=1,...,n)$. Тоді елемент $a_{ij}\in e_iRe_j\subset K_t$ породжує ланцюговий модуль

$M=a_{ij}A=(0,...,0, A_{ij}, A_{ij}A_{jj+1}, A_{ij}A_{jj+2}, ..., A_{ij}A_{jn})$, причому серед добутків $A_{ij}A_{jk}$ $(k=j+1,...,n)$ існує не більше одного відмінного від нуля, тому що якщо їх принаймні два, те легко перевірити, що $MR/MR^2=u_1+u_2$, в протиріччя тому, що M – ланцюговий модуль. Припустимо, що в точку g увійшли стрілки з початками в точках i і j, а з неї вийшла стрілка в точку p $(i<j<g<p)$. Тоді A_{ig}, A_{jg}, A_{gp} ненульові, $A_{ij}=0$, тому що в противному $A_{ig}=A_{ij}A_{jg}\subset I^2$, а $A_{ip}=A_{ig}A_{gp}\neq 0$ і $A_{jp}=A_{jg}A_{gp}\neq 0$, що суперечить попередньому. Таким чином, точка g є стоком.

6).Доводиться аналогічно 5.

7).Припустимо, що з точки 1 у точку m ведуть два шляхи . Тоді первинний сагайдак кільця A містить фрагмент :



Точки 1 і m мають вагу D. $A_{1i}\neq 0$ $(i=2,...,k,\ i=m)$ і $A_{jm}\neq 0$ $(j=1,...,k)$, а $A_{2p+1}=0,\ A_{3p+1}=0,\ ...,\ A_{pp+1}=0$, тому що в противному $A_{1p+1}\subset I^2$, що суперечить тому, що з точки 1 у точку $p+1$ іде стрілка. Розглянемо головний модуль $P_1=f_1A$. Його радикал $P_1R=(0,\ A_{12},\ ...,\ A_{1k}\ ,...,\ A_{1m})$. Виберемо ненульові елементи $a_{12}\in A_{12}$ і $a_{1p+1}\in A_{1p+1}$. Підмодуль $(a_{12}+a_{1p+1})A$ скінченнопороджений, а значить проективний. Він має вигляд:

$(0,\ x_{12}\ ,...,\ x_{1p+1}\ ,...,\ x_{1m})$, де $x_{1j}\neq 0$ $(j=2,...,k\ \ i\ \ j=m)$. Очевидно, що в його розклад у пряму сумму головних A-модулів входить один з головних A-модулів, що містяться в f_2A. Так як $(p+1)$-ша компонента такого модуля нульова, а $x_{1p+1}\neq 0,$ то крім нього в пряму суму входить, принаймні, ще один головний A-модуль. Але оскільки $A_{jm}\neq 0$ для усіх $j=1,...,k$, то будь-який головний A-модуль містить простий модуль ізоморфний $P_m\,/P_mR$ $(A_{mm}=D$– тіло$)$, тому цоколь модуля $(a_{12}+a_{1p+1})A$ не вільний від квадратів, що суперечить дистрибутивності модуля P_1.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.
2. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.
3. Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их применение. – К.: УМК ВО, 1988. – С. 43-74.
4. Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. Полусовершенные кольца и их колчаны // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 438-456.
5. Кириченко В.В., Ярёменко Ю.В. Многорядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1996. – Т. 48, № 9. – С. 1223-1235.
6. Camillo V.P. Distributive modules // J.Algebra. – 1975. – V. 36, № 1. – P. 16-25.
7. Кириченко В.В., Хибина М.А. Полусовершенные полудистрибутивные кольца // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики, 1993. – С. 457-480.

8. Sandomierski F.L. A note of the global dimension of subrings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 23. – P. 478-488.

9. Gordon R., Small L.W. Picewise domains // J.Algebra. – 1972. – V. 23, № 3. – P. 553-564.

10. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Мир, 1971. – 280 с.

11. Levitzki J. Prime ideals and the lower radical // Amer. J. Math. 1951. – V. 73. – P. 25-29.

12. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.

13. Кириченко В.В. О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах // Зап. науч. семинара ЛОМИ АН СССР. – 1982. – Т. 144. – С. 137-147.

14. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. – М.: Мир, 1986. – 426 с.

15. Яременко Ю.В. Первинні сагайдаки напівспадкових багаторядних кілець // Вісник Київського університету. Фіз.-мат. науки. – 1999. – №2. – С. 59-65.