4. Філєр З.Ю., Музиченко О.І. Модифікація та комп'ютерна реалізація критеріїв стійкості лінійних диференціальних рівнянь із запізненням//Проблеми фізико-математичної та технічної освіти і науки України в контексті євроінтеграції. Збірн. Наук. праць за матер. Наук.-практ. конф. («Вища освіта-2006»). – К.: НПУ ім.. Драгоманова, 2007. – С.137-145.

5. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. – М.: ИЛ, 1953. – 408 с.

УДК 517.91

СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ З ПЕРІОДИЧНОЮ МАТРИЦЕЮ

З.Ю. Філєр, О.І. Музиченко

Розглядається побудова матриці монодромії системи чисельними методами. Умова знаходження коренів характеристичного рівняння цієї матриці в одиничному крузі зведена до підрахунку кількості обертів радіуса-вектора годографа при обході по одиничному колу. Встановлюються запас стійкості та міра нестійкості. Розглядається стійкість чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь.

The construction of matrix monodromy system is examined by numeral methods. The condition of finding roots of characteristic equalization of this matrix in a single circle is erected to the count amount turns radius-vector hodograph at round on a single circle. Set supply of firmness that measure of instability. Firmness of numeral methods of decision of differential equalizations is examined.

Вступ. Аналіз стійкості неавтономних систем вигляду

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, ..., y_n), \mathrm{i} = 1,2,...,\mathrm{n}$$

в деяких випадках зводиться до аналізу стійкості лінійних систем з періодичною матрицею. Коли відома матриця монодромії, або її можна побудувати, з'ясування стійкості системи можна звести до використання спеціального критерію.

Матриця монодромії. Розглянемо лінійну систему

$$dx/dt = A(t)x \qquad (1)$$

з неперервною на $(-\infty;+\infty)$ Т-періодичною матрицею $A(t)$: $A(t+T) \equiv A(t)$ *(T>0)*. Якщо *X(t)* – нормована фундаментальна матриця розв'язків системи (1), то на основі тотожності $\dot{X}(t) \equiv A(t)X(t)$, $\mathrm{X}(0) = E$ маємо $X(t+T) \equiv X(t)B$.

Стала матриця *B* називається *матрицею монодромії* системи.

Критерій: для *асимптотичної стійкості* періодичної системи (1) необхідно і достатньо, щоб усі власні значення ρ матриці монодромії *B* лежали всередині одиничного круга: $|\rho| < 1$ [1].

Для дослідження періодичних систем на стійкість виведемо умову, яка забезпечує належність коренів характеристичного полінома

$$f(\rho) \equiv \det[B - \rho E] \qquad (2)$$

одиничному кругу $|\rho|<1$. Неважко перевірити, що лінійне для дробу перетворення $\rho=(\lambda+1)/(\lambda-1)$ одиничний круг $|\rho|<1$ площини комплексного змінного ρ $(\rho=\alpha+i\beta)$ переводить в ліву півплощину $\operatorname{Re}\lambda<0$ площини λ. Використавши таке перетворення, ми можемо застосовувати критерії стійкості. Таким чином рівняння (2) замінюється наступним рівнянням: $\det[B-(\lambda+1)/(\lambda-1)E]$ або

$$(\lambda-1)^n\det[B-(\lambda+1)/(\lambda-1)E]=0\Rightarrow\det B[(\lambda-1)-(\lambda+1)E]=0$$

Використовуючи критерій Михайлова, підставимо в ліву частину $\lambda=i\omega$ отримаємо характеристичний поліном в комплексному вигляді:

$$f(i\omega)=\det B[(-1+i\omega)-(1+i\omega)E]=0$$

Величина $f(i\omega)$ при фіксованому значенні ω також зображується на комплексній площині uOv вектором. Коли ω змінюються від 0 до $+\infty$ то кінець цього вектора описує криву – годограф Михайлова. Нагадаємо, що критерій Михайлова формулюється так: для асимптотичної стійкості автономної системи необхідно і достатньо, щоб вектор $f(i\omega)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$ обернувся проти руху годинникової стрілки навколо початку координат на кут $\varphi=n\pi/2$.

Для звуження інтервалу, на якому ведуться підрахунки, також застосовується метод фінітизації: заміна в характеристичному поліномі ω на $z/(1-z)$ з множенням його на $(1-z)^n$.

При цьому інтервал звужується до проміжку [0;1):

$$(1-z)^n\det\left[B\left(-1+i\frac{z}{1-z}\right)-\left(1+i\frac{z}{1-z}\right)E\right]=0\Rightarrow$$

$$\det[(B+E)(z-1)+iz(B-E)]=0$$

Така заміна зберігає кут повороту годографа, оскільки зберігається напрям радіусу-вектора. Для випадку систем з періодичною матрицею складена програма з використанням математичного пакету Maple. Програма надає можливість з'ясування питання про стійкість системи у разі, коли загальний період елементів матриці *A(t)* відомий.

Чисельні методи відшукання матриці монодромії. Можливий і інший підхід для дослідження стійкості: за допомогою чисельного відшукання матриці монодромії за її означенням. Для її знаходження використовується чисельне інтегрування задачі Коші на відрізку довжиною у період *T*. Можливе використання й *методу Ейлера.*

Поділимо відрізок [0; T] на *N* частин завдовжки *h=T/N*. Позначимо $X_k=X(t_k)$, $t_k=kh$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Використовуємо формулу $X_{k+1}=X_k+hA(t_k)X(t_k)$, $X_0=X(0)=E$.

Очевидно $X_{k+1}=(E+hA_k)X_k$, $X_0=E$. Тоді $B=X_n$.

Якщо використовувати точніший *метод Рунге-Кутти:*

$$X_{j+1}=X_j+h/6(K_1+2K_2+2K_3+K_4),$$

$$K_1=A_jX_j;\ K_2=A_{j+1/2}(X_j+h/2K_1),$$
$$K_3=A_{j+1/2}(X_j+h/2K_2);\ K_4=A_{j+1}(X_j+h/2K_3),$$

де $A_{j+1/2}=A(t_j+h/2)$, то можна взяти значно більший крок h, що скорочує час розрахунку, особливо для матриць високих порядків. Операції множення матриць по суті є «паралельними» і можуть виконуватись одночасно у багатопроцесорних комплексах. Розвиток комп'ютерної техніки дозволяє системи великих порядків.

Для побудови матриці 7-го порядку використана матриця зі статті [3], яка перетворена у подібну за допомогою випадкової матриці. Вони мають однакові власні значення. Отримана матриця

$$A=\begin{bmatrix} -0.903 & -0.288 & 0.262 & 0.069 & -0.265 & -0.219 & 0.089 \\ 0.393 & -0.885 & -0.075+5\cos(t) & 0.078 & 0.132 & -0.185 & -0.184 \\ -0.158 & 0.309 & -0.632 & 0.061 & 0.020 & -0.003 & -0.141 \\ 0.003 & 0.018 & 0.078 & -0.877 & -0.114 & -0.084 & -0.107 \\ 0.136 & -0.174 & 0.241 & 0.064 & -0.719 & 0.241 & 0.144 \\ 0.283 & 0.156 & 0.009 & 0.112 & -0.204 & -0.755 & 0.069 \\ -0.067 & 0.133 & -0.076 & 0.082 & -0.218 & 0.129 & -0.825 \end{bmatrix},$$

дає матрицю монодромії

$$B=\begin{bmatrix} -0.0045 & 0.0112 & 0.0484 & 0.0003 & 0.0075 & -0.0051 & -0.0099 \\ 0.0105 & -0.0774 & -0.306 & -0.0133 & -0.0067 & 0.0093 & 0.0436 \\ 0.0043 & -0.0261 & -0.103 & -0.0041 & -0.0029 & 0.0039 & 0.0148 \\ -0.0018 & -0.0021 & -0.0049 & 0.0013 & 0.0044 & -0.0017 & -0.0028 \\ 0.0031 & 0.0086 & 0.0367 & 0.0064 & -0.0018 & -0.0001 & -0.0039 \\ 0.0008 & -0.0142 & -0.0637 & -0.0044 & -0.0129 & -0.0046 & 0.0063 \\ 0.0006 & -0.0171 & -0.0825 & -0.0052 & -0.0150 & -0.0011 & 0.0151 \end{bmatrix}$$

методом Ейлера обчислювалася близько 1.6 с; майже стільки ж вона відшукувалася методом Рунге-Кутти при кількості кроків N вчетверо менше, але при цьому точність приблизно в 7 разів вище.

На відміну від статті [2], розглянутий вище приклад має гармонійну зміну елементу a_{23}. Крім того, ми взяли елемент a_{23}, що містить доданок $-5sign(t-\pi)$ – "прямокутний синус" тієї ж амплітуди. Система виявилася також стійкою асимптотично.

Замкнутий годограф образу одиничного кола функції $\det(B-\rho E)$. Можна запропонувати інший метод встановлення стійкості за допомогою безпосереднього застосування *принципу аргументу* для функції $f(\rho)=\det(B-\rho E)$. Отримуємо *критерій*: Якщо при обході по колу одиничного радіусу $\rho=e^{i\alpha}$ при зміні α від 0 до 2π $\arg f(\rho)$ зміниться на $2\pi n$, то система з матрицею монодромії B стійка асимптотично (оскільки всі корені рівняння (2) лежать в одиничному крузі).

Геометрично крива $F(\alpha)=f\left(e^{i\alpha}\right)$ при цьому зробить n обертів навколо точки О. Цю криву можна також розглядати як годограф системи (1). Для вище розглянутої матриці *A(t)* зобразимо відповідний годограф $F(\alpha)$ на рис. 1.

Побудова цього годографа не є обов'язковою, ми його приводимо з метою унаочнення.

На рис. 1а зображений цей плоский годограф; на рис. 1б – його просторовий варіант, коли координата z пропорційна куту повороту α. Тут чітко видно кількість обертів годографа дорівнює 7. Початок годографа на рисунку зліва зображений суцільною лінією, його продовження – пунктиром, далі – штрих пунктиром.

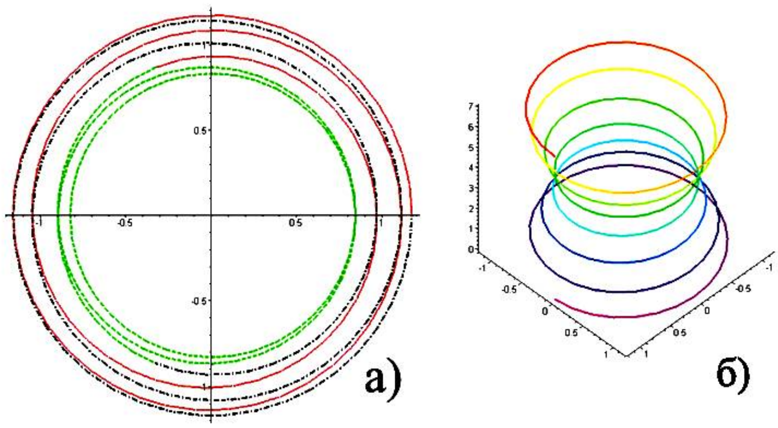

Рис. 1

Визначення запасу стійкості системи. Якщо дана система стійка асимптотично, то *запас* її стійкості може бути визначений за допомогою з'ясування питання: у крузі якого мінімального радіусу $r_0<1$ система з характеристичним рівнянням $f(\lambda r)=0$ ще “стійка” (а при $r<r_0$ – нестійка, тобто не всі корені лежать в крузі радіусу r).

Опишемо відповідний алгоритм:

1. Замінимо λ у характеристичному многочлені системи на $re^{i\alpha}$. Стійкість при $r=1$ вже встановлена. Оскільки при $r=0$ система нестійка (бо n-кратному кореню ρ=0 відповідає многочленний розв’язок), то розглянемо стійкість системи в середній точці $r_c=(0+1)/2$.

2. Якщо вона в ній стійка, то далі, використовуючи алгоритм дихотомії, визначаємо з прийнятою точністю Δ значення r_0.

Для розглянутого вище прикладу системи 7-го порядку запас стійкості $\mu=1-r_0$ склав 0.83, тобто при $r=0.17$ вона ще стійка (рис. 2а). Відповідний годограф при $r=0.16$ вже показує нестійкість (рис. 2б), бо внутрішній виток (звій) не охоплює початок координат. Число обертів радіусу-вектора навколо точки O рівне $m=6$ і менше, ніж $n=7$. Для прикладу з «прямокутним синусом» запас стійкості виявився навіть вище, ніж для цієї системи – він склав 0.92. Побудовані годографи для другої системи якісно не відрізняються від (рис. 2).

У системах з періодичними коефіцієнтами можуть бути так звані «параметричні резонанси», коли розв'язки нестійкі. Для систем 2-го порядку, як у роботі [2], відносяться і рівняння Матьє

$$\ddot{x} + \omega^2 x\left(1 + \varepsilon \cos pt\right) = 0,$$

яке при раціональних відношеннях p до ω може мати зону нестійкості [1].

Запас стійкості системи

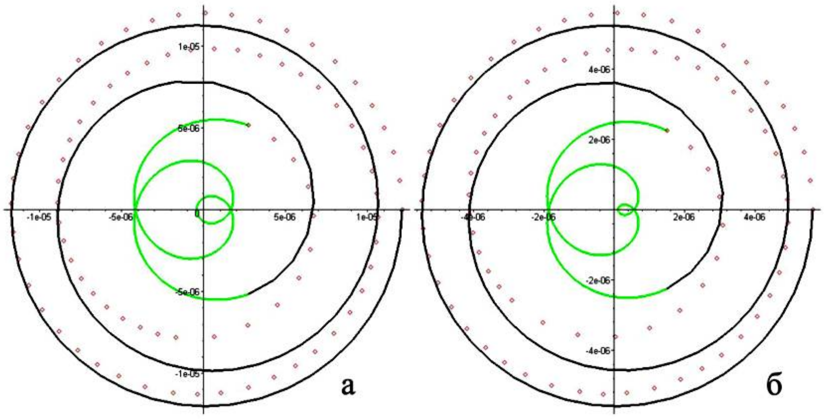

Рис. 2

Міра нестійкості системи. Для нестійкої системи можна ввести поняття *міри нестійкості*, як різниці найменшого радіусу R_0 круга, що містить всі корені, і одиниці. Встановивши нестійкість даної системи, подвоїмо радіус круга, в якому повинні знаходитися всі корені; якщо в ньому міститься не всі корені, то радіус подвоюється, а потім знову перевіряється: чи лежать в новому крузі всі корені? Якщо вони всі там знаходяться, то процесом дихотомії знаходиться шуканий радіус R_0 найменшого круга, що містить всі n коренів. Число $M=R_0-1$ і є *мірою нестійкості*. При синтезі стійкої системи, знаючи керуючі елементи матриці, можна встановити напрям зміни відповідного параметра, що зменшує міру нестійкості. Продовжуючи зміну параметра, який управляє, процесом дихотомії знаходимо його значення «на межі» стійкості і досягаємо необхідного її запасу. На рис. 3 зображені годографи нестійкої системи з матрицею:

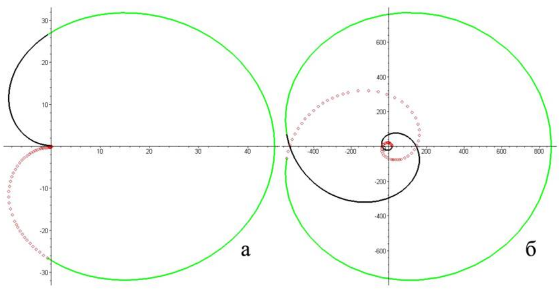

Рис. 3

$$A = \begin{bmatrix} 0.074168 & 0.072697 & 0.014602 & 0.027553 \\ 0.014340 & 0.070693 & 0.003467 & 0.067765 \\ 0.065899 & 0.024480 & 0.074055 & 0.073417 \\ 0.036099 & 0.004052 & 0.006929 & 0.070348 \end{bmatrix}.$$

На рис. 3б зображений годограф при $R_0=2.8$. Таким чином, мірою нестійкості є число *1.8*.

Висновки. 1. Запропоновано отримання матриці монодромії, використовуючи чисельні методи.

2. За принципом аргументу побудовано простий критерій стійкості систем з періодичною матрицею.

3. Розроблені відповідні алгоритми і програми.

4. Уводяться поняття запасу стійкості μ та міри нестійкості M, та пропонуються алгоритми їх відшукання.

5. Наведені численні приклади.

6. Результати можуть бути використані також і для аналізу стійкості систем зі сталою матрицею.

7. Отримані результати можуть бути використані для аналізу та синтезу конкретних електромеханічних систем та в навчальному процесі.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

2. Одинцова В., Синицкий Л. Об устойчивости параметрических систем второго порядка //Сб. труд. конф. «Моделирование – 2006», т. 2. – Киев: ИПМЭ, 2006. – С. 347 – 348.

3. Филер З.Е., Колманович В.Ю. Об устойчивости систем линейных автономных дифференциальных уравнений//Динамика и прочность тяжелых машин, вып. 6. -- Днепропетровск: ДГУ, 1982. – С. 183-187.

УДК 512.552.1

НАПІВСПАДКОВІ БАГАТОРЯДНІ КІЛЬЦЯ

Ю.В.Яременко

Описано структуру напівспадкових багаторядних кілець.

The structure of semihereditary multiserial rings is described.

Важливим напрямком теорії кілець являється проблематика виділення і вивчення класів тих кілець, які можна охарактеризувати властивостями модулів над ними.

Одним з основних понять теорії кілець та модулів є поняття простого модуля, тобто модуля, у якого решітка усіх підмодулів є двоелементним ланцюгом. Класично напівпрості кільця характеризуються тим, що усі модулі над ними напівпрості, тобто розкладаються в прямі суми простих модулів. Кільця, над якими всі нерозкладні модулі прості, охарактеризовані класичною теоремою Веддербарна-Артина.

Більш широкий клас модулів – клас ланцюгових модулів, тобто модулів, у яких решітка усіх підмодулів є ланцюгом – розглядали Кете, Асано,